Digitized by Google

FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EM. III NAPOLI
B. Prov.
IV
232

BIBLIOTECA PROVINCIALE
9-G-1
Armadio XXIII
Palchetto
Num.° d' ordine 14 9-G-1

Digitized by Google

1\16
5
~~30~~-31

B. Prov.
IV
232-33

Digitized by Google

JACOBI BERNOULLI,

BASILEENSIS,

OPERA.

Tomus Primus.

613629

R. ISTITUTO ORIENTALE NAPOLI BIBLIOTECA M. RIPA

GENEVÆ

Sumptibus Hæredum CRAMER & Fratrum PHILIBERT.

M. DCC. XLIV.

Digitized by Google

Digitized by Google

VIRO EXCELLENTISSIMO,
CELEBERRIMO,

NICOLAO BERNOULLI,

J. U. DOCT. ET PROFESSORI,

Academiæ Baſileenſis h. t. Rectori Magnifico,

S. P. D. G. C. G.

NOVAM, quam curavi, Operum Patrui Tui editionem cui dedicarem non erat, Vir Doctiſſime, quod ambigerem. Hæc tot nominibus Te nuncupat Patronum, ut clientelam iſtam, ne ſi velim quidem, poſſim ad alium traducere. Nam ut mittam, quæ diu inter nos interceſſit, quamque ſpero fore perpetuam, amicitiam; cui potius conſecrarem ingenii *Bernoulliani* monumenta, quam Tibi, non nominis tantum

Digitized by Google

heredi, ſed doctrinæ; ſimillimoque Præceptori Diſcipulo; cui Collectionem hanc offerrem prius, quam Illi, cujus diligentia & benignitate integra facta eſt & amplior; cui denique notas, quibus, ut potui, loca quædam illuſtrare conatus ſum, melius commendarem, quam Viro, cujus hortatione & exemplo viam monſtrante inductus ſum, ut id operis ſuſciperem. Tu igitur quicquid id eſt, ſive munuſculum, ſive, ut ego cenſeo, quod optimam certe partem jam Tuum, nunc, veluti quodam alluvionis jure, accreſcit Tibi totum, accipe & amare me pergito. Sic Te Deus ſoſpitet, nobiſque ut diutiſſime vivas & feliciſſime concedat. Vale. Genevæ. Cal. Octob. 1743.

LECTORI

LECTORI
S.

VETUSTORUM Auctorum Scripta, quibus Artes & Scientias ſuo tempore excultas tradere nobis adnitebantur, dum vel legimus ſervata, vel perdita deſideramus; nequit fieri, quin illorum ſocordiam indignemur quorum barbarie vel incuria perierunt; horum contra laudemus induſtriam qui his colligendis conſervandisque utilem operam dederunt. Si quos autem ab interitu ſalvos præſtare tenemur Auctores, ii certe ſunt, quos novis Artibus condendis aut inſigniter promovendis gloriam adſecutos cernimus. Quamobrem cum Illuſtrium Virorum, quibus univerſa Matheſis, Calculus inprimis

Digitized by Google

infinitorum ultra quam dici poteſt debet, BERNOULLIORUM fama, ſine dubio, ad eos omnes perventura ſit qui Mathematicis Diſciplinis ſtudebunt; intereſt hujus ſæculi, ne videamur ingrati, tranſmittere poſteris quæcunque litteris mandarunt ſuæ doctrinæ monumenta. Quod tutiſſime fieri poſſe confido, ſi conjunctim edendo moles veluti quædam objiciatur Tempori; ut quæ, licet immortalitate digna, ſingula forſan interirent Opuſcula, viam ad poſteros, agmine quaſi facto, ſibi faciant. Igitur, poſt editos præſtantiſſimi JOHANNIS BERNOULLI labores, Opera Fratris ejus JACOBI, Mathematici pariter celeberrimi, ante aliquot annos defuncti, in manus tibi trado, Lector Candide. Laborem utilitatis Tuæ gratia ſuſceptum ſi probes, finem adſecutus ſum quem mihi propoſui: Sin minus, Tui ſaltem juvandi voluntas errorum mihi veniam impetrabit.

Quid hic præſtiterim vides. BERNOULLII Opuſcula, vulgata prius ſed diſperſa, collegi; ne omiſſis quidem iis, quæ juvenis in uſum Studioſorum conſcripſit, ut Profeſſorium munus, vel adipiſceretur, vel expleret. Quanquam enim non ſint cum illis omnino comparanda quæ maturior vulgavit, illorum tamen lectio fructu non deſtituitur. Amœnum enim eſt videre a quibus initiis ad illum doctrinæ apicem evectum ſit hominis ingenium: utile, cognoſcere exemplo quid poſſint labor & ſtudium.

Quod

Quod autem inter cæteros non compareat elegantiſſimus de *Arte conjectandi* Tractatus, cauſa eſt, quod is ſit ſeparatim editus, multorum manibus tritus, & facile parabilis. Hunc igitur, niſi intelligam aliter Tibi videri, prælo rurſus committendum non exiſtimavi. Sed, quæ Noſtro dederunt occaſionem ſcribendi, aliena Schediaſmata nonnulla intermiſcui; ut nuſquam quid ſit id de quo agitur ambigas.

Tractatus ſingulos unde eruerim in margine adnotavi. Nunc vero primum lucem aſpiciunt publicam Auctoris *Poſthuma varia*; quorum, poſt mortem, edendorum Noſtro conſilium fuiſſe teſtatur Titulus ipſius manu conſcriptus, una cum tribus Articulis prioribus. Sequentes ad decimum tertium uſque, dictante BERNOULLIO, deſcripſerat Celeb. JACOBUS HERMANNUS. Reliquos viginti, ex Patrui Schedis excerptos, mecum humaniſſime communicavit Excellentiſſimus NICOLAUS BERNOULLI, Auctoris e Fratre NICOLAO Nepos, & doctiſſimis, quas ſimul editas habes, notis exornavit.

Quas cum mitteret Vir amiciſſimus, me per litteras magnopere hortabatur, ut & ipſe non ad priores modo Poſthumorum Articulos, ſed ad omnia omnino Opuſcula e quibus iſta Collectio conficitur, meas quoque notas adjungerem. Ego, quamvis huic oneri imparem me, tot præſertim negotiis diſtractum, facile agnoſcerem, & ſera aliquantulum veniret hortatio,

tatio, impreſſis jam pluſquam trecentis paginis, noluitamen omittere quicquam eorum quæ, tanti Viri judicio, Tyronibus faciliorem Auctoris noſtri lectionem efficere poſſent. Horum itaque in gratiam, Tyronibus enim unice ſcripſiſſe me profiteor, non iis qui edita tenent loca Matheſeos; Horum, inquam, in gratiam, conatus ſum primum ea quæ, propter brevitatem aut alias ob cauſas, erant intellectu difficiliora paucis explanare; deinde, quæ ſine probatione afferebantur demonſtrare: tum paulatim, Lectori familiarior factus, Methodis particularibus generaliores, ubi poſcere videbatur argumenti dignitas, ſubſtituere tentavi: denique, quod ſynthetice adſtruebatur, analytice nonnunquam inveſtigare periclitatus ſum. Quo ſucceſſu, tuum, Lector Benevole, judicium eſto. Parce autem ac ſobrie, hac libertate, quæ mihi prope licentia videbatur, uſus ſum, ne Textum Commentarius opprimeret. Vereor tamen ut multis diſpliceat labor iſte meus, querentibus Auctori fuiſſe admiſtum aliquid tam diſpar ſui atque diſſimile: Ac ſane juſtiſſimam eſſe reprehenſionem non diffiterer, niſi, quæ in hiſce notis congeſſi, pleraque ſummis, quos toties laudo, Mathematicis deberentur. Utcunque erit, juvabit ſaltem me illorum voluntati paruiſſe, quorum amicitia nihil habeo antiquius, & eorum utilitati conſuluiſſe, quorum commodo nihil eſt mihi carius. Vale.

VITA

VITA
CELEBERR. MATHEMATICI
JACOBI BERNOULLII
In Acad. Baſil. Mathem. Profeſſ. Meritiſſ.

ORATIONE PARENTALI

EXPOSITA

DIE XXIII NOVEMB. A. cIↄ Iↄ CCV.

A

J. JACOBO BATTIERIO
J. U. D. ELOQ. PROFESS. P.

Edita primum

BASILEÆ,

cIↄ Iↄ CCV.

Digitized by Google

Digitized by Google

J. JACOBUS BATTIERIUS,

J. U. D.

Eloq. Profeſſor Publ.

LECTORIBUS S. D.

SI morientibus etiam, quæ ſunt TACITI verba, cura eſt decori exitus, ſemperque viri graves & honeſti, & qui illis morientibus miniſtrant, id ſibi cavendum exiſtimarunt, ne quid, vel in vultu, vel in cetera corporis conformatione, indecorum etiam a morte conſpici poſſet, ipſique adeo illi, qui violenta morte ſibi pereundum videbant, id agere ſunt ſoliti, ut honeſte caderent: non eſt profecto du-

Digitized by Google

bitandum, majorem longe honeſtæ ad poſteritatem memoriæ propagandæ, quam illarum corporis ſui exuviarum ad intempeſtivum decorem qualitercunque componendarum, curam atque ſtudium morientium animis inſidere, illiſque volentibus fieri, ſi, quæ DEUS in hac vita præ aliis beneficia in eos contulit, quæque per illos præclara corporis animique viribus geri voluit, ad poſteritatis notitiam tranſmittantur. Præterquam enim quod hæc cogitatio juſtiorem illis & minus triſtem mortis conditionem facit, quando vident, non item ut corporis vitam, ſic memoriam quoque ſui fato interituram; tum vero poſteritatis, cujus eos curam aliquam gerere merito eſt credendum, non parum intereſt, illam propoſito clarorum Virorum exemplo ad virtutis & eruditionis æmulationem excitari. Ceterum uti hæc erga defunctos pietatis teſtificatio ipſa in ſe admodum eſt laudanda; ita certe reprehendendum eſt perverſum illorum inſtitutum, qui tum demum ſuo ſe officio rite defunctos putant, cum in exponendis demortuorum virtutibus & diſſimulandis vitiis nihil mediocriter dixerint aut fecerint. Quæ res non poteſt non diverſum habere exitum, quam quem illi in dicendo ſibi propoſuerant. Ea enim ratione id accidit, ut qui aſcititium illum Oratoris fucum atque impoſturam animadvertunt Auditores, omnem illius narrationi fidem abrogent, & cum non levi exiſtimationis defuncti diſpendio ne veras quidem

dem ejus laudes ſibi perſuaderi patiantur. Qua in re paria fere iſti cum Veterum ſtultitia facere videntur, qui, magno quodam viro id notante, amicorum defunctorum urnis cippos & columnas marmoreas cum imponerent, optabant tamen iiſdem terram levem, votis ſuis plane contraria facientes: Ita hi, dum famæ defunctorum volunt conſulere, nimia illa & modum excedente laudatione totam evertunt. De ALEXANDRO M. *illud eſt memoriæ proditum, quod cum ei in Hydaſpe amne naviganti Poëta quidam carmen obtuliſſet, in quo ille Regem turres dejicientem monteſque perfodientem introduxerat, cum indignatione a ſe illum repulerit; Apage, dicens, iſthæc mendacia, quæ illa etiam, quæ vere a me geſta ſunt, in falſitatis poſſunt ſuſpicionem adducere. Ego vero, qui Clariſſimi viri,* JACOBI BERNOULLII, *principis horum temporum Mathematici, & in Academia noſtra Profeſſoris celeberrimi, quem menſis Auguſti dies* XVI *nobis triſti atque præcoce fato ſubduxit, vitæ mortiſque hiſtoriam oratione parentali explicare conſtitui, quanquam in exponendis ejus laudibus, quas ſibi ſummas mathematicarum rerum ſcientiâ apud omnes comparavit, non habeo neceſſe vereri, ne quid ſupra illius meritum dicam; reputavi tamen apud animum meum, conſultius me facturum, ſi, quæ res fidei plus & invidiæ minus habitura videbatur, tenui ſed ingenua Oratione præcipua duntaxat vitæ & ſtudiorum illius*

lius capita delibarem potius, quam amplificandis ejus virtutibus, aut falſis ei aſtruendis, fidem in Auditorum animis conſumerem. Ei Orationi publice recitandæ ſtatutus eſt a me dies XXIII *hujus menſis Novembris. Vos ergo, qui defuncti memoriam honoratis (honorabitis autem, ſi omnino ſuus apud vos literis honos conſtat) dicto die, hora* X *matutina, in Auditorium JCtorum frequentes confluite, & me incomta oratione, qualem lugubrem eſſe convenit, juſta conjunctiſſimo Collegæ facientem benigne audite. Dabitur a me viciſſim opera, ne quod amoris, honoris, & obſervantiæ officium ullo unquam tempore fruſtra a me expectetis. Valete.*

Rectore Academiæ Magnifico

D.SAMUELE WERENFELSIO,S.Th.D.

Vet. Teſt. Prof. celeberr.

Decano Facultatis Artium Spectabili

D. EMANUELE KÖNIG, Med. D.

Phyſicæ Profeſſ. meritiſſ.

VITA

VITA
JACOBI BERNOULLII
MATHEM. CELEBERR.

SI qui ſunt ex vobis, AUDITORES, qui temere hoc a me factum exiſtimant, quod ego potiſſimum, homo mathematicarum rerum ſcientia minime omnium initiatus, & plane ἀγεωμέτρητος, hanc mihi præſtantiſſimi noſtrorum temporum Mathematici publica oratione laudandi provinciam ſumſerim; hi, quod pace illorum dixerim, parum ex condigno hujus Viri virtutes æſtimare, ejuſque eruditionem anguſtis admodum finibus circumſcribere videntur. Ut enim negari profecto non poteſt, mathematicæ eruditionis laudem præ aliis omnibus in eo emicuiſſe, eaque illum præcipue inter eruditos ſe cenſeri voluiſſe; ita viciſſim nemo eſt qui non intelligat, præter hanc principem & præcipuam facultatem, aliarum quoque laudandarum artium ſegetem quaſi quandam in eo effloruiſſe, quæ ſi priori illi dignitate exæquari non debent, inſigne tamen decus,

cus,

cus, &, ut ita loquar, colorem illi conciliarunt. Eam intelligo virtutem, qua & adverſarios diſputando convincere, & quæ ſubtiliter atque ingenioſe ab ipſo excogitata erant, eleganter, perſpicue, ac copioſe diſſerere ſciebat. Quarum rerum intelligentia cum ad plures pertineat, & a me quoque, per id tempus quo ego illo conjunctiſſimo Collega ſum uſus, ſæpius in eo cum admiratione fuerint animadverſæ, videor meo quodam jure in laudanda præſtantiſſimi Viri memoria partem mihi poſſe vindicare. Quod ſi vero ad dicendum parem ejus doctrinæ facultatem orationis non attulero, illud erit vobis cogitandum, nec alium facile quenquam potuiſſe reperiri, qui tam eximias laudes verbis exæquare potuiſſet. Quare permittite, *Auditores*, ut hoc officio, quod & defuncti voluntas non obſcure mihi paulo ante obitum deſtinavit, & ea; quæ non interrupta mihi ſemper cum eo interceſſit, amicitia quaſi pro imperio injungit, qualicunque, fideli certe ac ingenua, vitæ & ſtudiorum ipſius enarratione defungar, & literati Orbis deſiderio, qui ut hunc Virum ex egregiis ingenii monumentis jam diu noſſe & admirari cœpit, etiam præcipua vitæ illius momenta, quibuſque ille adminiculis uſus ad tam eximiam eruditionem pervenerit, ſibi explicari poſtulat, bona veſtra cum venia ſatisfaciam.

Natus eſt JACOBUS BERNOULLIUS iis majoribus, quos ob conſtantem purioris Religionis profeſſionem ALBANI *Ducis* credulitas patria ſua *Antverpia* pulſos, in exteris regionibus fortunarum ſuarum ſedem quærere coegit, poſtquam in illa civitate BERNOULLIORUM gens, METERANO * quoque celebri rerum Belgicarum ſcriptori memorata, diutiſſime floruerat, & Conſulatum quoque geſſerat. Accidit ea calamitas JACOBO, qui cum octo liberis utriuſque ſexus domo profugus *Francofurti* domicilium poſuit, ibique A. cIↃ IↃ LXXXIII denatus eſt. Ejus ex filio nepos cognominis, cum noſtræ Religioni eſſet addictior, a fratribus, qui reliquorum Proteſtantium religio-

* *Edit. Germ. L. XI. p.* 225. *& L. XVI. p.* 343.

religionem amplexi apud *Francofurtenſes* perpetuam fortunarum ſedem conſtituerunt, quorumque poſteritas etiamnum ibi perdurat, ſeceſſione facta, *Baſileam* commigravit, quæ urbs aliis quoque familiis ob eandem religionis cauſam patria profugis, & meæ quoque, benignum hoſpitium exhibuit. Parentem habuit noſter NICOLAUM, ſenem venerabilem, Fori judicialis & Cameræ Rationum apud nos aſſeſſorem, qui inverſo fatorum ordine octogeſimo ætatis anno primogeniti hujus filii ſui funus duxit. Matrem, MARGARETHAM SCHÖNAUERAM, quam præcoce funere ereptam in adoleſcentia amiſit. Hoc conjugum pari præter defunctum nati ſunt tres alii filii etiamnum ſuperſtites, primus Urbis Senator ſuo merito jamdum deſignatus; alter *Groningana* hucuſque, nunc noſtræ Academiæ in docenda Matheſi Profeſſor aſcriptus, inter principes hujus ævi Mathematicos jamdiu connumeratus; tertius Artis Pharmaceuticæ unus omnium peritiſſimus. Natus eſt autem anno ſuperioris ſeculi quinquageſimo quarto, die XXVII Decembris, atque, utprimum per ætatem doctrinæ capax eſt habitus, Gymnaſii noſtri Præceptoribus iis litteris, quibus pueritia ad eruditionem & honeſtatem informari ſolet, inſtruendus eſt traditus. Horum induſtria cum jam eo uſque in literis profeciſſe eſt viſus, ut in Academicam lucem tranſlatus Philoſophiæ ſtudio vacare poſſet, cœpit ille, ne tantæ de ſe excitatæ ſpei per ſocordiam decoqueret, uti domeſtica informatione Venerandi & Cl. Viri, D. D. JOH. JACOBI HOFMANNI, tunc Græcæ Linguæ, nunc Hiſtoriarum apud nos Profeſſoris celeberrimi: & per illud triennium, quod tractando Philoſophiæ ſtudio legibus eſt conſtitutum, Peripateticorum dogmata, quæ fere ſola tunc temporis in Scholis tradi ſolebant, avide hauſit: donec ex illis anguſtiis eluctatus, anno CIↃ IↃC LXXI, Magiſter Artium publice renunciatus animum ad ſtudium ſacrum applicare cœpit, magis tamen, quod poſtea ſemper eſt profeſſus, ex Patris ſui quam propria voluntate: quippe qui ad aliud ſtudiorum genus propendere ſe, & a natura quaſi impelli, animadverteret. Jam tum enim in illa adoleſcentia ex figurarum quarundam geometricarum inſpectione ſe-

cretam quandam oblectationem in animo ſuo exiſtere ſentiens, paulatim mathematicas diſciplinas ita deperire cœpit, ut ad hoc ſtudium a natura factus eſſe videretur. Quod conſilium quanquam Patri minus probari animadverteret, neque adeo ulla ab eo ſubſidia in eum uſum acciperet, in propoſito tamen uſque rectum clavum tenuit, &, impellente genio, identidem ad ſuos numeros ac figuras furtivo quodam ſtudio divertit, &, cum proprios libros nullos haberet, quoscunque ipſi ſors aliunde objiciebat, ingenti aviditate evolvit. Ibi illud accidit memorabile, ut quæ res ejus in mathematica ſcientia profectus inſigniter remoratura credebatur, plurimum etiam hoc ipſo fine ei prodeſſet. Idem enim illi tum contigit, quod de HENRICO VALESIO, Viro inter *Gallos* Græcis Latiniſque literis inſtructiſſimo, in illius vita memoratur, eum ſcil. cum patrem haberet præparcum, & ipſe, adoleſcens minime pecunioſus, libros emere non poſſet, nonniſi commodatos legere conſueviſſe: de quibus dicere ſolebat, nullis ſe libris melius unquam fuiſſe uſum: hos enim a ſe exactiſſime evolvi & excerpi, ut quos paulo poſt reſtituendos nunquam in manus ſuas redituros eſſe noſſet. In his rei librariæ, quantum quidem ad mathematicam ſcientiam pertinet, anguſtiis conſtitutus, ſtrenue tamen, quoad res ferebat, propoſitum urſit: eo tunc emblemate uti ſolitus, quod obfirmatum ejus in eo, quod ſemel cœperat, ſtudiorum genere perſequendo animum; atque omnibus objectis difficultatibus reluctantem exprimeret. Repræſentabat autem illud PHAETHONTEM, PHOEBI patris ſui currui inſiſtentem, cum hac epigraphe: *INVITO PATRE SIDERA VERSO.* Adeo ſe opprimi non patitur concitatus ille naturæ impetus, non fruſtra certe a DEO animis noſtris infuſus, cui qui refragantur, ad nullum unquam excellentem in doctrina gradum, quaſi reflante vento, eluctari potuerunt: cum contra, qui curſum illum naturæ atque deſtinationem ad certum vitæ & doctrinæ genus quaſi manu ducentem ſecuti, id unum ſibi agendum cenſuerunt, cujus a naturæ autore DEO ingenitam ſibi facultatem deprehenderunt, tanquam ſecundo amne provecti, ad id quod in literis ſummum eſt, perveniſſe:

Digitized by Google

veniſſe obſerventur. Plane ut hac quoque parte, quæ ſunt Ciceronis verba, Naturam optimam ducem tanquam DEUM ſequi eique parere pulchrum ſit: cujus ut ſupremæ parentis imperio qui obtemperat, parentibus minus obediſſe argui non poteſt. Aut putatisne, *Auditores*, ex antiquis Ovidium, ex recentioribus Petrarcham & Casaubonum, illam in literis laudem fuiſſe conſecuturos, ſi parentum ſuorum vota ſecuti Juriſconſultorum ſcriptis atque triſtibus fori altercationibus, ad quæ illi nunquam ſine nauſea accedebant, quam humanioribus ſtudiis, ad quæ a natura facti erant, ſuas vigilias impendere maluiſſent?

Quanquam autem egregius adoleſcens illum mentis ardorem, quo ad Matheſin ferebatur, objectis ſibi impedimentis non remitteret, id tamen effecit neceſſariorum ſubſidiorum penuria, ut tum quidem ultra vulgaris Arithmeticæ, Geometriæ, & Aſtronomiæ cognitionem penetrare non poſſet. Quin imo quemadmodum illis, qui natalis terræ angulum nunquam ſunt egreſſi, ullas extra ſuum cœlum terras jacere vix ſit veriſimile: ſic ille, cui niſi tritos Mathematicorum libellos adhuc videre non contigerat, ignorabat etiam, eſſe alia longe præſtantiora, quæ a doctiſſimis Viris in illa doctrina & elucubrata jam eſſent, & aliorum induſtria eruderari poſſent. Dedit tamen jam in illis primæ adoleſcentiæ rudimentis quendam ex ſe perſpicaciſſimi ingenii fructum, excutiendo celebri Problemate chronologico de inveniendo anno Periodi Julianæ ex datis tribus cyclis, Solis, Lunæ, & Indictionum, quod occaſione propoſitionis ſecundæ, quæ in prima parte *Deliciarum Mathematicarum* Danielis Schwenteri extat, proprio marte octodecim annorum tyro feliciſſime reſolvit. Ea ergo ætate, præter Theologiam, cujus ſtudium nunquam depoſuit, Matheſeos tractatio præcipuam occupationum ejus partem faciebat: cui tamen, ut erat omnium doctrinarum ejus ingenium capax, humaniorum literarum, quæ in eleganti orationis conformatione conſiſtunt, ſtudium conjunxit; quibus eo cum profectu incubuit, ut, quæ laus non admodum ab iis expectatur, qui omnem ſuam induſtriam uni veritati indagandæ

addicunt, in utroque & ſolutæ & ligatæ orationis genere ea jamtum ediderit artis documenta, quæ ingenii acumine, verborum nitore, ſententiarum elegantia, etiam peritiſſimis illarum artium magiſtris potuerint ſatisfacere. Extant etiamnum, ut ſemel hac de re dicam, præter joculare illius carmen *Scarroneis* verſibus Gallica lingua, inſigni feſtivitate & rara in peregrino præſertim homine imitationis felicitate, conditum, cui ab argumento *Pomum Eridos* titulum fecit, alia ejus Latina carmina complura, quæ pro re nata magna cum ingenii & Poeticæ facultatis commendatione luſit. In Epigrammate cumprimis plane videbatur regnare, quod carminis genus tam concinna brevitate, tanta venuſtate, & acumine (quæ ſunt præcipuæ ejus carminis virtutes) tamque apte & argute ſciebat concludere, ut non minus poëtica hæc tam elegantis ingenii monumenta, quam illa mathematica, in doctorum hominum manus pervenire fuerit optandum.

Tam procul ille a quorundam male feriatorum opinione erat remotus, qui homine altioribus ſtudiis & veritatis præcipue indagationi operato orationis curam ut rem levem & nugatoriam indignam arbitrantur. Quanto rectius noſter cum CICERONE, illo bene & dicendi & ſentiendi magiſtro, utrumque officium conjungendum eſſe credidit? Eloqui enim copioſe, modo prudenter, melius eſſe ſtatuebat, quam vel acutiſſime ſine eloquentia cogitare: quod cogitatio in ſe ipſa vertatur; eloquentia complectatur eos, quibuſcum communitate juncti ſumus. Neque tamen hæc ſive mathematica ſive humanitatis ſtudia ita ſibi illum totum vindicarunt, quin theologicum quoque ex voluntate Patris, qui filium Miniſterio deſtinabat, ſemel cœptum magna cura urgeret, eo ſucceſſu, ut A. CIↃIↃCLXXVI, præmiſſo examine in eorum numerum reciperetur, quibus ſacrorum publice docendorum facultas conceditur: quo ille officio poſtea & apud nos, & *Genevæ* præcipue, tum & in *Lemovicenſi* illa commoratione ſua, concionibus ad populum habendis feliciter eſt defunctus. Et intra hæc quidem ſtudia, Theologiæ, Humaniorum literarum, & Matheſeos, ſuam ille induſtriam coercuit, ſed ita, ut

ut præcipuam tamen operæ ſuæ partem in poſtremo illo collocaret, in eoque uno ſtuderet excellere. Neque enim tam bene comparatum eſſe norat cum præſtantibus etiam ingeniis, ut ſi æquali diligentia plura ſtudia complectantur, ultra mediocritatem fere in ſingulis proficiant. Quando & ERATOSTHENEM ferunt, utut magno eſſet ingenio præditus, tamen quod, præter Geographiam, plurium quoque aliarum diſciplinarum cognitionem partitis ſtudiis ſectaretur, in omni literarum genere infra primos ſubſtitiſſe, eoque nomine βῆτα fuiſſe cognominatum.

Hæc ſtudiorum fundamenta poſtquam in patria poſuit, peregrinatione literaria linguarum & artium cognitionem locupletare conſtituit: hancque menſe Maio A. CIↃ IↃC LXXVI, bono cum DEO eſt ingreſſus, & *Genevam* primum appulſus, paulo poſt in ea urbe inſigne dexteritatis & judicii ſui ſpecimen edidit. Erat tum ſpectabili inter *Genevenſes* Mercatori, Domino A WALDKIRCH, filia ELISABETHA, quæ bonarum literarum capaci ingenio a natura inſtructa, calamitate aliqua jam inde a ſecundo poſt nativitatem menſe omnem oculorum uſum amiſerat. Hanc ille ſolerti & arguta quadam docendi ratione uſus non eo tantum perduxit, ut literas expedite pingere diſceret, ſed & Logicæ, Phyſicæ, & Hiſtoricæ artis ſcientiam non pœnitendam ſibi compararet. Poſt viginti menſium commorationem, *Geneva* relicta, totam fere *Galliam* perluſtravit. Accidit enim tum temporis, ut cum CLAUDIUS BLANCHERIUS *Marchio* LOSTANGIUS ex *Lemovicenſibus*, filio ſuo ephorum & præceptorem quæreret, noſter oblata ſibi ea conditione A. CIↃ IↃC LXXVIII per *Lugdunenſes*, & *Arvernos* facto itinere, *Nedam*, ejus Marchionis ſedem, peteret, in qua poſtquam per menſes tredecim Concionatoris & Informatoris officio eſt functus, continuata per *Lemovicenſes* & *Petrocorios* profectione, *Burdegalam* venit, cujus urbis amœnitate captus per ſemeſtre tempus, quo in ea ſubſtitit, præter converſationem, quam cum doctis ejus civitatis Viris, BAUDOVERO Mathematico, nec non RONDELETIO, GOYONIO, & SARRAVIO, qui tum in Reformatorum Eccleſia ſacra adminiſtrabant, frequentem habuit, Tabulas quoque Gnomoni-

cas univerſales, quæ inter defuncti ſchedas etiamnum ineditæ latent, magno ſtudio concinnavit: excurſionem quoque in viciniam *Regulam*, ubi tum *Aquitaniæ* Parlamentum jus dicebat, fecit. Hinc ſecundo *Garumna* in Oceanum delatus, *Aquitaniæ* litora & *Ream* inſulam prætervectus, *Rupellam* appulit, unde per *Nannetes*, & *Salmurium*, ubi Cel. CAPELLUM; hinc per *Aurelianum*, ubi PAJOTUM compellavit, *Lutetiam Pariſiorum* venit, in qua urbe poſtquam duorum menſium ſpatio quicquid vel in hominibus vel in ædificiis rebuſque aliis viſendum occurrebat, curioſis oculis perluſtraſſet, Patriæ & Parentum ex tanto intervallo iterum aſpiciendorum deſiderio impulſus, per *Franciæ Inſulam*, *Campaniam*, *Lotharingiam*, *Alſatiam*, ipſo Aſcenſionis die *Baſileam* intravit. Hujus ille itineris Gallici eum fructum tulit, ut illius Linguæ tam uberem tamque accuratam ſibi notitiam compararet, ut, quod de illo ipſorummet Gallorum judicium fuit, cum ipſis ejus linguæ magiſtris præſtantiſſimis de puritate & elegantia certare poſſet. Quo minus autem etiam in Matheſeos ſtudio inſignem aliquam ex ea profectione utilitatem caperet, duabus potiſſimum rationibus factum eſſe ſæpe amicis commemorare eſt ſolitus, nempe cum ætatis vitio, quæ rerum utilium incurioſa fere inania tantum ſectatur, & in iſtis peregrinationibus non a patria magis quam a ſemetipſa aberrare conſuevit: tum vero & opinionis quodam errore, quod ſolidas & vere ſic dictas ſcientias, ut in quibus hucuſque tam parum a ſe profici potuiſſe meminerat, ne dari quidem ullas exiſtimaret. Ex qua re illud eſt conſecutum, ut nec de compellandis viris doctis, ex quorum alloquio plurimum poterat proficere, nec de aliis uberioris ſcientiæ conſequendæ mediis multum ſolicitus eſſet.

Ex illo ergo Gallico itinere domum redux, ſuaſu amicorum Cel. MALEBRANCHII *Scrutinium veritatis* & CARTESII ſcripta tum primum cœpit evolvere, cujus ſcriptoris Methodum potius quam Principia approbabat. Hæc ei lectio ad id profuit, ut jam in Philoſophia ultra conſueta compendia ſapere inciperet. Dum in his eſt, Cometæ, qui per id tempus in cœlo formidandæ

dæ magnitudinis effulſit, occaſione, quendam ingenii luſum de futura ejus nova apparitione in publicum edidit: pauloque poſt A. cIↃ IↃCLXXXI m. Aprili ſecundo *Rheno* alteram in *Belgium* & *Angliam* profectionem inſtituit, certus, id quod priori itinere a ſe peccatum fuerat, in hoc emendare. Et in *Belgio* quidem *Amſtelodami* aliquanti temporis moram traxit, ibique ALEXANDRUM DE BIE, Matheſeos Profeſſorem, res mathematicas in gratiam nautarum vernacula lingua explicantem aliquoties audiit: ac per otium in vicinas urbes & provincias excurſionem fecit. Inprimis autem *Lugduno-Batavæ* Univerſitati penitius luſtrandæ aliquod tempus dedit, in qua Celeberrimis Viris, WITTICHIO, LE MOINE, Theologis: BOCKELMANNO JC. & WOLDERO Philoſopho innotuit. Et huic certe Belgicæ commorationi illud ſe debere ſæpe prædicabat, quod excuſſis, quibus hactenus immerſus erat, tenebris atque præjudiciis, ſanioris Philoſophiæ & demonſtrationum mathematicarum, quas a præſtantiſſimis ejus ſcientiæ magiſtris publice videbat exhiberi, dulcedine ineſcatus, ipſe quoque ad illorum exemplum ad altiorem aliquem doctrinæ gradum viam affectare cœpit. Ibi ergo Elementa *Euclidea* docuit prius quam didicit, ratus, id quod res eſt, & quod proverbio dicitur, docendo nos diſcere, eamque optimam eſſe proficiendi rationem, ſi, quæ ipſe jam primum didiceris, aliis diſcenda propines. Qua in re eadem ejus, quæ judicioſiſſimi cujuſdam apud nos Viri, ratio fuit, qui de ſe ipſo ſæpe commemorabat, accidiſſe ſibi aliquando, ut cum in Orientali quadam lingua, quam nec ipſe adhuc penitus cognitam habebat, diſcipulum erudiret, & non ipſe minus, quam diſcipulus faciebat, informationi ſe præparare haberet neceſſe, ipſe hunc ſingulis diebus nonniſi uno Grammatices ejus linguæ capite anteverteret. Sed ut ad noſtrum redeamus, hac ille tam aſſidua lectione, meditatione, doctorumque Virorum converſatione, præcipue autem quod *Carteſianam* Geometriam attentiſſimo ſtudio tum primum evolveret, tanta ad mathematicam ejus ſcientiam acceſſio eſt facta, ut brevi poſt tempore, volens aliquod profectuum ſuorum, quos in *Belgio* fecerat, ſpecimen publice

extare,

extare, primo quidem Conamen illud ſuum *de Cometarum motu* in Latinam linguam tranſlatum, multo quam prius auctius: poſtea etiam Tractatum *de Gravitate Ætheris*, Belgicis typis excuſos in publicum ediderit, qui libri, quemadmodum de HORTENSII ſcriptis memoriæ eſt proditum, tanquam PHIDIÆ ſigna ſimul aſpecti fuere & probati. Ergo, ut ſolent mutuis finibus & nexis quaſi veſtigiis labor atque gloria convenire, ſic ut unius finis alterius gradus efficiatur, ex illo ſcriptorum ſuorum tirocinio primus ei ad nomen inter Mathematicos ſui temporis comparandum aditus patuit: inprimis cum inde ab eo tempore *Diarium Eruditorum Pariſienſe*, & *Acta Lipſienſia* ſingulis annis obſervationibus ſuis locupletaret.

Poſtquam autem in literario illo Batavicarum Academiarum mercatu animum mathematica eruditione egregie inſtruxerat, & graviſſima ſcorbuti ægritudine fuerat defunctus, diſcendi aviditate provectus per præcipuas *Brabantiæ*, *Zeelandiæ*, *Flandriæ*que civitates, *Caletum* uſque continuato itinere in *Angliam* trajecit, in qua inſula Ill. BOYLIUM, ISAACUM VOSSIUM, ROBERTUM HOOKIUM, JUSTELLUM, STILLINGFLEETUM, BAXTERUM, GALIUM, alioſque Celeberrimos Viros, ſalutare non intermiſit. Inter alios compellavit ADRIANUM quoque BEVERLANDIUM, Virum ab impiis, quas etiam ſcriptis publice editis Orbi manifeſtas eſſe voluit, ſententiis quam eruditione ſua celebriorem: qui tunc ex Belgio relegatus in ISAACI VOSSII familia degebat. Non quod malæ frugis hominem vel tanti æſtimaret, ſed ut ex perſpecta bonorum malorumque, & eorum qui vere, quique ad ſpeciem tantum eruditi eſſent, indole, quæ nativa eſſet eruditionis facies, poſſet internoſcere: ſecutus in ea re exemplum prudentium familiæ patrum, qui, dicente PLINIO, pluribus ſæpe veris denariis adulterinum emunt, ut verus agnoſcatur. Ex *Anglia Hamburgum* eſt tranſvectus, unde brevi per *Germaniam* tranſitu in patriam A. CIↃ IↃC LXXXII rediit. Quanquam ne tum quidem prius ſibi ceſſandum exiſtimavit, quam bimeſtri itinere *Helvetiæ* pagos omnes in duorum amicorum, & inter eos dilectiſſimi Fratris mei, comitatu eſſet emenſus. Ex eo tempore

pore ſtabilem in patria pedem poſuit, & mathematica ſtudia, cum principia tam pulchre ipſi ſe dediſſent, majori etiam labore urgenda ſumſit: ad quorum amorem & diligentem tractationem ut popularium animos, hactenus in ea re ſegniores, excitaret, Collegium, quod vocant, experimentale Phyſico-Mechanicum publice aperuit, primuſque rerum harum pulcherrimarum in urbe noſtra vel autor vel evulgator extitit. Contigit tum, ut ab Eccleſia Reformata, quæ *Argentinæ* colligitur, opera ejus in Sacris Gallica & Germanica lingua ad populum docendis requireretur. Sed ille, infirmitatis ſuæ, ut aiebat, ſibi conſcius, eam conditionem reſpuit, profecturus contra *Heidelbergam*, ubi in docenda publice Matheſi vicarium ei Profeſſoris munus deſtinabatur, niſi matrimonio, quod amicorum & Parentis præcipue ſuaſu hoc ipſo Anno CIↃ IↃCLXXXIV iniit, in patria fuiſſet retentus. Hoc ipſi fœdus contractum eſt cum lectiſſima virgine JUDITHA, STUPANORUM celebrium Urbis noſtræ Medicorum, quorum etiamnum ſcripta leguntur, nepte & pronepte: e qua geminæ ſobolis, maſculæ & fœmineæ, pater eſt factus: quarum hæc in honeſto & felici Domini NICOLAI RYHINERI Mercatoris conjugio vivit: filius autem pictoriæ artis, ad quam diſcendam naturali quadam animi inclinatione ferebatur, *Auguſtæ Vindelicorum* etiamnum operam navat, & jam ea tirocinii ſui argumenta dedit, quæ præſtantem in futurum artificem urbi noſtræ pollicentur.

Hac matrimonii via cum jam plene in ſuam tutelam perveniſſet, decrevit, reliquis ſtudiis quibuſcunque quibus ſe non eſſe natum ſentiebat ſepoſitis, totum ſe dare Matheſeos ſcientiæ, famamque de ſe excitatam non tueri tantum, ſed majorem etiam ſibi aſtruere. Hoc loco, quando res ipſa id poſtulare videtur, profligandam mihi video illorum ſententiam, quæ defuncti exiſtimationi certe perquam eſt injurioſa, qui, quod ſæpe ex illis eſt auditum, univerſum hoc Cl. Viri interioris illius & abſtruſioris Matheſeos excolendæ inſtitutum, tanquam ſterile & in mera contemplatione poſitum, ex quo nulla in humanam ſocietatem commoda redundare poſſint, ſibi damnandum cenſuerunt.

 Cujus

Cujus ſuæ opinionis principem & anteſignanum habent ſane non levem, Socratem, qui, ut eſt apud Laertium, Geometriam non niſi modice diſcendam aiebat: eorum vero ſtudium, qui ad deſcriptiones uſque intellectu difficiles diſcendo progrederentur, penitus improbabat; quod diceret, non videre ſe quem uſum ea res habere poſſet: poſſe autem aiebat omnem hominis vitam occupare, & profectibus aliarum diſciplinarum plurimum officere. Sed hi quidem homines, qui cum preſſius urgentur, demonſtrationes totamque adeo rem mathematicam a ſe ne intelligi quidem, & algebraicos characteres tantum non pro magicis haberi confiteri coguntur, quemadmodum hanc ſuam ſententiam, quam de re ſibi incomperta tanto ſupercilio ferunt, contra omnium ſeculorum conſtantiſſimum conſenſum tueantur, ipſi viderint. Illud certe perſpicue falſum eſt, quod pro confeſſo ſibi ſumunt, nihil eſſe in ſtudiis laudandum, quod non idem ſit utile. Quod quidem ſi illis damus, jam artes illæ omnes e Rep. fuerint exterminandæ, quæ elegantiam magis quam hujus vitæ neceſſitatem utilitatemve in operibus ſuis conſectantur. Ipſa certe communis hominum vita, & commerciorum, quæ inter eos viget, ratio, abunde illos refellit, quæ non illis rebus cariſſimum pretium poſuit, quæ in quotidiano victu maximum uſum habent, ſed quæ vel raritate vel difficultate præ aliis vulgatioribus ſe commendant. Quæ ergo vel invidia vel inſcitia eſt, in ſcientiarum dijudicatione diverſam viam inſiſtere, & illarum tantum rerum cognitioni pretium ponere, quæ quidem uſum in hac vita inſignem, ceterum intelligentiam pervulgatam & in promtu poſitam habent; iis contra artibus, quæ res a vulgarium oculis remotas & reconditas eruunt, eo ſolo nomine dignitatem & æſtimationem omnem abrogare, quod illarum uſus non æque perſpectus eſt & diffuſus? Et profecto, ſi quod res eſt dicere volumus, in omnibus his a quibus Eruditi appellamur diſciplinis, ſi ea quæ ad vitam commodius & honeſtius degendam faciunt ab illis quæ præter curioſam contemplationem & ſcientiam nihil admodum continent ſejungimus, quam, DEUS bone! macilenta, & exucca, omniſque ornatus indiga

indiga tota hæc, cujus ſcientiam profitemur, Encyclopædia, tanquam mundo detracto mulier, omnium oculis apparebit. Sed nolo jam ego adverſus mathematicarum contemplationum contemtores iſta defenſione uti, ne id ſibi a me dari exiſtiment, quod eſt minime illis concedendum, nullum ex hoc ſtudii genere fructum in hac vita expectari poſſe. Niſi forte eam illi nullam eſſe utilitatem putant, ſi quis ſe ipſum & animum ſuum hujuſque facultates, rerum admirabilium, quas DEUS in natura non temere expreſſit, quamque inde exiſtere neceſſe eſt, bonitatis, prudentiæ & majeſtatis Divinæ cognitione inſtruere ſatagat. BERNOULLIUS certe noſter id ſe egiſſe in ſchedis ſuis confitetur, ut illis contemplationibus ſuis veſtigia ſapientiæ Creatoris ſui in illius operibus rimaretur. Neque vero tam ſterilis eſt Mathematicorum contemplatio, quin etiam ad civilem hanc vitam & cultiorem & inſtructiorem efficiendam plurima adminicula ſuppeditet. Enimvero ut illi qui humani corporis ſtructuram primi hominibus tradidiſſe contenti, medendi artem ipſi non exercuerunt, apud æquos & cordatos viros non minorem laudem invenerunt, minuſque humanæ ſocietati profuiſſe judicantur, quam qui traditam ab illis ſcientiam poſtea ad ſanandas ægritudines tranſtulerunt: Ita qui mathematicis contemplationibus unice ſunt dediti, quanquam ipſi ad mechanicam operationem, quam ut ingenuo homine indignam ipſi ex antiquis PLATO & ARCHIMEDES attingere nunquam voluerunt, non progrediuntur, tamen, cum curis ſuis atque vigiliis ea principia extruant, quæ aliis poſtea in rerum humano generi utiliſſimarum inventione perfectioneve mirifice ſubſerviunt, nemo Mathematicorum illas vigilias jure infructuoſas dixerit. Plane ſi quæ Geographicæ, Nauticæ, aliarumque artium incrementa ſperari poſſunt, mathematicæ diſciplinæ, ut quarum illæ nonniſi quædam quaſi propagines exiſtunt, in ſubſidium veniant neceſſe fuerit. Sed ad id, unde juſta me *Bernoullianorum* ſtudiorum defenſio abduxit, tempus eſt ut revertar.

Tunc ergo ut urgeret propoſitum, & in Matheſeos ſtudio aliquid excellens efficeret, autores omnes una cum *Fratre*, cui

prius Matheſeos principia magna fide & egregio cum ſucceſſu impertierat, legere, & inter legendum aliis explicare inſtituit: ad quod ſtudium cum perpetua quædam meditatio accederet, paulo poſt ipſa interioris Geometriæ adyta, ſua ipſe opera, nullius præceptoris induſtria adjutus, vere αὐτοδίδακτος, ſibi recluſit, ac præſtantiſſima tam veterum quam recentiorum inventa plana perſpectaque reddidit. Fuit autem hæc illius laus plane ſingularis, quod cum plurimi ante ipſum Geometræ ea quæ a majoribus tradita erant edidiciſſe contenti nihil ex ſe laudandum promere ſatagerent, aut, ſi quando ambitione compulſi ad ſcribendum accederent, aliorum inventa in ſuos libros exſcripta in ſe transferrent, Phorcydum ſororum imitatores, quæ, ut eſt in fabula, cum non niſi unum, ſed exemtilem, oculum haberent, eo invicem utebantur: Ipſe bonum patremſamilias agere maluit, fecitque ampliora quæ accepit; ut mathematicæ ſupellectilis ab anteceſſoribus ad eum tranſmiſſa hæreditas major ab ipſo ad poſteros tranſiret. Inprimis autem ut magni operis, ita magnæ & eximiæ laudis fuit illa noſtri induſtria, quam cum ingenioſiſſimo *Fratre* poſuit in indagando Calculo, quem vocant, differentialium & integralium: in quem a Celeberrimo Leibnitio primum inventum, & in *Actis Eruditorum Lipſienſibus* * non niſi tecte & quaſi per ænigma in mathematici cujuſdam problematis reſolutione allegatum, non prius inquirere deſtitit, quam optato fine potiretur: cujus ille primum ſpecimen exhibuit in iiſdem *Actis* menſe Maio CIƆIƆCXC ſolutione Problematis, quod a Cel. Leibnitio de invenienda linea deſcenſus æquabilis olim fuerat propoſitum. Hancque ejus dexteritatem mirifice ſibi probari teſtatus eſt Leibnitius †: hoc addito corollario, analyſin illam ſui Problematis eruere utique non fuiſſe cujuſvis, nec quenquam ſibi eſſe notum, qui melius quam Bernoullius mentem ſuam penetraverit. Quibus gemina ſunt ea præconia, quæ ille idem ingenioſiſſimis Fratribus etiam poſtea impertiit: cujuſmodi illud eſt, quod non dubitare ſe ait,

* Menſ. Octobr. 1684.

† Menſ. Jul. 1684.

Digitized by Google

ait, * ipſos aliqua detecturos, ad quæ pervenire ſibi ipſi difficile eſſet futurum, ** & ad ea jam illos perveniſſe in Calculo differentiali, quæ HUGENIUS per jocum hypertranſcendentia appellabat: † denique effeciſſe illos, ut jam non ipſorum minus quam ſuus ille calculus eſſe videatur. Et hoc quidem tam egregio invento non minus exultavit BERNOULLIUS noſter quam ARCHIMEDES olim, qui cum ex balnei menſura furtum in corona per fraudulentam argenti ad aurum admiſtionem deprehendiſſet, e balneo proſiliens ſuum illud εὕρηκα alta voce ingeminavit. Nec profecto injuria: quippe cum hujus methodi beneficio novas ſubinde regulas novaque principia extrueret, & quæſtiones plurimas, quas ne tentare quidem alii ſuſtinuiſſent, feliciter reſolveret; alia vero tantum inchoata ab aliis perpoliret, abſolveret, & ad ſummum perduceret.

Dum in his eſt, DEUS ipſe, tam egregiis ejus laboribus præmium conſtituens, theatrum ei aperuit, in quo induſtriam ſuam publice exercere poſſet. Mortuo enim Cl. Viro PETRO MEGERLINO JCto, Mathematico, & Hiſtorico eximio, ſcriptis quoque editis celebri, cum in Mathematica Profeſſione ſucceſſor ei deſideraretur, nemo illi provinciæ cum laude ſuſtinendæ viſus eſt magis idoneus quam noſter, ut qui ſuæ in hac ſcientia eruditionis teſtem univerſum Orbem literatum allegare poterat. Ergo Matheſeos Profeſſor d. xv Febr. An. CIↃ IↃC LXXXVII conſpirantibus in unum ſuffragiis electus, Dignitates quidem Academicas, Rectoris ſemel, Decani vero Philoſophici tertium magna cum induſtriæ atque dexteritatis commendatione adminiſtravit. In iis vero, quæ ad ornandam provinciam, quam acceperat, proprie pertinebant, id omne quod a Profeſſore publico requiritur, cumulatiſſime præſtitit. Namque & publica & domeſtica informatione tam diligentem tamque utilem ſtudioſis operam navavit, ut exteri quoque non pauci hujus Viri fama ſuis ſedibus exciti ad illum convolarent. Poſſem nominare complures, qui hodienum in celeberrimis *Germaniæ* Academiis

* Menſ. *Sept.* 1691. ** Menſ. *Jul.* 1695. † Menſ. *Maio* 1697.

ex eo hauſtam ſcientiam cum laude publice profitentur, & in alios transfundunt. Et fuit profecto in illo peculiaris ad docendum aptitudo, atque tanta, ut difficillima quæque & impeditiſſima Auditoribus ſuis ea docendi facilitate propinare noſſet, ut neſcirent fere, per ludumne aut ſomnum, an ſerio ſtudio iſta didiciſſent. In publicis vero, quas ſubinde in gratiam ſtudioſorum repræſentabat, diſputationibus, argumentum deligebat non de trivio ſumtum, ſed ex recondita Matheſi depromtum: in eoque defendendo, ſtudioſæ juventuti, quoties eam vel in argumentando aberrare, vel in percipiendo hæſitare animadvertebat, mira perſpicuitate atque dexteritate expeditiſſimam eluctandi viam quaſi digito commonſtrabat. Quodcunque autem a publicis occupationibus ſupervacuum erat temporis, Geometriæ novis acceſſionibus & inventis locupletandæ impendit: cujus rei fidem faciunt præter illas, quæ in defuncti ſcriniis adhuc ineditæ jacent, lucubrationes, variæ illæ obſervationes, quas cum *Actis Eruditorum Lipſienſibus*, tum & *Diario Gallico* inſertas Orbis eruditus cum admiratione legit.

Hac tam recondita & tot in publicum editis præclari ingenii monumentis declarata eruditione magno omnium doctorum conſenſu inter principes ſuæ ætatis Mathematicos adnumerari meruit, factumque, ut longe jam pervulgata ejus fama magnorum non in literis tantum, ſed etiam in præcipuis Principum miniſteriis Virorum literis fuerit compellatus: quos inter facile primas tenent Viri non natalium magis quam eruditionis dignitate ſpectatiſſimi, Illuſtriſſimus Dominus ROGERUS BRULARTUS *Marchio* DE PUYSIEULX ET SILLERI, &c. &c. Magni *Galliarum* REGIS ad *Helvetios* Legatus Excellentiſſimus: tum & Illuſtr. Dominus GUILIELMUS HOSPITALIUS, Eques & *Marchio* S. MESMII ET MONTELERII, qui in præfatione ejus libri, cui *Analyſeos quantitatum infinite parvarum* titulum fecit, BERNOULLIIS Fratribus omnem ſe mathematicæ ſuæ ſupellectilis ſubſtantiam debere ingenue profitetur. Cum his paria in amore defuncti faciebant Nobiliſſimus NICOLAUS FATIO DUILLIERIUS, Regiæ Anglorum Societati jamdudum aſcriptus:

Ampliſ-

Ampliſſimus item GOTHOFREDUS GULIELMUS LEIBNITIUS, Sereniſſ. Electoris *Brunſvicenſis* Conſiliarius Status, Regiæ Societatis Boruſſicæ Præſes, Vir in tantum laudandus, in quantum virtus & eruditio poſſunt intelligi, ut cujus in omni literarum genere, Jurisprudentia, Hiſtoria, & Matheſi, ubique ſibi parem, hoc eſt, excellentem doctrinam noſtra hæc ætas prædicat & futura admirabitur. Nec non Celeberrimi Viri, PETRUS VARIGNONIUS, Regiæ Scientiarum Academiæ Socius, Matheſeos in Collegio apud *Pariſienſes* Mazarineo: OTTO item MENKENIUS, & CHRISTOPHORUS PFAUTZIUS, *Lipſienſes* Profeſſores meritiſſimi. Quanquam autem vel una hæc tam illuſtrium nominum commemoratio abunde demonſtrat, quantam in eo doctrinæ amplitudinem repoſitam fuiſſe oporteat, qui tantorum Virorum gratiam & amicitiam potuerit promereri, ingens tamen ad ejus dignitatem cumulus acceſſit, honorificentiſſimo Pariſienſis & Boruſſicæ Academiæ teſtimonio, a quibus ille inter primos in Sociorum numerum eſt relatus. Plerique enim noſtis, Auditores, de conſtituendis Regiis in *Gallia* & *Boruſſia* Scientiarum Academiis non prius, quam de BERNOULLIO noſtro in eas cooptando fuiſſe cogitatum: cujus rei abunde fidem faciunt ea diplomata *, quibus illi verbis quam fieri potuit honorificentiſſimis ea dignitas eſt oblata. Quo loco illud non eſt prætereundum, quod vel inprimis Pariſienſis Academiæ eximiam de hujus Viri doctrina exiſtimationem declarat, quod illa defuncti memoriam ſolenni ritu in publico Societatis conventu hujus ipſius menſis die XIV, parentali oratione, ſingulari nec promiſcue omnibus tribui ſolito honoris genere, proſecuta eſt.

Ad hanc tam eximiam rerum mathematicarum cognitionem indeque conſecutam nominis celebritatem quibus ille adminiculis pervenerit, operæ pretium eſt cognoſcere. Fuit autem in illo, quod ad egregios in unaquaque arte faciendos progreſſus plurimum valet, naturalis quædam ad Matheſeos ſtudium inclinatio:

* *Quorum Pariſienſe exaratum eſt d.* 1 April. 1699, *Berolinenſe d.* 11 Julii 1701.

natio : cui ſuffragabantur eximiæ & plane ſingulares animi dotes, quæ cum etiam ſingulæ in uno homine deprehenſæ magnam laudem merentur, in eo reperiebantur univerſæ. Erat enim in illo judicium rectum & ſolidum, quo vera a falſis, &, quæ adumbratam tantum ſpeciem habebant, a rebus ſolidis accurate ſciebat internoſcere. Illi gemina erat vis ingenii peracris, non ea quidem, quæ celeriter res objectas comprehenderet & continuo ſine meditatione in rei naturam penetraret; ſed qualem CATONIS Majoris deſcribit PLUTARCHUS, quem ad percipiendum fuiſſe tardum, ſed ea quæ ſemel percepiſſet, nunquam oblivioni tradidiſſe & egregie in ſuos uſus convertiſſe ſcribit. Quanquam illa percipiendi difficultas, non tam naturæ cuidam vitio, quam ſingulari ejus accurationi videtur tribuenda; ut qui externam rei ſuperficiem noſſe non contentus (in quod fere vitium illa in percipiendo, ut ſic dicam, tam rapacia ingenia ſolent incidere) ipſa rei viſcera & medullam introſpicere, nihilque, quod ad certam atque plenam rei cognitionem quicquam poſſet conducere, incompertum & inexploratum relinquebat. At poſtquam ille rerum notiones ſemel animo impreſſas habebat, nunquam illas ſibi iterum elabi, ſed nec otioſas apud ſe deliteſcere patiebatur, iiſque continuo verſandis & inter ſe comparandis, eas vel perficiebat, vel novas ipſe ex ſe promebat. Accedebat enim ad naturales illas animi dotes ſtudium quoddam ſingulare, quod amore Matheſeos ſuccenſum nunquam illum ſinebat quieſcere, priuſquam propoſitum ſibi finem, in quo ſe poſtea mirifice oblectabat, eſſet aſſecutus. Erat autem in meditatione tam aſſiduus, ut ſemper fere cogitabundus conſpiceretur, ſæpeque ei amicis inter ſe colloquentibus aſſiſtenti accideret, ut poſt longam illorum diſſertationem, quid inter illos actum eſſet, requireret. Quale quid cum aliis ſummis viris, tum ARCHIMEDI quoque, cujus premebat veſtigia, ſæpenumero uſu veniſſe traditur, ut figuris ſuis intentus, quia corporis cultum intermittebat, a miniſtris ad ungendum abſtraheretur, & ne tum quidem ab opere ſuo quicquam remittens per corporis unguenta; figuras & lineamenta digito deſcriberet. Quanquam autem

id

id ſtudium longa aſſuetudine jam in mores tranſierat, alebatur tamen inſigniter honeſta quadam ambitione, quæ ipſum, ut magnorum illorum ætatis ſuæ Mathematicorum doctrinam atque celebritatem æmularetur, impellebat, plane ut, quod de tibicinibus tradit PLUTARCHUS, eos cum in Liberalibus olim ſinguli artis ſuæ ſpecimen ederent, remiſſe & oſcitanter id feciſſe; orta autem cum aliis concertatione, accuratius longe concentum inſtruxiſſe: idem de noſtro affirmari queat, illum ſcilicet cum Clariſſimis Viris, tandem etiam cum ingenioſiſſimo *Fratre*, orta ſtudiorum contentione & doctrinæ æmulatione, ſe ipſum quodammodo ſuperaſſe. Quare tam excellentibus ingenii dotibus cum indefeſſo ſtudio & perpetua quadam meditatione conjunctis, non eſt mirum, ſi nihil unquam ejus ſe animo tam intricatum obtulit, quod non iſtis adminiculis adjutus feliciſſime ſuperaret. Hoc idem tamen tam verſatile ingenium, ne quid diſſimulem, ſi quando ad tractanda quædam impediti operis negotia in vita accederet, ſæpenumero hæſitare, nec viam, qua ſe facile explicaret, invenire deprehendebatur: quod ei cum multis præſtantiſſimis viris fuit commune. Et quid mirum, in hac civili vita, cum pleraque non tam ad rationis normam quam obliquis quibuſdam viis ab hominibus gerantur, ſæpenumero ceſpitare eos, qui, prout rationis artem ipſi profitentur, ita ad hujus ductum actiones ſuas omnes ſibi conformandas arbitrantur? His ingenii dotibus ingentem conciliabat elegantiam eximia eloquendi facultas, quam ille præter exercitationem inde a juventute ſemper continuatam, diligenti præcipue earum rerum, quæ dicendæ erant, meditatione comparavit. Ut vel ejus exemplo verum eſſe comprobetur illud FLACCI, dicentis, bene ſapere & ſentire principium eſſe & fontem bene dicendi.

Quanquam autem ea, quæ adhuc commemoravi, naturæ & induſtriæ bona magnam in ſe habent commendationem, tanto tamen illa majoris haberi merentur, quod nimia illorum æſtimatio modeſtiam ejus nunquam potuit expugnare. Enimvero uti negari non poteſt, illum honeſta quadam ambitione, ſine qua nemo unquam magnum in doctrina gradum fecit, impulſum, & lau-

dem quæſiſſe inter doctos, & quæſitam non facile paſſum ſibi eripi: ita rurſus, nec de aliis illum contemtim, nec de ſe nimis liberaliter ſenſiſſe aut dixiſſe, illi quam optime poſſunt teſtificari, qui cum eo familiarius conſueverunt. Ipſe memini, aliquando illum mihi dicere, quo magis in mathematicarum rerum contemplatione proficeret, tanto magis omnis humanæ cognitionis, quantacunque illa eſſet, imperfectionem a ſe penitius introſpici. Quod cum diceret, idem illud ei videbatur contigiſſe, quod Menedemus illis dicebat uſu venire, qui diſcendi gratia *Athenas* ventitabant: hos nempe primo quoque tempore fuiſſe ſapientes, deinde ſtudioſos ſapientiæ, mox rhetoras, tandem procedente tempore rerum omnium evaſiſſe ignaros. Et huic modeſtiæ fuit tribuendum, quod ab omni quorundam ſtolide eruditorum inepta arrogantia remotus, in conſuetudine & colloquio non moroſum ſe aut difficilem, ſed humanum, atque omnium, qui eum requirerent, uſibus expoſitum præbuit. In primis autem cum Collegis ſuis amice vixit, & concordiæ, ſi quis alius, vel colendæ, vel, ſi qua illam labefactatam crederet, reſarciendæ erat ſtudioſus. Sed & cum aliis ſemel contractam amicitiam religioſe ſervabat; quam tamen non cum omnibus promiſcue, ſed cum delectis tantum Viris arctiorem ſibi contrahendam exiſtimavit. In hoc numero erant præcipui triga Clariſſimorum hujus Academiæ procerum, Magnificus Acad. Rector, D. Samuel Werenfelsius, Theologus; D. Jacobus Burcardus, Juriſconſultus; D. Nicolaus Eglingerus, Medicus. Nec minus ipſi veracitatis & ingenuitatis ſtudium fuit, adeo ut tacere mallet, aut diſerte negare, quam id dicere aut promittere, cujus ipſum poſtea pœnitere ac pudere poſſet. Inprimis averſabatur illam hominum peſtem, qui aliis, & frequentius malis quam bonis, turpiter aſſentantur. In frequentando Divino cultu, quantum per valetudinem poterat, frequens erat & attentus, & quantum a ſuperſtitione, tantum a profano illorum ſtudio, qui de DEO rebusque Divinis contemtim ſentiunt aut loquuntur, æque remotus. Poſſem in hanc rem plura commemorare, quæ defuncti memoriam commendabilem poſſent red-

reddere. Sed nolo, quod eſt multorum inſtitutum, vel ea, quæ mediocria in illo fuerunt, verbis extollere, vel etiam falſas laudes ei attruere. Hoc illi faciant, qui in ſterili argumento occupati, nihil admodum in eo, cujus vitam in literas mittere inſtituerunt, laude dignum inveniunt. Mihi ſatis fuerit, procul amore & odio, ea de defuncto dixiſſe, quæ bono jure in eum potuiſſe conferri, cum vos ipſos, *Auditores*, tum univerſum literatum Orbem teſtes allegare poſſum. Tantum certe & ab ingenuitate defuncti & ab inſtituto meo abeſt, ut vel in virtutibus ejus exaggerandis, vel vitiis, quibus cum omnis hominum vita tum ſumma quoque ingenia infeſtantur, diſſimulandis atque oratorio fuco obliniendis multum mihi exiſtimem laborandum, ut imo, ſecutus autoritatem defuncti, qui peccatorum ſe, & graviſſimorum quidem peccatorum reum ultro agnoſcebat & profitebatur, ego hanc ipſam ejus tam infucatam confeſſionem in præcipuis illius laudibus collocem. Si qui vero ſunt, qui morbo quodam animi magis quam judicio impulſi memoriæ defuncti obtrectare, & illius nævos exagitare pertendunt, eorum nos procacitatem tum demum patienter ferre incipiemus, poſtquam & eruditionem & ceteras illius virtutes ſuis ipſi ſtudiis moribusque expreſſerint. Tantiſper vero dum ab iis quam longiſſime ſunt remoti, retracta in pectus ea manticæ parte, quæ a tergo eſt, in ſuis ipſos vitiis, quibus longe gravioribus urgentur, meditandis atque e vita eluendis potius, quam in alienis exagitandis, curioſos eſſe jubemus.

Sed vocat me narrationis ordo, ut noviſſima vitæ illius momenta deſcribam. Corpus obtigerat noſtro a natura firmum & compactum, ſed quod cum peregrinationibus, quas in juventute moleſtiſſimas inſtituit, tum præcipue lucubrationibus ſuis & pertinaci meditandi aſſuetudine debilitatum, jam inde ab aliquot annis labem facere cœpit. Primum hoſtem expertus eſt podagram, quæ initio tolerabilis, temporis progreſſu vehementior extitit, & non doloris tantum exquiſitiſſimi ſenſu, ſed duratione etiam, nec uno tantum, ſed ſæpius per annum repetito incurſu, tanta in eum atrocitate deſæviit, ut ex ea contracta in-

Digitized by Google

firmitas, pedum illi uſum difficilem & impeditum reddiderit. Eadem vero poſtea ad ſuperiora penetrans manuum quoque ligamenta penitiſſime inſedit, & durabili vexatione fere patientiam ejus expugnavit. Sed erat hæc non niſi velitaris pugna, & per hæc rudimenta DEUS illum gravioribus tanto majore cum patientia ſubeundis, & per hanc viam æternitati denique præparabat. Etenim ex hoc tam frequenti morborum inſultu, qui fere ſine ceſſatione modo hanc, modo illam corporis partem lancinabant, languor quidam & cachexia totius corporis illum invaſit, quæ cum nullo medicamentorum aut fomentorum genere, quibus aſſidue ſollicita uxor eum recreare moliebatur, expugnari poſſet, hectica febris non obſcuris ſignis, tuſſi præcipue & conſpicua corporis emaciatione, cœpit ſe prodere; qua cum penitus proſtratæ eſſent illius vires, & jam ſibi ipſi, nedum aliis functionibus, quas hucuſque non ſegniter obierat, ſuſtinendis, non eſſet, tandem lecto eſt affixus. Hic vero ille demum vere ſe Philoſophum, &, quod rei caput eſt, Chriſtianum exhibuit, ut profecto tanti fuerit tam graviter ægrotaſſe. Zenonem memorant, quum nuntium accepiſſet de navi, quam ille mercibus onuſtam expectabat, mari ſubmerſa, exclamaſſe: Quam bene, o Fortuna, mecum decidis, quæ me ad pallium atque Philoſophiam compellis. Exiſtimate, *Auditores*, BERNOULLIUM vos loquentem audire, non illa quidem Zenonis, ſed Davidis verba: Quam utile mihi eſt, o DEUS, quod me deprimis, ut diſcam decreta tua. Habuit profecto poſtremus illius morbus ampliſſimum campum, in quo conſtantiam, fidem, & patientiam ſuam exerceret. Et conſtantiam quidem cum dico, non eam intelligo obſtinatam animi duritiem atque temeritatem, qua multi, quorum animis callum obduxit peccandi aſſuetudo, nullo peccatorum ſenſu, nulla æternitatis cogitatione perculſi, mortem inſtantem vel contemnunt vel contemnere volunt exiſtimari: a qua tantum abfuit noſter, ut, quamprimum lecto affixus decretorium illum diem, & in eo vitæ a ſe actæ reddendam eſſe DEO rationem cogitaret, in ſe ipſum continuo deſcenderet, &, ut illud Divinum examen ſuo ipſe anteverteret, ſeque & facta

facta ſua diligenter excuteret. Quæ cogitatio adeo animum ejus dejecit & proſtravit, ut hinc præteritorum conſcientia, inde futurorum metu, in anguſtias compulſus, & indignum ſe profiteretur DEI miſericordia, & eandem tamen, ut peccatorum ſuorum memoriam oblimaret, enixiſſimis precibus imploraret. Neque tamen de ſtatu paſſus ſe dejici, in memoriam ſibi revocavit CHRISTI meritum, in eoque uno poſita fiducia certiſſimum in ærumnis ſuis ſolatium reperit, id unum ſubinde profeſſus ſe metuere, ne forte ſinceritas ac certitudo ſuæ fidei DEO ſuo minus ſatisfaceret. Hac ſpe & interna Spiritus Sancti teſtificatione, quæ illum Divinæ gratiæ reddebat ſecurum, erectus, de doloribus ſuis non admodum conquerebatur, ſed quicquid in iis erat durum patientia ſibi lene & tolerabile efficiebat. Quoties ergo de imminente morte differebat, ea id faciebat animi conſtantia, non ut de vita ad ſepulchrum, ſed de domo in domum migraturus videretur. Jamdudum enim omnem recuperandæ ſalutis ſpem abjecerat, & id unum agebat, ut & familiæ ſuæ poſt mortem proſpiceret, & animum capeſſendæ æternitati præpararet. Hoc fine poſt tutores uxori & filio deſignatos, quibus etiam, quid de libris & manuſcriptis ſuis fieri vellet, aperuit, totus in precibus & piis meditationibus erat, nec admittebat officioſa quorundam amicorum ſolatia, qui nonnunquam vitæ ipſi ſpem facere nitebantur. Hunc ejus animum certamque mortis expectationem illud inter alia declarat, quod a Cl. FAYO noſtro, quo ille familiariter eſt uſus, mihi narratum hoc loco commemorare non pigebit. Is jam olim librum aliquem Theologici argumenti a NAUDÆO conſcriptum a BERNOULLIO acceperat utendum: quem cum illi poſt aliquod intervallum, addita ſcriptoris commendatione, reſtitueret, affirmavit BERNOULLIUS, certo ſe ante mortem librum FAYO eſſe donaturum. Id cum ille per jocum ab eo dictum eſſe exiſtimaret, quod BERNOULLIUS ſatis firma tum valetudine utebatur, factum, ut ille triduo ante mortem eum inviſeret. Ibi ægrotus, repetita promiſſionis commemoratione, FAYO nil tale cogitanti: Jam, inquit, inſtat illud tempus, quod, ut promiſſo me

meo exſolvam, monet: & cum dicto librum ei tradidit. Eodem tempore de ſepulchro ſibi procurando cogitabat, quod cum ab amico ultro oblatum gratanter accepiſſet, ſaxo lineam Spiralem Logarithmicam circulo incluſam inſculpi juſſit, cum hac epigraphe, *EADEM MUTATA RESURGO*: Archimedis exemplum imitatus, qui, ut eſt apud Plutarchum, ſepulchro ſuo cylindrum ſphæra comprehenſum ab amicis imponi voluit, tanquam id geometricarum vigiliarum & inventionum ſuarum palmarium eſſet. Sic & noſtrum probabile eſt ea inſcriptione ad inſignes ejus curvæ proprietates voluiſſe alludere, quas in illa comprehendi ipſe primus invenerat. Eam namque lineam, ut ipſiuſmet defuncti verbis * utar, non modo ſui evolutione ſe ipſam deſcribere, ſed & infinitis aliis modis ex ſe ipſa generari eam poſſe, primus deprehenderat, & ita quidem, ut perpetuo non tantum ſimiles, vel ejuſdem ſpeciei curvæ prodeant, ſed prorſus eædem, & poſitione tantum diverſæ, taleſque quæ ſibi ſuperimpoſitæ plane congruant. Ob quas cauſas etiam Spiram illam mirabilem appellare ſolebat. Præcipue autem ille hoc ſymbolo certam futuræ reſurrectionis fiduciam pari pietate & elegantia expreſſit. Tandem curis omnibus defunctus, exhauſtis corporis viribus, cum dolores alimentum jam nullum reperirent, in una æternitatis cogitatione defixus, die XVI Auguſti, paulo poſt quintam matutinam, animam DEO Creatori reddidit, annum quinquageſimum, menſibus ſeptem & quod excurrit, vivendo prætergreſſus. Mortem dicerem præmaturam; ſed illa quantumvis diu dilata ſemper ejuſmodi apparitura fuerat illis, qui ſtudia literarum earumque anteſignanos optarent perennare. Funus tertio ab hoc die elatum eſt, deducente Academia, & in æde Franciſcanorum, in qua ſibi ſepulchrum delegerat, depoſitum, funebrem concionem habente Rev. & Clariſſimo Viro, Domino Joh. Rodolfo Wetstenio, Eccleſiæ Leonhardinæ Diacono fideliſſimo.

Et hæc quidem mors corporis nobis uſuram abſtulit. Ne vero

* In *Actis Erud. Lipſ.* m. Maii 1692.

Digitized by Google

vero totus nobis noſtriſque uſibus periret, ipſe ſibi ætatis ſpatium ampliavit, atque præclaris ingenii monumentis eam ſibi vitam comparavit, quam nulla unquam temporum diuturnitas poterit abolere. Etenim, præter Tabulas Gnomonicas *Burdegalæ* olim ab eo concinnatas, nec niſi typographi operam deſiderantes, edidit in Batavica peregrinatione *Conamen novi ſyſtematis Cometarum*, & *Diſſertationem de gravitate ætheris*: publicis vero Diſſertationibus, quas in Academia noſtra propoſuit, præter alia argumenta juſtum quoque *De Seriebus infinitis* tractatum edidit. His acceſſerunt eruditiſſimæ illæ obſervationes, quibus *Diarium Pariſienſe* & *Acta Eruditorum Lipſienſia* illuſtravit, ex quibus ſunt, præter alias complures, Examen modi ponderandi aeris per veſicam, in qua commiſſum ante ſe a viris doctis paralogiſmum ingenioſe oſtendit, aliam vero aeris ponderandi rationem longe accuratiorem ipſe ſubſtituit, Societati Anglicanæ ſummopere probatam: Modus, quo Matheſeos ſcientia cæcis propinari poſſit: Examen machinæ urinatoriæ Borellianæ, nec non perpetui mobilis Pariſiis publicati: Nova ratio metiendi nubium altitudines: Solutio algebraica problematis illuſtris de quadriſectione trianguli ſcaleni per duas normales rectas: Animadverſio in Geometriam *Carteſianam*, & conſtructio quorundam problematum hyperſolidorum: Ratio inveniendi cujusque plani declinationem ex unica obſervatione projectæ a ſtylo umbræ; quod eſt præcipuum in Gnomonicis inventum: Vera conſtructio geometricorum problematum ſolidorum & hyperſolidorum per lineas rectas & circulum, quam ante illum tentarunt plures, ſed nemo præſtare potuit: Analyſis problematis de inventione lineæ deſcenſus æquabilis; quod primum inventi a ſe Calculi differentialis ſpecimen fuiſſe diximus: Demonſtratio oſcillationis ex doctrina vectis: De curvatura veli, quam ille primus eruit, & regulas ad nauticam perficiendam utiliſſimas conſtruxit: Obſervationes circa lineas cycloidales, evolutas, ant-evolutas, cauſticas, anti-cauſticas, pericauſticas, deque earum uſu & ſimplice relatione ad ſe invicem, deque Spira mirabili: Solutio problematis de minimo crepuſculo: Explicatio naturæ oſculorum, & defini-

definitio celeritatis navium, cui ſubjungit regulas pro ſupputandis corporum in fluido motorum reſiſtentiis: De curvatura laminæ elaſticæ, ejuſque identitate cum curvatura lintei a pondere incluſi fluidi expanſi: De curva acceſſus & receſſus æquabilis ad punctum datum, mediante rectificatione curvæ elaſticæ; quam lineam magno LEIBNITIO tantopere deſideratam ſolus reperit: De methodo tangentium inverſa: Conſtructio generalis omnium curvarum tranſcendentium ope ſimplicioris tractoriæ & logarithmicæ: Complanatio ſuperficierum conoidalium & ſphæroidicarum; & quis omnes fœcundiſſimi ingenii lucubrationes enumeret? Eidem debemus editionem Geometriæ *Carteſianæ* magna accuratione ab illo procuratam, quam & notis quibuſdam tumultuariis in ipſa operis recenſione ei ſubnatis ſubinde locupletavit. Cœpit etiam aliquot ante obitum annis commentari; quem commentarium etiam ad umbilicum fere perduxit, *De Arte conjectandi*, in qua ratiocinia, ab aleæ ludo tranſlata, ad moralia, civilia, & œconomica negotia applicare docet, ſoluto eum in finem ſingulari quodam problemate, quod & utilitatis amplitudine & inventionis difficultate ipſi circuli tetragoniſmo, ut qui, ſi vel maxime tandem inveniretur, exigui uſus futurus eſſet, longe anteponit.

Habetis, *Auditores*, brevem, ſed fidelem, Cl. BERNOULLII, heu! quondam veſtri, vitæ mortisque hiſtoriam; Viri, cujus memoriæ univerſus quacunque patet eruditus Orbis aſſurgit, & aſſurget tamdiu, quandiu literis apud condignos rerum æſtimatores ſuus honos conſtabit, cuique noſtra cumprimis Academia veras lacrymas debet. Ea enim ſunt merita BERNOULLII noſtri, ut, quemadmodum de ſe prædicabat AUGUSTUS, *Romam* ſe auream relinquere, quam lateritiam accepiſſet: ſic illi ea laus omni jure ſit tribuenda, Geometriam, quam pauperculam invenerat, multis ab ipſo inventis atque obſervationibus locupletatam relictam fuiſſe. Nos inprimis amiſimus ejus morte Virum non e multis unum, ſed cui inde a condita hac Univerſitate in re mathematica nominis celebritate & inventorum gloria parem non habuimus, quique ab Academica, quam apud nos ſuſtinuit,

digni-

Digitized by Google

dignitate tantum decoris neutiquam accepit, quantum ipſe in eam contulit. Amiſimus, inquam, Mathematicum, non *Helvetiæ* noſtræ tantum, ſed univerſæ Europæ, unum e præcipuis: in cujus laudibus illa fuit una de minimis, quæ vel ſola in aliis aut unica eſt aut ſumma, quod diſputator fuit ſubtilis idemque perſpicuus, præceptor fidus & induſtrius, Poeta ſuavis & ingenioſus, Orator copioſus & eloquens. Hanc tamen tam excellentis ingenii jacturam ut moderatius feramus, id efficit, quod in demortui locum eum jam ſurrogatum videmus, qui ingenii acumine, eruditionis fama, inventorum gloria, non minus quam natalium communione, genuinus ejus frater eſſe a cunctis agnoſcitur, Virum nempe Celeberrimum, Dominum JOHANNEM BERNOULLIUM, *Groningana* Univerſitatis per decennium in docenda Matheſi Profeſſorem: quem exornandæ noſtræ Univerſitati peculiari Numinis providentia fuiſſe deſtinatum quo minus poſſemus dubitare, illud accidit memorabile, ut ille, cum graviorem Fratris ægritudinem ignoraret, viſendorum Parentum ſtudio iter in patriam inſtituturus, forte ſic ferente, eodem illo die *Groninga* emigraret, quo nos hic *Baſilea* ipſius Fratri exequias celebravimus: plane ut ab ipſo DEO Fratri in adminiſtrando munere Profeſſorio ſuccenturiatum fuiſſe appareat. Ad quod etiam, utprimum in civitate noſtra appulit, quam fieri potuit honorificentiſſime vocatus, & ab Ampliſſimis Urbis noſtræ Proceribus luculento ſalarii auctario cohoneſtatus, neglectis ampliſſimis conditionibus, quibus in *Lugduno-Batavam* & *Ultrajectinam* Univerſitates ad docendam Matheſin invitabatur, Patriæ ſuæ ſervire maluit. Macte hac virtute, Vir Clariſſime, & ut in locum Fratris, ſic & in affectum ejus, quo ad promovendam hujus Univerſitatis gloriam ferebatur, ſuccede.

TU vero, benigniſſime DEUS, qui tam luculentis tuis beneficiis uſque res noſtras tibi curæ eſſe quotidie demonſtras, ſerva proporro hanc Civitatem tanquam pupillam oculi Tui, eamque Proceribus noſtris tutam foris, tranquillam domi, & ex omni parte florentem præſta. Eccleſiam præcipue ejuſque ſeminarium Academiam, ut adhuc feciſti, ſic tuere, ut ab omni labe intactæ,

 pro-

promovendæ nominis Tui gloriæ, & cum ſuæ tum, aliorum ſaluti procurandæ ſedulo & cum ſucceſſu laborent. Eoque fine proſpera illorum induſtriam, quos Tibi in utraque delegiſti perficiendæ voluntatis Tuæ miniſtros, iiſque, ut tanto utilius Tibi laborent, fac hanc gratiam, ut juventus non magis ex illorum informatione, quam vita, tanquam ex optimo exemplari, ſuos ipſa mores deſumat omni probro defæcatos, hancque illi educent non monitis tantum, ſed, quod multo eſt efficacius, vita. Idque ut diu faciant, vitam, quam aliis docendis tam ſtrenue impendunt, longævam & felicem omnibuſque ingenii dotibus ei muneri ſufficientibus inſtructam benigne illis largire. Fac ut nos omnes, veram non ſimulatam Philoſophiam affectantes, intimis cogitationibus votiſque noſtris Te unum ſectemur, & ad hunc finem omnia ſtudia noſtra unice colliment: ut ſtudeamus non oſtentationi & famæ apud homines captandæ, ſed vitæ ad leges Tuas emendandæ: non ut oblectemus nos ſtudiis, ſed ut illorum ope verum a falſo, bonum a malo ſecernamus: non ut ſerviant curioſitati noſtræ, ſed ut extirpent errores, minuant cupiditates, defæcent mores. Inprimis id nobis præſta, o DEUS, ut ne quid unquam ſapiamus præter Te, atque identidem cogitemus, in illo decretorio die de nobis ita Te laturum ſententiam, non ut quam docti ſed quam probi fuerimus diſpiciatur. Donec in cœleſtem illam lucem tranſlati, & omnibus ignorantiæ peccatique tenebris, quibus adhuc in hac mortalitate circumfundimur, exſoluti Doctores & diſcipuli, hauriamus lumen de Tuo lumine, & potiamur vero ſtudiorum fructu, beata æternitate. DIXI.

INDEX

INDEX

Numerorum.

N°. I. Conamen adornandi novi Syſtematis Cometarum, pro motu eorum ſub calculum revocando & apparitionibus prædicendis. Pag. 1.
Occaſio ſcripti, *ibid.*
1. De Cometarum ortu. 2
Sententia *Ariſtotelis* & *Carteſii.* 3
2. De Motu: Eſt circularis. 5
3. De Loco: Non eſt ſub Luna. 6
Nec intra Planetarum Syſtema, ſed ſupra Saturnum, inter quem & Fixas immenſum eſt ſpatium. 7
Spatium hoc partem conſtituit Vorticis Solaris. 8
In domicilium ceſſit Cometis. 9
Nec ulla obſtat Parallaxis. *ibid.*
4. De Cauda. 12
Syſtema Authoris. 14
Mens Authoris de Cometarum caudis. 17
Cur vergat in Solis oppoſitum? 18
Cometæ nuperi conſideratio, Perigæum, Statio, Motus apparens. 19
Cometæ Motus compoſitus, ex motu Terræ annuo, 20
E motu deferentis Vorticem cometicum, 21
E motu proprio. 22
Futura apparitio Cometæ noſtri An. 1719. 23
Syſtematis cum apparentiis convenientia. 24
Obſervationes Cometæ annorum 1680, & 1681. 26
Tabella motus Perigæi Cometarum. 27
Solutio objectionum. 28
De Aſtrologia judiciaria. 31
Examen Syſtematis *Heveliani*. 32
Appendix. 41

N°. II. Diſſertatio de Gravitate Ætheris. Pag. 53
Gravitas aeris. *ibid.*
Fluidum levius ponderat ſuper graviori. 54
Gravia quandoque aſcendunt. 55
Occaſio Scripti. 56
Duo motus genera, Pulſio & Attractio. *ibid.*
Non datur attractio diſtincta a pulſione. 57
Natura Pulſionis. 58
In omni Pulſione, linea moventis & linea mobilis obtuſum angulum conſtituunt. 59
An ventus adverſus attrahat navem? *ibid.*
Clavus non tantum agit per modum vectis. 60
Attractiones Magnetricæ & Electricæ fiunt per pulſionem. 62
Attractio effluviorum a Sole fit per pulſionem. 63
Attractio olei in lampade, item Suctio, & Reſpiratio fiunt per pulſionem. *ibid.*
Attractio catenæ, & Tractio currus fiunt per pulſionem. 64
Attractio baculi fit per pulſionem. 65
An partes baculi cohæreant cæmento? *ibid.*
An funiculo, An ſolis hamulis ſibi denſiſſime implexis? 66
An quies ſit cauſa cohæſionis partium duri corporis? 67
An per quietem ſufficienter explicetur, cur clavus manu frangi nequeat? 69
Firmitas corporum tribuenda compreſſioni corporis alicujus externi, 73
Et quidem Gravitati atmoſphæræ. 74
Paralleliſmus inter cohæſionem Marmorum politorum & particularum inſenſibilium duri corporis. 75
Gravitas aeris ſub examen revocatur: Experimentum *Toricellianum* 77
Explicatur per aeris preſſionem. 78
De adſuctione liquoris e tubo clauſo vel lagena. 79
De Elatere aeris, ejuſque effectu. 81
De duabus fiſtulis ſibi agglutinatis. 82
De ſuſpenſione liquorum in loco clauſo aut obſtructo vaſculo. *ibid.*
De aere relicto in ſummitate tubi. *ibid.*
De natura & cauſis Gravitatis. 83
Quid ſit elaterium aeris? 85
Ejus cauſa obſcura. 86
Quid ſit aeris reſiſtentia paſſiva, illuſtratur exemplo duorum Luctatorum. 87
Regulæ elaterii & reſiſtentiæ paſſivæ. 89
Denſitatum & ponderum ab aere ſuſtentabilium proportio. 93
Quan-

Quanto plus contineatur materiæ ſubtilis quam terreſtris in portione aliqua aeris atmoſphærici ? Pag.94
Cur tubo clauſo vel lagena difficulter adſugi poſſit liquor ? 95
Reſpondetur ad exemplum duarum fiſtularum. ibid.
Reſpondetur ad ſuſpenſionem liquoris in loco clauſo, vel vaſculo obſtructo. 96
Fluxus liquoris per ſyphonem in loco clauſo explicatur per Reſiſtentiam aeris paſſivam. 97
Cur, relicto in ſummo tubi aere, mercurius ſolito humilius deſcendat, nec tamen omnis effluat ? 100
Quouſque deſcendere debeat ? 101
Aer efficit firmitatem corporum, uti ſuſpenſionem liquorum in tubis. 104
An vero ſolus aer, diſquiritur per comparationem ejus quod accidit mercurio in tubo longiori ? 105
Concluditur ipſum quoque Ætherem gravitare : idque probatur e natura & cauſis gravitatis, 106
Item e deſcenſu liquorum in vaſis occluſis. 107
Ætherem gravitare in Philoſophia *Carteſiana* nullum myſterium. 108
Per gravitatem ætheris explicatur cohæſio partium baculi. 109
An poſſit dari baculus, cujus pondus ſuperet pondus ſimilis cylindri ætherei ? 110
Baculus attractus vel ſuſpenſus proprie nullum poſſidet pondus, adeoque a minima ætheris vi propelli poterit. 111
Cur, ſuppoſita ætheris gravitate, liquores tamen non debeant ad infinitam altitudinem in tubis ſuſpenſi hærere ? 112
Cur embolus evacuatæ antliæ non niſi centum plus minus libras ſuſtineat ? 113
Diſparitas inter ſuſpenſionem baculi, & liquorum in tubis. 115
Cur mercurius repurgatus in ſex pedum altitudine hæreat ? 116
Cur preſſione ætheris non connectantur, uti durorum, ita liquidorum particulæ? 117
Quæ ſit natura liquidi & duri? 119
Pori liquorum non ſola materia ſubtili repleti. 120
Cur liquori effuſo ſeſe confeſtim inſinuet aer? ibid.
Cur preſſione ætheris connectantur corporum durorum particulæ ? 121
In quo conſiſtat mollities & lentor. ibid.
Cur liquidorum particulæ ſint rotundiores, durorum oblongiores, & cur illæ moveantur, hæ quieſcant? 122
Durorum particulas abſolute quieſcere non eſt neceſſe. 123
Cur liquida facile cedant tactui, dura difficulter, & an quies ejus rei cauſa ſit? ibid.
Quare manus lignum frangere poſſit, non ferrum ? 125

Cur manus facile clavum attrahat, ægre frangat? Pag. 126
Cur lignum uno ſenſu facile, alio difficillime rumpatur? 127
Nova quædam Mechanicæ principia. Quid fiat ubi corpus elevatur perpendiculariter? 128
Cur majus corpus majorem pariat elevanti difficultatem? *ibid.*
Cur corpus facilius ad latus impellatur quam elevetur ſurſum? 129
Quid fiat, ubi corpora complanata ſunt revellenda? *ibid.*
Quare corpus anguloſum difficilius moveatur ſphærico? 130
Cur corpora æquilibrata moveantur facillime, minus tamen facilius majori? 131 (137)
Examen aliquot Experimentorum, juxta doctrinam de gravitate ætheris. 132 (138)
De tubo inverſo digito adhærente. *ibid.*
1. Exp. de duobus marmoribus in aere cohærentibus. 133 (139)
2. Exp. de duobus marmoribus in evacuato recipiente cohærentibus. 134 (140)
3. Exp. de anomalia deſcenſus & aſcenſus Barometri. 137 (143)
An eadem anomalia locum etiam habeat in Thermometro. 140
4. Exp. de duobus hemiſphæriis evacuatis firmiſſime ſibi cohærentibus. 142
Aliorum explicatio inſufficiens. 143
Genuina phænomeni cauſa evolvitur. 146
Quare in fiſtulis gracilioribus liquor internus ſemper ſit nonnihil altior externo? 149
Vana ſpes motus perpetui. 152
Cur viciſſim in fiſtulis gracilioribus ſuperficies mercurii ſemper depreſſior ſit ſuperficie ejus extra fiſtulam? 154
Cur ſuperficies aquæ in fiſtulis ſit concava, mercurii convexa. *ibid.*
Artificium menſurandi particulas aeris. *ibid.*
Magnitudo particulæ aeriæ. 156
Recapitulatio. 157
Appendix. 158

N°. 3. *Nouvelle Machine pour reſpirer ſous l'eau, tirée du Livre* De Motu animalium, *de J. A. BORELLI.* 165
IV. Examen de la Machine pour reſpirer ſous l'eau. 168
5. *Machine pour élever les eaux, de l'invention de Mr. L. C. D. O.* 171
VI. Doutes du Sr. BERNOULLI, ſur cette Machine hydraulique. 172
VII. Centum Poſitionum Philoſophicarum Cento. 175
8. *Relatio de Controverſia qua hactenus inter Dn. HUGENIUM &*

& Dn. CATELANUM agitatur, de Centro Oſcillationis. Pag. 192
N°. IX. Extrait d'une Lettre du Sr. BERNOULLI, ſur le démêlé de Mr. l'Abbé CATELAN avec Mr. HUYGENS, touchant le Centre d'Oſcillation. 195
10. *Réponſe de Mr. l'Abbé CATELAN à la lettre précédente.* 197
XI. Nouvelle Machine pour peſer l'air, inventée par le Sr. BERNOULLI. 199
XII. Problême propoſé par Mr. BERNOULLI. 203
XIII. Examen de la maniére de peſer l'air dans une Veſſie. 204
XIV. Problême propoſé par Mr. BERNOULLI. 207
XV. Extrait d'une Lettre de Mr. BERNOULLI ſur une flamme ſortie d'un tuïau de fontaine. *ibid.*
XVI. Extrait d'une Lettre de Mr. BERNOULLI, ſur la maniére d'aprendre les Mathématiques aux Aveugles. 209
XVII. Paralleliſmus ratiocinii Logici & Algebraici. 211
XVIII. Theſes Logicæ de Converſione & Oppoſitione Propoſitionum, cum Adnexis miſcellaneis. 225
XIX. Dubitatio circa cauſam Gravitatis a rotatione Vorticis Terreni petitam. 239
20. *Specimen Libri* De Momentis gravium &c. *De momento gravis ſuper plano declivi.* 245
XXI. Solutio difficultatis contra propoſitionem quandam mechanicam. 248
XXII. Methodus ratiocinandi, ſive uſus Logicæ in præclaro aliliquo phænomeno phyſico enodando. 251
XXIII. Narratio controverſiæ inter Dn. HUGENIUM & Abbatem CATELANUM agitatæ de Centro Oſcillationis, quæ loco animadverſionis eſſe poterit in Reſponſionem Dni. CATELANI, N°. 10. contentam. 277
XXIV. Demonſtratio rationum, quas habent ſeries numerorum naturali progreſſione ſeſe inſequentium, vel quadratorum, cubicorum, &c. item trigonalium, pyramidalium &c. ad ſeries numerorum totidem maximo æqualium. 282
25. *Examen perpetui mobilis Pariſiis publicati, inſtitutum a D. PAPINO.* 284

N°. XXVI.

N°. XXVI. Examen *Bernoullianum.* Pag. 286
XXVII. Solutio tergemini Problematis Arithmetici, Geometrici, & Aſtronomici. 291
XXVIII. Gemina appendix ad Examen perpetui mobilis. 314
XXIX. Solutio algebraica Problematis de Quadriſectione Trianguli Scaleni per duas normales rectas. 328
XXX. Nova ratio metiendi altitudines nubium. 336
XXXI. Animadverſio in Geometriam *Carteſianam*, & Conſtructio quorundam Problematum hyperſolidorum. 343
32. Dion. *PAPINI Meletemata ad Geminam appendicem de perpetuo mobili.* 351
XXXIII. Appendix tertia ad Examen perpetui mobilis, qua ad Meletemata D. Papini reſpondetur. 355
XXXIV. Poſitiones Mathematicæ, De Rationibus & Proportionibus. 361
XXXV. Poſitiones Arithmeticæ de Seriebus infinitis, earumque Summa finita. 375
XXXVI. De invenienda cujuſque plani declinatione ex unica obſervatione projectæ a ſtylo umbræ. 403
XXXVII. Vera conſtructio geometrica Problematum Solidorum & Hyperſolidorum per lineas rectas & circulos. 411
XXXVIII. Novum Theorema pro doctrina Sectionum Conicarum. 418
XXXIX. Analyſis Problematis, De inventione Lineæ deſcenſus uniformis, & Propoſitio Problematis, De inventione Lineæ Funiculariæ vel Catenariæ. 421
XL. Quæſtiones nonnullæ de uſuris, cum ſolutione Problematis de ſorte Aleatorum propoſiti N°. XIV. 427
XLI. Specimen Calculi differentialis in dimenſione Parabolæ Helicoidis, Ubi de flexuris curvarum in genere, earundem evolutionibus, aliiſque. 431
XLII. Specimen alterum Calculi differentialis, in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum & Areis Triangulorum Sphæricorum, una cum additamento quodam ad Problema Funicularium, aliiſque. 442

N°. 43. *Lettre de Mr. le* Marquis de *L'HOPITAL à Mr. HUYGENS, dans laquelle il prétend démontrer la Règle de cet Auteur touchant le Centre d'Oſcillation du Pendule compoſé, par ſa cauſe phyſique, & répondre en même tems à Mr. BERNOULLI.* p. 454

44. *Remarques de Mr. HUYGENS ſur la Lettre précédente & ſur le récit de Mr. BERNOULLI dont on y fait mention.* 458

XLV. Demonſtratio Centri Oſcillationis ex natura Vectis, reperta occaſione eorum quæ ſuper hac materia in duobus Num. præced. recenſentur. 460

46. *Solutio Curvæ Cauſticæ per vulgarem Geometriam* Carteſianam, *aliaque, Authore* Joh. *BERNOULLI.* 466

XLVII. Additamentum ad Solutionem Curvæ Cauſticæ Fratris *Joh.* BERNOULLI, una cum Meditatione de natura Evolutarum, & variis oſculationum generibus. 473

XLVIII. Curvatura Veli. 481

XLIX. Lineæ Cycloidales, Evolutæ, Ant-Evolutæ, Cauſticæ, Anti-Cauſticæ, Peri-Cauſticæ: earum uſus, & ſimplex relatio ad ſe invicem: Spira mirabilis, aliaque. 491

L. Additio ad Schedam de Lineis Cycloidalibus. 503

51. *Ænigma geometricum de miro opificio Teſtudinis quadrabilis hemiſphaericæ a D. PIO LISCI POSILLO* [Vincentio VIVIANI] *Geometra propoſitum.* 511

LII. Ænigmatis Florentini Solutiones varie infinitæ. 512

LIII. Solutio Problematis de minimo Crepuſculo. 515

LIV. Poſitionum de Seriebus Infinitis, earumque ſumma finita, Pars altera. 517

55. *G. G. LEIBNITII Generalia de natura Linearum, anguloque contactus & oſculi, provolutionibus, aliiſque cognatis, & eorum uſibus nonnullis.* 543

LVI. Curvæ Dia-Cauſticæ, earum relatio ad Evolutas, aliaque his affinia. Item natura oſculorum uberius explicata. Celeritates Navium definitæ. Regulæ pro reſiſtentiis, quas Figuræ in fluido motæ patiuntur, &c. 549

57. *Problema ab Eruditis ſolvendum, propoſitum a* Joh. *BERNOULLI.* 573

Digitized by Google

N°. LVII. Solutio Problematis Fraterni. p. 574

LVIII. Curvatura Laminæ Elaſticæ: Ejus identitas cum curvatura lintei a pondere incluſi fluidi expanſi: Radii circulorum oſculantium in terminis ſimpliciſſimis exhibiti; una cum novis quibuſdam Theorematis huc pertinentibus, &c. 576

LIX. Solutio Problematis *Leibnitiani*, De Curva acceſſus & receſſus æquabilis, a puncto dato, mediante rectificatione Curvæ Elaſticæ. 601

LX. Conſtructio Curvæ acceſſus & receſſus æquabilis, ope rectificationis Curvæ cujuſdam algebraicæ. 608

61. *G. G. Leibnitii Nova Calculi differentialis applicatio & uſus ad multiplicem linearum conſtructionem ex data tangentium conditione.* 613

LXII. De Methodo tangentium inverſa, quouſque tum in communis, tum in reconditioris Geometriæ poteſtate ſit, & non ſit. 618

LXIII. Solutiones Problematis *Hoſpitaliani*, de Curva æquilibrationis. 624

64. *G. G. LEIBNITII Conſtructio propria Problematis de Curva Iſochrona paracentrica, &c.* 627

65. *Excerptum ex Epiſtola CHR. HUGENII DE ZUYLICHEM ad G. G. LEIBNITIUM.* 637

LXVI. Explicationes, Annotationes, & Additiones ad ea quæ in *Actis* ſuperiorum annorum de Curva Elaſtica, Iſochrona paracentrica, & Velaria, hinc inde memorata & partim controverſa leguntur: ubi de Linea mediarum directionum, aliiſque novis. 639

LXVII. Notæ & animadverſiones tumultuariæ in Geometriam CARTESII. 667

In Lib. I. *Nota* 1. Quomodo ad æquationes perveniendum ſit, quæ reſolvendis Problematis inſerviant: de incognitarum delectu, & de ordine in Analyſi tenendo. *ibid.*

Nota 2. Non ſemper neceſſe eſt, ad conſtructionem, omnes Problematis æquationes indeterminatas ad unam determinatam reducere: ſed præſtat quandoque Problema conficere per Loca quæ ſuppeditant indeterminatæ æquationes. 670

Nota 3.

Nota 3. De Ordinibus Curvarum æſtimandis. p. 675
Nota 4. De infimi ordinis Curvis, per quas æquatio data poteſt conſtrui. 677
In Lib. II. *Nota* 5. Curvæ tranſcendentes a Geometria non ſunt excludendæ. 679
Nota 6. Error CARTESII arbitrantis curvarum & rectarum linearum rationem nullo modo poſſe cognoſci. 680
Nota 7. Methodus Tangentium CARTESII promota. *ibid.*
Nota 8. De Circulo curvam oſculante, ſimulque tangente & ſecante. 684
Nota 9. Quando ſecunda Ovalis CARTESII tranſeat in circulum & qualem ? 685
Nota 10. Ovalis primi & tertii generis in rectam, ſecundi in hyperbolam, quarti in ellipſin abire poteſt. 686
Nota 11. Lens hyperboliformis radios lucis [*homogeneos*] accurate colligens in unum punctum. 687
Nota 12. De focis linearibus, ſeu lineis cauſticis & dia-cauſticis. 688
In Lib. III. *Nota* 13. De ſimpliciſſima Problematis conſtruendi ratione. 689
Nota 14. De æquationum ſuperiorum generatione per multiplicationes inferiorum. 691
Nota 15. Cautio adhibenda in æquationum præparatione ad conſtructionem. 692
Nota 16. Transformatio æquationis datæ in aliam, cujus terminus quilibet coefficientem habeat datæ magnitudinis. 693
Nota 17. Dividendo æquationem datam per binomium, quod illius radicem eſſe ſuſpicamur, cur juvet diviſionem incipere a termino ultimo. *ibid.*
Nota 18. Problemata ſolida, quomodo per exiguam aliquam Sectionis Conicæ particulam conſtruantur. 694
In Comment. SCHOOTENII, *Nota* 19. Conſtructio æquationis $z = (cd + ef) : g$. 696
Nota 20. Conſtructio æquationis $z = (acdd - aacc)^{\frac{1}{2}} : (d^3 + acd)$. *ibid.*
Nota 21. Conſtructio æquationum $z = \sqrt{(aa + bb)}$ & $z = \sqrt{((aadd - aaff - a^4) : (dd + 2df + ff))}$. 697
Nota 22. In puncto flexus contrarii recta nulla curvam tangere poteſt. *ibid.*
Nota 23. Promotio regulæ pro inveniendis commode diviſoribus æquationis propoſitæ. 698
Nota 24. Analyſis & Conſtructio Problematis *Hugeniani*: E puncto dato rectam educere quæ datæ Parabolæ ad rectos angulos occurrat. 700

Digitized by Google

Nota 25. De Oſculo circuli & Parabolæ. p. 702
In Additamentum. *Nota* 26. Corrigitur lapſus calculi *Schooteniani*, qui BARTHOLINUM in errorem induxerat. *ibid.*
Nota 27. Alter BARTHOLINI lapſus corrigitur. 704
In Epiſt. L. HUDDENII De reductione æquationum. *Nota* 28. De Methodo *Huddeniana* inveniendi maximum communem diviſorem duarum quantitatum. *ibid.*
Nota 29. De valore fractionis, cujus numerator & denominator per determinationem quandam nihilo æquales fiunt. 706
Nota 30. Retegitur ars, qua HUDDENIUS Regulam ſuam XI invenire potuerit. 709
Nota 31. Analyſis Regulæ XVII *Huddenianæ*. 712
Nota 32. Ratio Regulæ *Huddenianæ* ad transformandam æquationem propoſitam in aliam cujus ultimus terminus pauciores habeat diviſores. 713
In Geometriæ Part. II. *Nota* 33. Cautio obſervanda iis Diviſionibus inſtituendis. 714
Nota 34. Dignoſcere num propoſitæ quantitates ſurdæ communicantes ſint, necne. 715
Nota 35. Demonſtratio Regulæ extrahendi radicem quadratam ex binomiis. 717
N°. 68. *Nova & ſingularis Geometriæ promotio circa dimenſionem quantitatum curvarum, per D. TSCHIRNHAUSEN.* 718
LXIX. Obſervatiuncula ad ea quæ de dimenſionibus curvarum publicata ſunt a D. T. 722
LXX. Conſtructio generalis omnium Curvarum tranſcendentium, ope ſimplicioris Tractoriæ & Logarithmicæ. 725
71. *G. G. LEIBNITII Notatiuncula ad Num.* LXVI. 728
LXXII. Problema *Beaunianum* univerſalius conceptum, ſive Solutio æquationis nuper propoſitæ $ady = ypdx + by^n qdx$, cum aliis quibuſdam annotatis. 731
LXXIII. Complanatio ſuperficierum Conoidicarum & Sphæroidicarum. 732
LXXIV. Poſitionum de Seriebus infinitis Pars tertia. 745
LXXV. Solutio Problematum Fraternorum, una cum Propoſitione reciproca aliorum. 768
LXXVI. Solutio difficultatis cujuſdam circa naturam flexus contrarii. 779

Digitized by Google

N°. LXXVII. Addenda ad conſtructionem Problematis *Beaunia-ni.* p. 782
LXXVIII. Demonſtratio Synthetica Problematis de infinitis Cycloidibus, abſque adminiculo infinite parvorum. Item Conſtructio aliorum huic affinium, a ſe propoſitorum. 785
79 *Problêmes à reſoudre, par Mr.* Jean *BERNOULLI.* 795
LXXX. Solutio ſex Problematum Fraternorum. 796
LXXXI. Solutio Problematis Fraterni de Curva infinitas Logarithmicas ad angulos rectos ſecante. 806
82. *Lettre de Mr. BERNOULLI, Profeſſeur de* Groningue *à Mr. VARIGNON, ſur le Problême des Iſopérimétres.* 814
LXXXIII. Avis ſur les Problêmes dont il eſt parlé dans la Lettre précédente. 821
84. *Réponſe de Mr. BERNOULLI Profeſſeur de* Groningue *à cet Avis.* 822
LXXXV. Avis de Mr. Bernoulli Prof. de Math. à *Baſle* ſur la réponſe de ſon Frére. 827
86. *Réponſe de Mr. BERNOULLI Prof. de* Groningue *à cet Avis.* 828
LXXXVII. Extrait d'une Lettre de Mr. Bernoulli de *Baſle*, contenant l'examen de la ſolution de ſes Problêmes. 829
LXXXVIII. Avis ſur la Réponſe du N°. 86. 839
89. *Extrait d'une Lettre de Mr. BERNOULLI Profeſſeur de* Groningue, *pour ſervir de réponſe à celle de ſon Frére, Profeſſeur à* Baſle. 841
XC. Poſitionum de Scriebus infinitis earumque uſu &c. Pars quarta. 849
XCI. Circinus proportionum nauticus Scala Loxodromica inſtructus, hujuſque Fabrica mire facilis. 868
XCII. Quadratura Zonarum cycloidalium demonſtrata. 871
XCIII. Solutio propria Problematis Iſoperimetrici. 874
XCIV. Nova Methodus expedite determinandi radios oſculi ſeu curvaturæ, in curvis quibuſvis algebraicis. 888
XCV. Quadratura Zonarum cycloidalium promota. Problema item centri gravitatis Sectoris ſolidi cycloidici ſolutum. 892
XCVI. Analyſis magni Problematis Iſoperimetrici. 895

N°. XCVII. Section indéfinie des Arcs circulaires en telle raiſon qu'on voudra, avec la maniére d'en déduire les Sinus, &c. p.921
XCVIII. Démonſtration générale du Centre de Balancement ou d'Oſcillation, tirée de la nature du Levier. 930
XCIX. Extrait d'une Lettre, contenant l'application de la Régle du Centre de Balancement à toutes ſortes de figures. 937
C. Démonſtration du Principe de Mr. Huygens touchant le Centre de Balancement. Et de l'identité de ce Centre avec celui de Percuſſion. 947
CI. Poſitionum de Seriebus infinitis, earumque uſu &c. Pars quinta. 955
CII. Véritable hypothèſe de la réſiſtance des Solides, avec la démonſtration de la courbure des corps qui font reſſort. 976
CIII. VARIA POSTHUMA. 991
Art. I. Attollere Infinitinomium ad poteſtatem indefinitam. 993
II. Regulæ pro conſtructionibus curvarum quarundam tranſcendentium per rectificationes algebraicarum. 999
III. Regulæ quædam de ſummatione differentialium. 1007
IV. Demonſtratio Anagrammatis N°. 87 inſerti, de curva inter infinitas genere eaſdem, quæ gravi concedit celerrimum deſcenſum ad datum perpendiculum. 1017
V. Demonſtratio poſterioris anagrammatis ibidem inſerti, de natura lineæ ex infinitis curvis genere iiſdem æquales arcus abſcindentis. 1021
VI. In ſuperficie Conoidis ducere lineam omnium inter eoſdem terminos breviſſimam. 1023
VII. In ſuperficie Conoidum, quæ naſcuntur ex circumductu lineæ rectæ, altero extremo in puncto ſublimi quieſcentis, ſuper data curva, ducere lineam breviſſimam inter data duo puncta. 1025
VIII. Analyſis ejuſdem Problematis alia inſtituta methodo, non ſupponendo ſuperficiem gibbam continue complanari poſſe. 1028
IX. Quæſtio, Num Elaſtrum tenſum, ſublata ſubito vi tendente, eodem tempore in omnibus ſuis partibus in rectitudinem

dinem ſe reſtituat; an vero in aliis partibus citius, in aliis tardius? reſoluta. p. 1030

Art. X. Demonſtratio Theorematis de radiorum oſculi uſu in reducendis ſecundis differentiis ad primas. 1033

XI. De Curvatura fili extremitatibus ſuis ſuſpenſi, & ab infinitis potentiis juxta directiones quaſvis agentibus extenſi; ejus directione media & vi qua ſecundum illam impellitur. 1036

XII. Æquationem $dy = ay^m dx + by^r x^v dx$ conſtruere, ſaltem per quadraturas, hoc eſt, ſeparare in illa literas indeterminatas cum ſuis differentialibus a ſe invicem. 1049

XIII. De Celeritate & Declinatione [*Dérive*] Navis. 1057

Additio. 1060

XIV. Invenire Curvam, quam format radius lucis per aerem, qui inæqualis denſitatis eſt, ad oculum noſtrum delatus. 1063

XV. Invenire veram legem, ſecundum quam aeris denſitas decreſcit in altioribus Atmoſphæræ locis, & ſimul determinare verum aeris atmoſphærici pondus. 1067

XVI. Solutio Problematis de minimo Crepuſculo. 1075

XVII. Invenire relationem inter Evolutas & Diacauſticas. 1077

XVIII. Celeritates navis a quiete inchoatas uſque ad maximam invenire. 1080

XIX. Inventio curvæ, cujus tangens abſcindit ex axe ſegmentum, quod ad tangentem habeat conſtantem rationem. 1082

XX. Invenire curvam, cujus curvedo in ſingulis punctis eſt proportionalis longitudini arcus; id eſt, quæ ab appenſo pondere flectitur in rectam. 1084

XXI. Demonſtratio analytica conſtructionis mechanicarum curvarum omnium, ope Logarithmicæ & alterius curvæ algebraicæ per tractionem deſcribendæ, quæ tradita eſt N°. LXX. 1086

XXII. Obſervatio ſingularis ad praxin Calculi differentialis, ejuſque uſus in radiis oſculi inveniendis. 1088

XXIII. Inventio ſubtangentis & ſubnormalis per præcedentem methodum. 1098

XXIV. Extenſio methodi præcedentis pro radiis oſculi invenien-

Digitized by Google

niendis ad illas quoque æquationes algebraicas in quibus occurrunt quantitates ſurdæ plurimembres, ut non opus ſit ſurditatem ex æquatione tollere. pag. 1099

Art. XXV. Invenire radios oſculi in curvis per Focos deſcriptis. 1101

XXVI. Inventio Centri Tenſionis. 1105

XXVII. Artificium impellendi Navem a principio motus intra ipſam Navem concluſo. 1109

XXVIII. Curvatura Conoidis in Automato, cui circumplicata catenula, rotis horologii motum æquabilem conciliat. 1115

XXIX. Problema de curvatura fornicis, cujus partes ſe mutuo proprio pondere ſuffulciunt, ſine ope cæmenti. 1119

XXX. Lineæ datæ rigidæ, ab infinitis potentiis ſecundum quaſvis directiones impulſæ tractæve, determinare directionem mediam, axem æquilibrii & vim impulſus. 1124

XXXI. De inventione Sectoris cycloidici ſolidi, qui centrum gravitatis habeat algebraice determinabile. 1129

XXXII. Quædam formulæ æquationum differentio-differentialium reductæ ad æquationes differentiales primi gradus. 1134

Finis Indicis.

Digitized by Google

No. I.

CONAMEN NOVI SYSTEMATIS COMETARUM,

Pro

Motu eorum ſub calculum revocando & apparitionibus prædicendis,

ADORNATUM

A

JACOBO BERNOULLI, Baſil.

Difficulter eruuntur quæ tam alte jacent.

Editum Primo

AMSTELÆDAMI,

Apud HENRICUM WETSTENIUM.

1682.

Digitized by Google

Digitized by Google

VIRIS

Magnificis, Nobiliſſimis, Ampliſſimis, Conſultiſſimis,

D. JOHANNI HUDDENIO,

Præpotentis Reip. Amſtelædamenſis Conſuli & Senatori graviſſimo, nec non Societatis Indiæ Orientalis Præfecto digniſſimo:

D. BERNHARDO FULLENIO,

J. U. D. & Inclytæ Reip. Franekeranæ Ex-Conſuli meritiſſimo.

VIRI MAGNIFICI, AMPLISSIMI,

PEREGRINANTES non infimum felicitatis ſuæ momentum in eo ponunt, ut Viros ubique in eminentia conſtitutos, & quos ſingularis virtus ac eruditio ultra communem mortalium ſortem evexit, de facie noſſe, vel limina eorum

Digitized by Google

etiam ſalutaſſe ſe olim gloriari poſſint. Sufficit eſſe in Belgio, Amplissimi Viri, ut quis immortalis Veſtri nominis fama allectus, ad hunc felicitatis aſpiret apicem, & ad ſacra Veſtra Capita, non uno nomine in pretio & veneratione habenda, humillimum ſibi acceſſum parare, quoquo modo annitatur. Quis enim divinæ majeſtatis characterem, e ſacratiſſimis Veſtris muniis relucentem, devoto non adorare geſtiat pectore? Quis vigilantiam ac prudentiam, cujus pro ſalute populi tot ſpecimina edidiſtis, non ſumme admirari cupiat? Sed quis ornamentum ſplendidiſſimum, quod divino Veſtro characteri rariſſimo exemplo addidiſtis, profundiſſimam rerum Mathematicarum ſcientiam non prorſus ſtupeat? Loquuntur Tuæ, Amplissime Huddeni, Literæ binæ ad *Schootenium* τὸν μακαρίτην exaratæ, & ceu pretioſiſſimi uniones, Geometriæ Carteſianæ inſertæ: quam abſolutiſſimam divinæ artis Analyticæ, qua ſine Matheſis, & ſine Matheſi omnis jejuna eſt Philoſophia, ſpirant cognitionem! quot abſtru-

abſtruſiſſimæ veritates in parum adulta ætate ab Amplitudine Tua erutæ, in profundiſſimo clauſtro ſine Huddeniana clave æternum latituræ! Parum etiam viſum fuit Amplitudini Tuæ, MAGNIFICE FULLENI, ſummum in his terris majeſtatis conſcendiſſe apicem, niſi ſumma juxta ſummis adderet, & ſublimi dignitatis faſtigio ſublime Uranoſcopiæ ſtudium jungeret; idque tanto proſequeretur ardore, ut Gedanum quondam iter ſuſcipere, & cum Celeberrimo HEVELIO de Scientiarum nobiliſſima conferre Amplitudinem Tuam non piguerit. Tot vero venerationis argumenta, AMPLISSIMI VIRI, propius adoraturo, & ad aras Veſtras humillimum mihi paraturo aditum, quamvis nec denſis faſcibus, nec ſpiſſi voluminis hecatombe altaria mihi fument, perinde ut aliis, qui grandiorum uberum paſcunt pecora, & ampliorem fœcundioris ingenii & eruditionis meſſem facere conſueverunt; liceat tamen e curta ſupellectile & ſterili meſſe par turturum & paucas Vobis ſpicas adolere. Ac-

quieſcite igitur, VIRI AMPLISSIMI, levidenſi hoc paucarum pagellarum ſacrificio, quod ad pedes veſtros ſubmiſse oblatum venio, illudque patrocinio Veſtro, favore Authorem amplecti dignamini,

VESTRARUM AMPLITUDINUM

Humillimum & Devotiſſimum Cultorem

Amſtelædami 11. Auguſti 1681.

JAC. BERNOULLI.

JA-

JACOBI BERNOULLI

CONAMEN ADORNANDI NOVI SYSTEMATIS COMETARUM,

Pro motu eorum ſub calculum revocando & apparitionibus prædicendis.

CUM Cometa noviſſimus, adhuc Orbi noſtro illucens, ad ſui contemplationem ſyderalis ſcientiæ Cultores invitaret, incidebam forte in Scriptum quoddam Gallicum *, in quo Author Ephemeridem Cometæ pandere, ejuſque motum pro ſingulis diebus ſequentibus ad finem uſque apparitionis prædicere tentabat, ſtationem quidem illius ad 6 Martii St. Nov. in baſe Trianguli Borealis figens. Cum vero Cometa jam $\frac{6}{16}$ Fe-

Occaſio ſcripti.

* *Explication de la Comête qui a paru ſur la fin de l'année dernière & au com-*

No. I. Februar. novem pene gradibus terminum illum prætergreſſus, tandem inter Apem & Caput Meduſæ expiraſſet, & ſic eventus calculum ſimul & operam Prophetæ luſiſſet; in cauſam hujus erroris inquirere cœpi, & nunquid fieri poſſet, ut vago Cometarum motui certæ tandem leges & cancelli præſcriberentur, integraque adornaretur Theoria, cujus beneficio eorum apparitiones quodammodo calculo ſubjici, & non ſecus ac Luminarium Eclipſes prædici poſſent. Hinc pagellas nonnullas vernacula lingua conſcripſi; quæ vix ſub prælo prodierant, cum ecce fata mea me in Belgium vocarent; ubi cum appuliſſem, monuerunt Amici, qui Tractatum perlegerant, ut eundem in gratiam eorum, quos titulus ad lectionem invitare poſſet, Latine redderem; ſimulque reſponſiones ad objectiones, quas contra hypotheſin meam movebant, interſpergerem; etiamque difficultates, quas in Celeberrimi Domini HEVELII, quem longe diverſam circa hanc materiam fovere opinionem ſciebant, hypotheſi deprehenſurus eſſem, indicarem. Equidem Vir iſte incomparabilis & quaſi alter e TYCHONIS cineribus Phœnix, tam exactiſſimis obſervationibus & prolixiſſimo calculo, quam Opere Cometographico longe abſolutiſſimo, tam immenſum exantlavit laborem, ut poſt tot lucubrationes jure dubitari queat, an circa hanc materiam dici quid poſſit, quod non ſit ab ipſo dictum: facilem tamen ſperabo veniam, ſi poſt tantam meſſem exiguum adhuc colligam ſpicilegium, & hypotheſin meam, quamvis non in omnibus ei arriſuram, explicem.

Antequam vero Lectori Aſtrophilo mentem meam ea de re adaperiam, nonnulla in anteceſſum præmittenda de Cometarum *Ortu*, *Motu*, *Loco* & *Cauda*.

1. de Cometæ ortu. I. Circa Cometarum *Ortum* vel *Originem*, ſomniant Peripatetici, eos conflari ex ſiccis & ſulphureis exhalationibus, e Terra in

commencement de celle-ci, 1681; avec une Table qui marque le jour qu'elle a commencé a paroître, & le jour qu'elle finira, la ſomme de ſes mouvemens, ſa longitude, & ſa latitude, &c. par D. Anthelme, Chartreux. A Dijon 1681.

No. I. *Sententia Ariſtotelis.*

in ſupremam aeris regionem a Sole attractis, ibidemque accenſis. Brevitas, cui ſtudemus, non permittit, ut omnes abſurditates, quibus hæc ſententia implicatur, tangamus; Id tantum notet benignus Lector: Si Cometæ propria gaudent potius luce, quam illam a Sole acceptam reflectunt, ut juxta hypotheſin ſuam fateri coguntur iſti Philoſophi; tum non poteſt dari ratio phyſica, quare hoc lumen non ſe in omnia promiſcue latera diffundat, ſed perpetuo in plagam Soli directe oppoſitam vergat, niſi ridicule inter utrumque arcana quædam colluſio & Sympathia fingatur. Quemadmodum autem Syſtema Ptolemaicum, inter alia, etiam propterea ſuſpectum eſt, quod in illo non poſſit dari ratio phyſica, cur Sol & centrum epicyclorum Mercurii & Veneris cum Terra in eadem perpetuo linea recta inveniantur; ita meo judicio ex hoc ſolo ſufficiens argumentum petitur, mittendi nuncium ſententiæ Ariſtotelicorum, quod in aſſignanda cauſa directionis caudæ Cometicæ aqua ipſis hæreat. Nolo jam inveſtigare, an Terrarum orbis, etiamſi totus in fumum abiret ex mente adverſariorum, ſuffecturus eſſet tam immani caudæ producendæ.

Carteſii.

Sagaciſſimus alias naturæ ſerutator, * Dn. CARTESIUS ſatis monſtroſam etiam hic opinionem fovet. Juxta illum, maculæ plurimæ denſiores ſidus aliquod, inſtar cruſtæ vel corticis, undiquaque involventes impediunt, ne ſidus globulos ſecundi elementi circa ſe exiſtentes, amplius tanta vi a ſe repellere, aut Vorticem ſuum tanta rapiditate circumagere poſſit, quanta opus eſt ad reſiſtendum violento motui & gyrationi vicinorum Vorticum; hinc fit ut ſenſim ab illis abſorbeatur & quaſi

B ſi

* Nobiliſſ. CARTESIUS, judicio præſtantiſſimorum Virorum, cum primis autem judicio *Rever. & Clariſſ. Dn. Joh. Jac.* HOFMANNI, *Prof. Græc. Ling. in Academia patria celeberrimi*, in Lexico ejus univerſali, ſub tit. RENATUS; fuit *Philoſophus hujus ſeculi celeberrimus, qui in Philoſophia & Mathematicis ſtupendos fecit progreſſus, objectionibus omnibus contra meditationes ſuas allatis erudite & ſolide ſatisfecit, & per epiſtolas undique laceſſitus velut Oraculum quoddam reſponſa dedit: uno verbo Vir fuit incomparabilis.* Poſt tot luculenta teſtimonia, eant nunc agoniſantis Stagiritæ mancipia, quos vel *Domini* titulus Viro incomparabili præfixus male habet.

Digitized by Google

No. I. ſi depaſcatur, donec tandem deſtructo toto Vortice ipſum ſidus in peregrinum talem Vorticem abripiatur, ibique nunc in Planetam, nunc in Cometam abeat. Vid. *Princ. Philoſ. part.* 3. §. 115. Equidem quod in unoquoque horum Vorticum plurimæ mutationes & alterationes contingant, facile damus CARTESIO, ipſum vero Vorticem tam immenſum, Omnipotentis Dei opus, poſſe funditus deſtrui & diſſipari, eſt quod omnem fidem ſuperat. Sapientiſſimus mundi Opifex incolas in pulverem redigere, non ipſum domicilium ſubvertere in more poſitum habet, teſte Terra, quæ *firmiter fundata eſt ſuper baſes ſuas, ut maneat in ſeculum ſeculi, Pſal.* 104. 5. quamvis ejus incolæ, Plantæ & Animantia quævis quotidie intereant & nova reproducantur. Quod ſi exigua hæc Terræ, quaſi pilula, tam ſolido & inconcuſſo nixa fundamento eſt, quanto firmiori talo ſtabit tam vaſtum, & Terram hanc noſtram infinitis pene paraſangis exuperans ædificium. Imo ſi inſolens illa ſententia locum haberet, metuendum ne & Vortex noſter, quo Sol, Luna, Terra ipſa, totumque Planetarum ſyſtema clauditur, idem ſuo tempore ſubiret fatum; inprimis quia Aſtronomi, teleſcopiorum ope, multas ſæpe denſiſſimas in Sole detexerunt maculas, quæ nonnunquam totum Solis diſcum per integros annos obſcuraſſe leguntur. Sed de inaudita hac & periculoſa metamorphoſi, qua Sol noſter in Cometam transformaretur, nobiſque Fixa alia Solis vicem obiret, ſatius eſt ut taceam, ne multis ad vertiginem pronis terror forte panicus incutiatur.

Id vero cumprimis totam Cometarum doctrinam Carteſianam mihi ſuſpectam reddit, quod qua ratione ea cum rei veritate & cum mente ipſius Philoſophi conciliari poſſit, perſpicere omnino nequeo. Agnoſcit enim ille, Solem, Terram, Lunam, cæteraſque Stellas non eo modo, quem explicat, ſucceſſive generata, ſed initio cum omni ſua perfectione creata fuiſſe, ac in Terra, ex gr. non tantum fuiſſe ſemina Plantarum, ſed ipſas Plantas; &c. ad naturam tamen eorum omnium melius explicandam ſibi principia quædam fuiſſe excogitanda ſcribit, ex quibus, tanquam ex

ex ſeminibus quibuſdam, & Sydera, & Terra, & omnia quæ in hoc mundo aſpectabili continentur, ſecundum ordinarium naturæ curſum oriri potuiſſe demonſtraret, quamvis ipſa nunquam ſic orta eſſe probe ſciat. Vid. *Princ. Phil. part.* 3. §. 45. Unde regero; ſi nunquam ſic orta ſint, quare ſoli Cometæ excipiendi, qui revera naſcantur, quoties in conſpectum nobis veniunt? quare non ab initio omnes perfecti creati fuerint, ut Planetæ, quibus tamen & Cometis eundem generationis modum, qui fit per deſtructionem Vorticum, affingit? aut ſi adhuc hodie generentur Cometæ; quæro, cur tot Vorticibus a noſtro Vortice jam conſumptis, & tot ſyderibus ab illo abreptis, omnia hæc ſydera perpetuo in Cometas abierint, & nullum omnino in Planetam? quare item Planetæ perpetuo in noſtro Vortice rotentur, nec Cometarum inſtar ex uno Vortice in alium migrent, ſiquidem utrique eadem incunabula habeant? No. I.

Probabiliſſimum itaque eſt, & forſan ab ipſius Cartesii mente non alienum, Deum jam in initio creationis, juxta alia ȣ ἑξαημέρȣ opera, etiam Cometas produxiſſe, iiſque non ſecus ac reliquis Stellis & Planetis motum perpetuum indidiſſe, certoſque aſſignaſſe limites, quos non tranſgrederentur ad finem uſque ſeculi. Ut omnis vero vitetur æquivocatio, qua ludi in hac materia frequentiſſimum eſt; probe notandum, me, dum Cometas inter creationis opera refero, intelligere ſolum Cometæ corpus aut caput, nequaquam vero caudam; utpote quam diverſiſſimæ exiſtimo eſſe eſſentiæ, & capiti Cometæ ex accidenti ſolum advenire, ut ex infra dicendis patebit; id quod in editione germanica monitum quoque oportuiſſet, ne multis mentem meam ſiniſtre explicandi & cavillandi anſa data fuiſſet.

II. *Motum* porro Cometarum quod ſpectat, ſiquidem perpetuus ſupponitur, rectus eſſe nequit; quia alias ex uno mundi Vortice in alium ſe ſubducere, tandemque limites totius mundi ſuperare, & in ſpatia imaginaria expatiari neceſſum haberent; quod quam a ſana ratione abſonum ſit, quivis judicat. Neceſſarium itaque eſt, ut motu ſuo Cometæ deſcribant lineam in ſe redeuntem, Ellipticam puta, vel Circularem; utpote corpori- 2. De Motu. Eſt circularis.

No. I. bus æternis quam maxime convenientem.

3. De Loco. III. *Locus* & *Sedes* Cometarum, quod ſublunaris eſſe nequeat, infallibilibus & demonſtrativis argumentis evincitur; 1°. ex Parallaxibus, quæ omnium Aſtronomorum unanimi conſenſu, ex quo TYCHO in illas primus inquiſivit, longe exiliores deprehenduntur in Cometis, quam in Luna; unde illorum multo major, quam hujus diſtantia concluditur. 2°. ſublunares ſi forent; tum in oppoſitione Solis, cono umbræ Terræ ſatis profunde immergerentur, & ſic notabilem paterentur eclipſin, privati nimirum tum mutuatitio, quo ſolo gaudent, lumine: Teſtatur vero experientia, Cometas in oppoſitione Solis non eclipſari, ſed undiquaque criſpum in ſpeciem roſæ de ſe lumen ſpargere. 3°. Circa conjunctionem cum Sole, cauda Cometæ nobis appareret breviſſima; quoniam enim perpetuo in partem a Sole averſam tendit, hinc in dicto caſu propemodum directe in oculum noſtrum collimatura eſſet, & ſic pene nullum aut acutiſſimum effectura viſionis angulum; quod noviſſimæ etiam experientiæ refragatur, ubi cauda poſt conjunctionem Solis & Cometæ apparuit longiſſima. 4°. Cæterum, ſi Cometæ ſub Luna hæreant, non immerito quærimus, quid iis motum tam conſtantem, tam diuturnum, tam regularem, & in ipſa inæqualitate regulariſſimum imprimat atque conſervet; cum probabile ſit, vago potius motu ferri, quæcunque ſub Luna meteora generantur; motum vero regularem & æquabilem, qualis Cometarum eſt, non niſi corporibus cæleſtibus & æternis deberi. Quamvis vero etiam porro cauſa regularitatis motus in ſublunaribus Cometis aſſignaretur; ille tamen motus in ſe regulariſſimus, ex tam propinqua diſtantia nobis non poſſet non apparere inæqualiſſimus; ſic ut intra paucas horas Cometæ nobis fierent directi, ſtationarii, retrogradi, aliaſque enormes aſpectus diverſitates cauſarentur, quas fuſe perſequitur Cl. Dn. HEVELIUS, *Lib.* 3. *Cometogr. p.* 140. Si quis forte vero Cometa aliquando Lunam eclipſare conſpectus eſt, qualem apparuiſſe An. 1450. teſtatur *Georg.* PHRANZA, *lib. V. ſuæ Hiſtor. cap.* 21. (cujus tamen phænomeni fides ſit penes au-

Non eſt ſub Luna.

tho-

No. I.

thorem) reſpondemus , hos Pſeudo-cometas non magis eſſe Cometas, quam Stella cadens ſit vera Stella ; de talibus ſpuriis Cometis poteſt iterum conſuli Cl. HEVELIUS , *Lib. 7. p.* 387. ubi perperam inquit Cometas vocari , cum ſint tantum chaſmata & meteora ex impurioribus & craſſioribus ſolum exhalationibus compacta, qualia in ſingulorum Planetarum Atmoſphæris quotidie gignantur.

Nec intra Planetarum Syſtema.

Sed nec intra Planetarum Syſtema ſedes Cometarum ſtabiliri poteſt ; portio enim circuli , quam deſcribunt , dum nobis ſunt conſpicui , tam exiguæ convexitatis eſt , ipſeque proin circulus tam vaſtæ capacitatis , ut totum illud ſpatium Terram , vel potius Solem inter & Saturnum , nimis anguſtum ſit ad recipiendam intra ſe Cometarum orbitam ; quo fieret, ut Cometæ omnes ſucceſſive Planetarum orbes ſecarent & trajicerent, imo ipſis nonnunquam Planetarum corporibus illiderentur : quorum vero prius cum Vorticis rotatione, poſterius cum ſana ratione difficulter conciliabitur.

Sed ſupra Saturnum.

Immenſum ſpatium Saturnum inter & Fixas.

Unde concludimus, nullibi Cometas, quam ſupra Saturnum aptius locari poſſe, qua in re etiam Dn. CARTESIO calculum lubens addo. Quod vero ſufficiens , imo immenſum, intercedat ſpatium Saturnum inter & Fixas, ſic facile demonſtro: Clariſſimus Dominus HOOKIUS, celebris ille Aſtronomus Anglus, Parallaxin orbis magni in Fixa tertii honoris ad ſummum 30 ſecundorum deprehendit ; unde ſequitur ejus a Terra diſtantiam minimum continere 13751 ſemidiametris orbis magni. Quod ſi jam Fixa primæ magnitudinis (quam nobis omnium proximam , tantoque propiorem, quanto major e Terra conſpicitur, ſupponimus) ad Fixam tertii honoris in apparente diametro ſe habeat , ut 8 ad 3 ; in ſe vero utraque ſit æqualis circiter magnitudinis ; tunc ſequitur, illius a Sole diſtantiam ad diſtantiam hujus fore in ratione reciproca , ut 3 ad 8 , adeoque & proximam Fixarum a nobis adhuc diſtare 5156 ſemid. orbis magni. Et ſiquidem Saturnus vix decem talium ſemidiametrorum ſpatio a nobis abſit*, relinquitur, ut Saturnum inter & proximam Fixam ſpatium comprehendatur pluſquam 5146 ſemid. orbis magni.

No. I. Spatium hoc partem conſtituit Vorticis ſolaris.

Cum vero dubitari poſſit, an immenſum hoc ſpatium partem conſtituat Vorticis noſtri Solaris, an vero Vorticis alterius alicujus Fixæ; idcirco id porro calculo inveſtigandum eſt. Equidem cum Sol probabiliter Fixa non ſit minor, oportet, ut juxta placita CARTESII, Vortex Solaris quoque non ſit anguſtior Vortice alicujus Fixæ; atqui vero ſi Vortex Solaris mutilatur illo ſpatio, tum 39304 vicibus anguſtior erit Vortice Fixæ; quod ſic probatum damus. Parallaxis Fixæ primi honoris, juxta ipſius HOOKII obſervationem, 1 min. 20 ſecund. excedere nequit; quod ſi ergo Orbis magnus, qui hanc gignit parallaxin, in locum hujus Fixæ attolleretur, ejus viſibilis diameter quoque angulum 1 min. 20 ſec. ſive 80 ſec. & proin diameter orbis Saturni, non niſi angulum 13 min. 20 ſec. ſive 800 ſec. in oculo noſtro ſubtenderet; utpote vix decies major diametro orbis magni. Sumamus porro binas Stellas primi honoris, quas inter nullæ deprehenduntur aliæ, quarumque adeo Vortices immediate ſeſe contingere ſubſumuntur, cujuſmodi ſunt Capella & Lucida in humero dextro Aurigæ. Earum diſtantia in circulo maximo eſt 7½ graduum, quo ſpatio æqualiter in utramque Fixam diſtributo, Vortex utriuſque radium acquirit 3 gr. 45 min. diametrum vero etiam 7 gr. 30 min. id eſt, 450 min. aut 27000 ſec. Hinc diameter Vorticis Fixæ propemodum exceſſura eſſet diametrum Vorticis Solaris tricies quater, cujus numeri cubus eſt 39304; Unde ſoliditas illius Vorticis ſuperaret ſoliditatem hujus 39304 vicibus, quia globi ſunt in triplicata ratione ſuorum dimetientium. Cum ergo immanis hic exceſſus nullatenus rationi conſonus ſit, bene tandem concludimus, ſpatium illud Saturnum inter & Fixas non niſi Vorticis Solaris partem componere poſſe.

Videtur quidem, ſpatium hoc ad minimum æqualiter diſtribuendum eſſe inter Vorticem Solis & Vorticem Fixæ, nec totum Fixæ adimendum, ut totum Soli tribuatur: ſed velim conſideres, illud propter geminam rationem in calculo haud dubie longe proveniſſe anguſtius, quam reapſe eſt, 1°. Quia cum Dn. HOOKIO parallaxin orbis magni in Fixis nimis forte magnam

gnam aſſumſimus; cum tamen, valde incertum, an tanta quoque reperiatur; imo nullus Aſtronomorum hactenus ullam deprehenderit. 2°. Quoniam Fixam primæ magnitudinis æqualem ſuppoſuimus Fixæ tertiæ magnitudinis, cauſam majoris diametri apparentis unice rejicientes in propiorem diſtantiam; cum incertiſſimum ſit, an hæc unica diverſitatis aſpectus cauſa ſit, & nunquid potius etiam realis inæqualitas in Fixis reperiatur, qua fieri poſſit, ut Fixæ primi honoris quantumvis remotiores, tanta magnitudine conſpiciantur. No. I.

Unde probabiliter colligimus, longe majus ſpatium Saturnum inter & Fixas intercedere, quam aſſignavimus; ſic ut non omne demamus Vortici Fixæ primæ magnitudinis, etſi id omne, quod aſſignavimus, Vortici Solis tribuamus. Sed quicquid tandem ſit, totum illud, quod Soli forte nimium tribuimus, nullum omnino ſenſibilem in calculum errorem poſtea inducere capax eſt.

In domicilium ceſſit Cometis.

Ratum igitur eſto, Vorticis Solaris longe maximam adhuc partem reſtare ſupra Saturnum. Cum autem valde abſonum ſit, ſapientiſſimum Numen omnes Planetas in Vortice Solari prope centrum adeo arcte conſtipare voluiſſe, & tam immenſum ultra Saturnum in eodem Vortice ſpatium incolis vacuum reliquiſſe; hinc omnino colligo, probabiliſſimum eſſe, ſpatium hoc Cometis ceſſiſſe in domicilium.

Nec obſtat ulla Parallaxis.

Nec me moratur, quæ forte in Cometis obſervari poſſet, Parallaxis; per eam quidem demonſtrative evincitur, eos non eſſe ſub Luna; quanto vero adhuc intervallo ab illa ſurſum verſus diſtent, determinari prorſus nequit, Parallaxi jam in Sole propemodum evaneſcente: In Parallaxi enim tam exili, negotium adeo lubricum eſt, ut nihil omnino certi inde hauriri poſſit; nec proinde quicquam obſtat, quo minus Cometarum diſtantiam in infinitum augere nobis integrum ſit. Hanc parallactici negotii incertitudinem facile agnovit TYCHO, hinc *Lib.* I. *Progymn. de nova ſtella* 1572. p. 518. *Non omnia*, inquit, *quæ ſpeculative circa hæc rite ſe habent, propterea in praxim citra aberrationis ſuſpicionem applicantur; præſertim ſi ex minimis*

No. I. *mis magna ſtruas ; operam ut plurimum ludunt.*

Cæterum circa obſervationes Cl. HEVELII, qui Parallaxes Cometarum plerumque minores quam in Luna, & majores quam in Saturno ponit, animadverto; Viro Celeberrimo non tam propoſitum fuiſſe, ut contra CARTESIUM demonſtraret, Cometas non eſſe ſupra Saturnum, quam contra ARISTOTELEM, eos non eſſe ſublunares; id quod frequentes contra hunc invectivæ teſtantur, *Quo tandem Peripatetici reſipiſcant*, *Ut iis larva detrahatur*, *&c. Lib.* 3. *p.* 138, 148. *&c.* Idem quoque animadvertit CARTESIUS in aſſignatis a TYCHONE, aliiſque, parallaxibus; exiſtimat enim, cum diſputarent contra Veteres, qui Cometas inter meteora ſublunaria numerabant, illos contentos fuiſſe oſtendere Cometas eſſe in cœlo; nec auſos fuiſſe omnem, quam calculo deprehendebant, altitudinem iis tribuere, ne minus facile crederetur. Vid. *Princ. Philoſ. p.* 3. §. 41.

Ne tamen frigidiuſculo hoc ſubterfugio eludere velle videar vere herculeam, quam Clariſſimus HEVELIUS navavit in Parallaxium obſervationibus & calculo, operam; oportet illa accuratius examinare.

Exiſtimat Cl. HOOKIUS in *Conamine ſuo motum Telluris probandi*, aciem nudi oculi quantumvis acutiſſimi non poſſe quantitatem minuto primo minorem diſcernere, unde concludit, etiamſi Heveliana inſtrumenta multoties majora fuiſſent, ita ut ſingula minuta ſecunda, imo tertia, diſtinctè recepiſſent; quia tamen non niſi nudo oculo obſervationes inſtitutæ, hinc non potuiſſe præciſius quam in minutis primis haberi: quod tamen in tam ſubtili Parallaxium negotio nequaquam ſufficit. Quemadmodum igitur alibi Dn. HEVELIUS obſervationum Tychonicarum, quod ligneis duntaxat inſtrumentis peractæ, certitudinem extenuat; pari ratione & Tychonicas & Hevelianas, hac unica aſſertione, quod nudo oculo inſtitutæ fuerint, cum Dn. HOOKIO explodere liceret.

Sed demus, etiam accuratiſſime ad quina vel terna minuta ſecunda obſervationes inſtitui potuiſſe; per tot tamen ambages & anfractus in calculo incedendum, antequam deveniatur ad unicam

cam

Digitized by Google

cam Parallaxin, ut quamvis error in ſingulis obſervationibus ſit inſenſibilis, in connexione tamen & combinatione tot cauſarum ſupra modum fœcundus evadat. Ut memorem ſaltem, quam difficile ſit, Gedani, ſub ſphæra ſatis obliqua, vel ſolum tempus obſervationis genuinum ex reperta altitudine & azimutho Fixæ alicujus venari. Norunt enim, qui vel a primo limine Aſtronomiam ſalutarunt, quod quo obliquior ſphæra eſt, eo quoque obliquius paralleli æquatoris & circuli almucantarath ſeſe ſecant, & punctum interſectionis, a quo ſolo temporis exacta determinatio pendet, eo minus quoque præciſe haberi poteſt. Sed ſi porro ad Refractionem attendamus, jam totum negotium parallacticum de novo deſperatum corruit; eo quod refractiones, cum a phyſicis & mutabilibus dependeant cauſis, ſub calculum & certas regulas revocari omnino nequeant. Exhibet quidem Vir Cl. *Lib.* 4. *p.* 357. Tabellam Refractionum Cometicarum; ſed quam ipſe non ex certo fundamento, verum pro arbitrio ſuo adornavit, tribuendo Cometis refractiones paulo minores quam Lunæ, & paulo majores quam Fixis; cujus rei hanc allegat cauſam, quod Cometæ plerique in Planetarum regione, id eſt, ſupra Lunam & infra Fixas ferantur; ubi manifeſtum committit circulum, dum ſupponit tanquam indubitatum, Cometas verſari in Planetarum regione; quod demum, ſubducta refractione, & cognita Parallaxi, determinandum fuiſſet. No. I.

Negotium parallacticum in praxi incertiſſimum eſſe, certiſſimo nobis porro argumento eſt, quod etiam accuratiſſimi Obſervatores, TYCHO nempe & ipſe HEVELIUS, in aſſignandis diſtantiis Planetarum, quos tamen non rariſſime, uti Cometas, ſed quotidie fere, obſervare contingit, immane quantum adhuc a ſeipſis diſſideant; dum TYCHO Solis ex. gr. parallaxin 2 min. 53 ſec. Cl. HEVELIUS autem non niſi 39 ſec. 17 tert. reperiit, & ſic in cæteris; unde HEVELIUS plerumque quinquies majorem diſtantiam cuique Planetæ tribuere cogitur, quam fecit TYCHO. Quare ubi Aſtronomi aliquot minutorum in Cometis Parallaxin obſervaſſe ſibi nonnunquam videntur; eam omnem differentiam exiſtimo potius inevitabili errori,

No. I. in calculo ex inſenſibilibus minutiis inſuper habitis ſemper oborienti, adſcribendam eſſe.

4 De Cauda. IV. Reſtat, ut de Cometarum *Cauda* aliquid adjiciamus. Eam perpetuo in plagam Soli oppoſitam vergere, *Petrus* APPIANUS primus deprehendit in Cometa anni 1531, uti liquet ex ejus *Mathematico Cæſareo*; poſt quem idem obſervarunt *Hieron.* FRACASTORIUS, GEMMA & *Cornelius* FRISIUS, Aſtronomique ad unum omnes in ſingulis ab illo tempore Cometis; quo ipſo, ceu individua proprietate, Cometæ nullo proprio ſe lucere lumine, ſed omne Solis radiis acceptum ferre, manifeſto utique argumento produnt. Quam caudæ dependentiam & affinitatem cum Sole etiam prædicti Authores agnoverunt. Quamvis enim cauda non ſubinde adeo accurate diametralem oppoſitionem obſervet, quin ab illa nonnunquam tres & amplius gradus boream verſus deflectat; ea tamen declinatio ex ſententia Authoris Gallici initio nominati, per refractionem in Atmoſphæra noſtra verſus utrumque polum denſiore quam ſub æquatore, commode ſatis excuſari poteſt.

Difficultas tantum in eo reſtat, ut explicetur, quare cauda perpetuo in Solis oppoſito conſpiciatur, & qua ratione lumen ſolare illi communicetur? cujus rei cauſam redditurus Author modo dictus, corpus aut caput Cometæ ſibi fingit diaphanum, globi vitrei inſtar, ſubſcribens in hoc ſententiæ APPIANI, CARDANI, ipſiuſque TYCHONIS; alii vero ſimili ratione illud hiatibus & foraminibus patere ſunt perſuaſi, per quæ tranſeuntes radii ſolares in æthere poſt Cometam in formam caudæ ſeſe pingant. Sed abſurde & ridicule. Nam 1°. ſi per globum vitreum negotium expediendum ſit; tum crines cometici, dioptrica id demonſtrante, ſemper in conum acuminatum coibunt, atque exinde non niſi caudis cuſpidatis lucerent; quod tamen experientiæ Cometæ nuperi repugnat, qui coma calathoide fulſit. 2°. In puriſſima & pellucidiſſima aura ætherea, radii ſolares liberum inveniunt tranſitum, nec proinde in illa conſpici poſſunt, quemadmodum in corpore opaco, a quo ſiſtuntur, inque oculum noſtrum repercutiuntur. Id quotidie teſtatur lumen

men per foramen vel lentem vitream in conclave incidens, id enim non pingitur in pellucido aëre, quem permeat, ſed in adverſo duntaxat pariete vel pavimento. Verum quidem eſt, pulviſculos per aerem volitantes, & radiis ſolaribus percuſſos, debile quoddam lumen in oculos noſtros reflectere; an vero in puriſſimo & defæcatiſſimo æthere tales dentur, quales in aere noſtro, pulviſculi; & ſi darentur, an hæ minutiſſimæ atomi e tanta diſtantia tam inſignem in terram ſplendorem vibrare queant, valde dubito; & ſi poſſent, quæ quæſo ratio foret, cur coma præciſe tantum a parte Cometæ averſa, nec ab omni ejus latere continenter ſpargeretur; imo quare non ſingulis noctibus totus aer Cometæ in modum collueeret, ſiquidem perpetuo totus, excepto ſolo, qui cono umbræ Planetarum involutus eſt, a Sole illuminetur. Si vero ſæpe dictus Author Gallicus regerat, ſpiſſiorem eſſe materiam, quæ radios ſolares excipiat; ejus ſane eſt explicare, quid illa ſit; needum ſoluta foret quæſtio, quare hæc materia ſubinde averſam a Sole plagam peteret. No. I.

Quibus argumentis ſequens omni exceptione majus adjungo: Poſito, Cometas Sole (imo forte Saturno) altiores, uti ſupra laudatus Author mecum concedit; tum ſi cauda generatur ex radiis Solis per foramina vel pellucidam nuclei materiam tranſeuntibus, neceſſario ſequitur illam fore breviſſimam circa tempus conjunctionis cum Sole, longiſſimam autem in quadraturis; cui tamen hodierna experientia e diametro repugnat. Id ſibi quiſque facile perſuadebit, conſiderans, caudam, in conjunctione, radio viſivo parallelam excurrere debere: quod ex ſchemate, Terra exiſtente in *b*, Sole in *a*, & Cometa in *c*, liquido patet. *Tab. I. Fig. I.* In quadraturis autem, cauda quidem ſitum parumper acquireret transverſum, nec tamen angulum 5 gradibus 42 min. majorem in oculo ſubtendere poſſet, etiamſi reapſe in infinitam excurreret longitudinem; quod ut calculo experiamur, Sole exiſtente in *a*, Terra in *d*, & Cometa prope Saturnum in *c*, ita colligendum eſt: ut Radius orbis magni *a d*, ad diſtantiam Saturni a Sole *a c*, (i. e. ut 1 ad 10) ſic ſinus totus *a d*(100000) ad rectam *a c* (1000000), Tangentem anguli *c d a*, 84 gr.

 18 min.

No. I. 18 min. cujus complementum ad quadrantem eſt ang. *c d' e*, 5 gr. 42 min. atque ita cauda Cometæ infinitæ longitudinis vix angulum 5 gr. 42 min. in oculo efficeret.

Quæ ſit CARTESII de cauda Cometarum mens, & quo pacto rem per preſſionem inæqualium globulorum explicet, hauriri poteſt ex ejus *Principiis*, *Part*. 3. §. 133. *&c.*

Cæterum, quia Barba vel Cauda Cometarum phyſicæ duntaxat conſiderationis, & ad motum Cometarum, quem ſolum nobis enucleandum propoſuimus, parum facit; hinc non mihi vitio verti poſſet, ſi ea de re omnino tacerem. Ne tamen & hac in parte Lectori benevolo deeſſe videar, infra mentem meam de illa explicabo.

Syſtema Authoris. Itaque ut tandem aliquando ad rem ipſam deſcendam; juxta allatas hypotheſes, tale mihi mundi ſyſtema formo. Ante omnia cum Excell. CARTESIO ſuppono, ſapientiſſimum mundi Opificem materiam totius univerſi in plurimos diviſiſſe Vortices, inque centro cujuſque Vorticis Fixam poſuiſſe, quam circa totus Vortex, non ſecus ac circa axem rota, ab occaſu in ortum gyretur. Fixam Vorticis noſtri appellamus Solem; Ipſe vero Vortex, quem inde *Vorticem primarium* vel *Solarem* nuncupare Iubet, in plures orbes ceu totidem concamerationes ſubdiviſus, Planetis in domicilium ceſſit: Infima quidem & Soli proxima concameratio Mercurium excepit, altera Venerem, tertia Tellurem, Martem quarta, Jovem quinta, ſexta Saturnum, extima denique & ſuprema Cometas. Iſti vero Planetæ omnes in eo conveniunt, quod non ſint corpora diaphana vel pellucida, ſed ſolida, opaca & radiis ſolaribus impervia; dein, quod non propria luce fulgeant, ſed illam omnem a Sole ceu Fixa ſua mutuentur: In ſchemate adjecto littera *a* Solem exhibet: *b d*, Orbem magnum ſeu annuam orbitam Terræ: *m n*, orbitam Saturni: *f g*, partem orbitæ cometicæ.

Tab. I. Fig. I.

In hac ultima orbita punctum aſſumo *f*, ſuper quo plures deſcribo peripherias concentricas, ut *h r*, *x l*, *o p*, &c. & unicuique illarum peculiarem Cometam inſero, quapropter totam periphe-

ripheriarum compagem *Cometarum Vorticem* nuncupabimus. Unde liquet, duplici Cometas moveri motu, partimque rotari in proprio Vortice circa punctum *f*, partim, una cum *f*, a Vortice ſolari abripi circa Solem *a*, plane ut Jovis Satellites, non modo in epicyclo circa Jovem, ſed & totus epicyclus, una cum Jove & Satellitibus, a Vortice ſolari, tanquam a deferente ſuo, circa Solem ipſum abripiuntur. Itaque Cometæ nil aliud ſunt, quam Planetæ ſecundarii puncti *f*, quod punctum haud dubie ab alio Planeta primario occupatur, qui vero tum ob corporis exiguitatem, tum ob immenſam diſtantiam, conſpectum noſtrum perpetuo fugit; quæ cauſa quoque eſt, quare Cometæ tum demum videri incipiant, cum ad perigæum ſe demittunt, nobiſque proximi evadunt. No. I.

Quod vero punctum *f*, ſeu centrum Vorticis Cometici, mobile quoque ſit circa Solem *a*, in dubium amplius revocari nequit, poſtquam probatum fuit, ſpatium quod occupat, conſtituere partem Vorticis ſolaris, & conſequenter cum toto reliquo Vortice ab occaſu in ortum abripi: quod ſi enim immotum perſiſteret, Fixa potius eſſet quam Planeta, nec pars foret Vorticis ſolaris, ſed peculiarem conſtitueret Vorticem. Porro ſi punctum *f* quieſceret immotum, ſequeretur neceſſario, nullum Cometam motu ſuo ſex integra ſigna abſoluturum: Concipe enim portionem circuli *r h*, quam Cometa ab una ſtatione ad alteram deſcribit, tam parum habere convexitatis, ut lineæ rectæ quam ſimillima ſit: imo ipſam rectam concipe utrinque infinite extenſam; tum quidem angulus *r b h* vel *r i h* (qui ab utroque ejus termino in oculum noſtrum incurrit) duobus rectis ſeu 180 gradibus magis magiſque appropinquat, nunquam vero eos omnino attingit, eo quod tangentes anguli recti oportet utrinque in infinitum excurrant.

Et hæc ratio eſt, quare ſæpe laudatus Author Gallicus ſibi perſuadeat, Cometam nunquam ſex integra ſigna emetiri poſſe; quoniam haud dubie centrum Vorticis Cometici immobile concepit; unde quoque factum, ut ſtationem Cometæ nuperi perigæo ſuo nimis propinquam, nempe in baſi Trianguli borealis

No. I. realis fixerit, quem tamen terminum novem gradibus ortum verſus fuit prætergreſſus. Verum enim vero ſi punctum *f* mobile faciam, cauſam erroris ei pulcre monſtrabo: Pone enim, dum Cometa in orbita ſua arcum *c h* percurrit, punctum *f* interea in *g* uſque prorepere, manifeſtum erit, motum Cometæ proprium in orbita *c h*, per motum puncti *f*, additamentum nanciſci, quo fit, ut prior motus quoad viſum noſtrum tantumdem acceleretur, quantum prorepſerit punctum *f*, oculuſque noſter in *i* conſtitutus ſtationem Cometæ non amplius in *h* (uti alias fieret, ſi punctum *f* omni motu foret deſtitutum) ſed ulterius & in *q* deprehendat.

Enimvero, ſi porro conſideremus, orbitarum cometicarum *hr*, *xl*, *op*, &c. nonnullas, centro *f* propiores & minores, nonnullas ab illo remotiores & majores eſſe; nonnullas velocius, alias tardius incedere debere; hinc rationem perſpiciemus, cur nonnulli Cometæ majorem cœli arcum, alii minorem deſcribant, & cur alii aliis in motu ſuo plus inſumant temporis. Si perpendamus quoque, non neceſſe eſſe, ut diverſæ hæ orbitæ Cometicæ in eodem cum Ecliptica plano exiſtant; ſed fieri poſſe, ut illam ad angulos nunc minores, nunc majores, imo nonnullæ ad angulos omnino rectos decuſſent, non ſecus ac duo orbes orthogonaliter ſibi impacti, quales in ſphæra armillari ſunt ambo coluri; jam patebit ratio, cur Cometæ alii aliis plus minuſve ab Ecliptica declinent, imo nonnulli ab uno polo ad alterum recta tendere neceſſum habeant. Inſuper quia nulla neceſſitas cogit, ut planum orbitæ Cometæ alicujus oculum quoque noſtrum implicet; hinc manifeſta deducitur ratio, cur Cometa non ſemper in circulo maximo incedere, aut rectam ſubinde lineam, ſed aliquando curvam deſcribere videatur. Denique quia non impoſſibile eſt, ut orbita unius Cometæ ab occaſu in ortum, alia ab ortu in occaſum rapiatur; quid mirum eſt, quod Cometa noviſſimus ſecundum ſignorum ſeriem, Cometa vero anni 1664 contra eandem inceſſerit. Quia tandem centrum Vorticis cometici probabiliter aut in plano eclipticæ aut æquatoris exiſtit, aut certe non longe ab utroque diſtat; hinc ratio reddi

reddi poteſt, cur nullus unquam viſus fuerit Cometa, qui non aut eclipticam, aut æquatorem, aut utrumque trajecerit. No. I.

Mens Authoris de Cometarum Cauda. Tab. I. Fig. 2.

His præmiſſis, antequam ulterius pergam, de formatione caudæ Cometarum, quæ mentem meam ſubierunt, hic interſpergam: Solem *a* in medio Vorticis ſui, tanquam ignem in foco accenſum, concipio, cujus calore circumfuſi Planetæ omnes aſſidue quaſi coquuntur; unde perpetuo magna ſubtiliſſimarum exhalationum copia 1. 2. 3. 4. &c. undiquaque ex Planetis, ut & ex ipſo Sole egreditur, & a motu rapidiſſimo Vorticis ſolaris ſurſum verſus circumferentiam propellitur; quo cum pervenerunt hæc effluvia, a renitentia vicinorum Vorticum *ac*, *de*, *&c.* repelluntur & impediuntur, quo minus ulterius ire queant; hinc quia ſubinde nova materia affluit, paulatim condenſantur, & Planetis ſupra-Saturninis *m*, *n*, (tum vero nondum exiſtentibus Cometis) dum per ſummam apſidem vel aphelium *g* rotantur, & circumferentiæ Vorticis ſolaris proximi ſunt, adhærent; non ſecus ac cum ſuper igne focario ſuſpenſa eſt olla carnibus repleta, fumus, e ligno carnibuſque aſcendens, camino, trabibus, &c. & quicquid ſolidi & compacti offendit, agglutinatur, unde fuligo gignitur; ſic, inquam, in modum fuliginis exhalationes viſcoſæ Planetis accreſcunt, illoſque undique ſatis denſiuſcule ambiunt ac cingunt; unde fit, ut nuclei Cometæ extremitas ſeu limbus plerunque male terminatus, & quaſi diffluens aut criſpus videatur, fuliginis inſtar. Tum vero in progreſſu, dum Planeta in ſuo epicyclo vel orbita circa centrum *f* volvitur, ſubinde novæ exhalationes (verum longe tenuiores, quam quæ ipſum immediate ambiunt, quod ob defectum ſolidi fundamenti nequeant tam arcte conſtipari) ei adhæreſcunt, longe lateque, omni ex parte, circa illum ſeſe extendentes; non quidem in modum globi, ſed lati diſci, ea lege, ut dum in circumferentia orbitæ ſuæ circa *f* movetur, nihilominus perpetuo alterutra diſci planities Soli obverſa maneat, radiique ſolares in nucleum incidentes cum diſco perpendiculares angulos efforment; plane ut nubes circa Terram normaliter expanſæ feruntur: cujus ratio peti poteſt ab æquali preſ-

No. I. preſſione globulorum materiæ cœleſtis, qua materia hæc diſciformis, ceu ad bilancem appenſa, in perpetuo conſervatur æquilibrio, ut neutra ex parte Solem verſus magis inclinare poſſit, quam ex altera. Qua quidem directione ad Solem fit, ut planities diſci, non niſi in perihelio *P*, parallela ſit circumferentiæ orbitæ ſuæ *RH*; in cæteris autem locis angulo ſubinde variabili, nunc minori, nunc majori eam ſecet, &c. Quo motu libratorio non male adumbrat motum inclinationis Telluris, quo perpetuum ſervat cum axe mundi parallelifmum.

Cur vergat in Solis oppoſitum? Poſita hac diſci directione ad Solem, manifeſta redditur ratio, cur cauda perpetuo in plagam Soli oppoſitam vergat; nam quamvis totus ſimul a Sole illuminetur diſcus, non tamen niſi pars illa diſci, quæ noſtri reſpectu, cis nucleum, & quidem in eodem nobiſcum & cum Sole plano exiſtit, radios ad oculum noſtrum reflectit; reliquis ex adverſo & a latere Cometæ alio repercuſſis; ita ſi Sol exiſtat in *S*, Terra in *T*, diſcus Cometæ autem ſit *lo*, nucleus *c*; recta *Sc* radius Solis nucleum normaliter feriens; manifeſtum eſt, non niſi radios in partem diſci *cl* incidentes in partem Solis citeriorem, adeoque in Terram *T*, reflecti poſſe; dum illi, quos excipit pars diſci *co*, alio, ultra Solem, in *p* repercutiuntur. *Tab. I. Fig. 3.*

Notandum interim, cum exhalationes omni ex parte nucleo adhæreſcere diximus; id non adeo præciſe intelligendum, quaſi nucleus undiquaque æquali ſemper exhalationum cingi copia, centrumque diſci occupare debeat: poteſt enim fieri, ut ab altera parte, plus aut minus materiæ illi accreſcat, prout ex hac vel illa plaga plus aut minus materiæ affluit: Ita quamvis cauda noviſſimi Cometæ 70 plus minus gr. ſubtenderat, non tamen ſequitur, eam circum circa tot graduum ſpatium occupaſſe; fieri potuit, ut a parte oppoſita, vel a latere, modicum ſaltem materiæ, vel plane nulla adhæſerit. Et hinc petitur ratio, cur non neceſſe ſit, ut idem Cometa, viſus mane ante Solis ortum, & veſperi poſt ejus occaſum, eadem ſemper comæ longitudine ſit conſpicuus.

Tandem vero, ut ad ſpecialem noviſſimi Cometæ enucleatio-

tionem deſcendamus, oportet duo puncta cardinalia ante omnia data ſint, nimirum ejus *Perigæum*, & *Statio*.

No. I. Cometæ nuperi conſideratio.

Perigæum Cometæ.

Perigæum Cometæ ita reperio: Quoniam univerſi Cometæ a perigæo (vel potius perihelio ſuo) ante & retro æquali tempore æquales arcus deſcribant neceſſe eſt; tria nobis conſideranda Cometæ noſtri loca, æquali ab invicem ſpatio remota, ea conditione, ut tantum præciſe temporis a primo ad medium, quantum a medio ad ultimum, tranſeundo impenderit. Eorum locorum invenio unum in 10 gr. ♏ long. & 2 gr. latit. auſtral. quem locum Cometa occupavit 24 Novemb. 1680. Alterum in 0 gr. 20 min. ♒ long. & 21 gr. lat. bor. in quem Cometa incidit 20 Decembr. Tertium in 28 gr. 20 min. ♈. long. & 20 gr. 30 min. lat. bor. quem Sol pertranſiit 15 Januar. 1681. Abſolvit enim Cometa utrobique ſpatio 26 dierum, $81\frac{1}{2}$ gr. Quocirca Perigæum ejus extitiſſe æſtimandum eſt loco medio, nempe 20 Decemb. in 0 gr. 20 min. ♒. Iſto quidem die Cometa, non tam procera cauda ac ſplendida luce fulſit, quam biduo ante, 18 Decemb. cujus vero apparentiæ ratio eſt haud dubie, quod tum partim a Sole longius diſtaret, partim lumen ejus ſplendore creſcentis Lunæ jam hebetari & infringi inciperet. Quod vero Perigæum ab Authore Gallico in locum adhuc novenis gradibus orientaliorem, nempe in 8 gr. 45 min. ♒ long. rejiciatur, quo Cometa non niſi $\frac{22}{1}$ $\frac{\text{Dec.}}{\text{Jan.}}$ & ſic biduo tardius appulit, excuſari omnino nequit; quare autem id facere coactus fuerit, facile divinare licet; quippe ſi Perigæum mecum fixiſſet in 20 Dec. tum ei concedendum foret, Cometam a Perigæo ad ſtationem plus quam quadrantem emenſum fuiſſe; id quod Galli hypotheſibus adverſatur.

Statio.

Ad *Stationem* porro Cometæ quod attinet, eam deprehendi 7 Februar. S. V. medio loco inter Apem & Algol; ſic ut a Perigæo ad ſtationem ſuam, ſpatio vid. 49 dierum, 99 gr. 51 min. in circulo maximo percurrerit.

Motus apparens Cometæ compoſitus.

Motus vero iſte (uti ex ſupra dictis proclive eſt colligere) ex duobus vel tribus potius motibus conflatus eſt; ſcil. primo e

No. I. Tab. I. Fig. I. motu Cometæ proprio in orbe ſuo *r h*, a *c* in *h*; dein e motu Vorticis ſolaris deferentis Vorticem Cometicum ab *f* verſus *g*; tandemque e motu Telluris ab *f* in *i*. Quando igitur motus proprius Cometæ in orbe *r h* ſeparatim explorandus venit, tum additamentum, quod illi a reliquis binis motibus ſpatio 49 dierum ſuperaccedere poteſt, ſubducendum eſt a 99 gr. 51 min.

Ex motu Terræ annuo. Augmentum quidem, quod motui huic accedit a tranſlatione Telluris in orbe magno *f b i*, oppido exiguum eſt, propter immenſam diſtantiam puncti *f*, quod ſic accipe: Terra exiſtens in *f* Perigæum Cometæ habet in *t*, ipſumque Cometam in Ecliptica obſervat tanquam in *y*. Interim dum Cometa arcum *t h* percurrit, transfertur Terra ab *f* in *i*, emetiens ſpatio 49 dierum, arcum totidem circiter graduum, atque ita ſtationem Cometæ animadvertit in *h*; ipſum vero perigæum hoc in ſitu haberet quidem citius quam in *t*, nempe in *u*; in hoc tamen perigæo Cometa illi appareret orientalior tanquam in *z*. Quare angulus *z f y* a 99 gr. 51 min. ſubducendus eſt ad habendum verum Cometæ motum, quatenus e quieſcente alias in *i* Terra obſervaretur.

Aſſumto ergo ſpatio, quod Saturnum inter & Fixas interjacet, 5146 ſemid. orbis magni, pro diametro Vorticis Cometici; ejus ſemidiameter, ſive diſtantia centri Vorticis *f* ab orbita Saturni, erit 2573 ſemid. orbis magni, ejuſque proinde a Sole *a* remotio, 2583 & a Terra *f*, *b*, aut *i*, 2584 ſemid. orbis magni. Quocirca in Triangulo *f f i*, ita colligo:

Ut diſtantia *f s*, aut *f i*, 2584 ſem. orbis magni, ad rectam *f i*, ſubtenſam anguli *f a i*, 49 circiter graduum, nempe 82938: ita *a s*, aut *a i*, 1 ſemid orbis magni, ad 32, ſubtenſam anguli *s f i*, aut *z f y*, unius tantum ſcil. circiter minuti. Quare Perigæum e ſtatione Terræ *i* conſpectum, unico duntaxat minuto orientalius appareret, quam conſpectum e ſtatione *s*.

Calculo hoc Trigonometrico reperitur porro angulus *t s u*, trium circiter graduum, ad quos abſolvendos Cometa non plane integrum inſumſit diem; quapropter Cometa Terræ exiſtentis

tis in *i* unico die citius, quam exiſtentis in *s*, perigæum ſubit. No. I.

Ut ergo inæqualitas, quæ e motu Terræ annuo propullulat, reducatur; addendus dies unus diebus 49; contra ſubducendum 1 minutum prim. a 99 gr. 51 min. ſic reſtabunt 99 gr. 50 min. quem arcum Cometa 50 dierum ſpatio deſcripſiſſe cenſendus eſt.

E motu deferentis Vorticem Cometicum.

Hinc vero porro ſubtrahendus motus puncti *f*, quod ita intelligendum: E ſchemate manifeſtum eſt, omnium orbitarum cometicarum perigæa, vel potius perihelia, exiſtere debere neceſſario in linea recta a Sole ad commune centrum orbitarum *f* ducta: Unde concludere proclive eſt; ſi Cometæ omnes eodem tempore perigæa vel perihelia ſua ſubirent, eodem Zodiaci loco omnes reperti, mutuam ibi inter ſe conjunctionem efficerent. Cum itaque ex. gr. Cometæ anni 1664 Perigæum contigerit 20 Decemb. in 20 gr. ♊. nuperi vero Cometæ Perigæum anno 1680, etiam 20 Decemb. in 0 gr. 20 min. ♒, perinde eſt ac ſi dicerem, Lineam Perigæi *f a*, adeoque & ipſum punctum *f*, interea temporis, nimirum, ſedecim annorum Julianorum, aut dierum 5844 ſpatio, a 20 gr. ♊ ad 0 gr. 20 min. ♒, id eſt, per arcum 220 gr. 20 min. prorepſiſſe.

Notandum vero, fieri bene potuiſſe, ut punctum *f*, intra dictum tempus, Zodiacum ſemel vel aliquoties integrum emenſum fuerit; an vero & quoties id factum, ſic indagabo: Siquidem certum ſit, a 99 gr. 50 min. motu nimirum compoſito e motu proprio Cometæ & motu puncti *f*, tantum adhuc arcum ſubducendum eſſe, ut reſiduum, quod motum Cometæ proprium exhibebit, quadrantem non excedat; hoc poſito, animadverto, puncto *f*, intra dictos 16 annos, non pauciores quam tres revolutiones integras tribuendas; ſi enim duas tantum ei largiaris, & præterea arcum ſupra dictum 220 gr. 20 min., id eſt, in univerſum 940 gr. 20 min., tam 50 dierum ſpatio, quos impendit Cometa a Perigæo ad ſtationem ſuam, punctum *f* non niſi 8 gr. 3 min. prorepſiſſet, quibus a 99 gr. 50 min. ſubductis, plus quam quadrantem habebis in reſiduo. Si viciſſim ponamus, punctum *f*, interea temporis, quater aut pluribus vicibus integrum Zo-

No. I. diacum permeaſſe; tum arcus ſubducendus, qui 50 diebus reſpondet, nimis evaderet magnus, quo fieret, ut Cometarum apparitiones non tam raræ, ut ſunt, verum longe frequentiores eſſent, ut ex infra dicendis patebit.

Ratum itaque maneat, punctum *f*, 16 annorum ſpatio, 220 gr. 20 min. & inſuper integrum Zodiacum ter peragrare; atque adeo annis 4, diebus 157, unam abſolvere revolutionem; 50 vero dierum ſpatio, arcum 11 gr. 7 min. deſcribere. His ergo ſubductis a 99 gr. 50 min., in reſiduo manebunt 88. gr, 43 min. pro motu Cometæ proprio in orbita ſua *u h*, id eſt, pro angulo *f i h*.

Et hoc cum principiis ſubtiliſſimi CARTESII apprime convenit; is enim demonſtrat in *Princ. Phil. part.* 3. §. 82. velocitatem gyrationis Vorticis a Sole ſubinde langueſcere ad certum uſque terminum, nempe orbitam uſque Saturni; ultra quam iterum incrementum ſumat, ut antea decreverat; ſic ut nil abſurdi ſit, centrum Vorticis Cometarum *f*, intra annos 4 & dies 157, unam circa Solem revolutionem abſolvere; etiamſi Saturnus nobis ducenties quinquagies octies propior, id non niſi 30 annorum ſpatio præſtet.

Tabella motus Perigæi. Quocirca ſuper hanc hypotheſin conſtruxi, quam pag. 27. adjectam conſpicis, *Tabellam motus Perigæi*; e qua motus ejus diurni quantitas pro ſingulis diebus pateſcit. Ejus uſus in eo conſiſtit, ut dato tempore apparitionis Cometæ, prædici poſſit, quo loco Zodiaci tempore Perigæi ſui appariturus ſit; quod ſic inveſtigabitur: Sume numerum dierum ab Epocha Tabellæ, nempe a 10 Decemb. 1680, ad datum tempus elapſorum; iiſque in articulos diſſectis, pro millenariis, centenariis, denariis & monadicis, gradus & minutias competentes e Tabula deprome, eoſque in unam ſummam collige, indeque integrum circulum, quoties fieri poterit, abjice; reſiduum tibi patefaciet, quantum arcum Zodiaci linea Perigæi emenſa ſit, incipiendo a 0 gr. 20 min. ♒ & ſecundum ſignorum ſeriem progrediendo.

E motu proprio. Poſtquam itaque ſubducto arcu 11 gr. 7 min. (quem centrum

trum Vorticis Cometici intra 50 dies, indice Tabella, deſcripſit) comperio, pro Cometæ motu proprio relinqui angulum *f i h*, 88 gr. 43 min. inde porro ratio iniri poterit, quantum arcum dicto tempore Cometa ſuper centro *f*, & in proprio ſuo orbe *u h*, deſcripſerit. Eum in finem conſidero triangulum *f h i*, ejuſque angulum datum *f i h*, 88 gr. 43 min. Triangulum hoc, cum ſit orthogonium ad *h*, oportet ut angulus obliquus *h f i* ſit dati obliqui *h i f* complementum, nimirum 1 gr. 17 min. Quare Cometa a Perigæo ad ſtationem ſuam ſuper proprio centro arcum 1 gr. 17 min. deſcripſit; unde ſic colligo: Si 1 gr. 17 min. Cometa ſpatio 50 dierum abſolvit; quantum inſumet temporis ad abſolvendam integram periodum? Facit, annos 38, dies 147. *Cometam igitur hunc ipſum in Perigæo ſuo denuo videbimus* (Deo volente, nobiſque viventibus) *anno Chriſti* 1719, *die* 27 *Maii, S. V. & quidem in* 1 *gr.* 12. *min.* ♎. *

No. I. Tab. I. Fig. I.

Futura apparitio Cometæ noſtri An. 1719.

Præterea, quia admodum probabile, imo neceſſarium eſt, ut Cometæ in propria ſua orbita perpetuo æqualiter incedant (cur enim motui corporum cœleſtium & æternorum, qualia ſupponimus eſſe Cometas, ſine ſontica cauſa inæqualitatem & irregularitatem affingeremus?) ideo motus Cometæ diurnus nobis innoteſcet, dummodo arcum *u h*, 1. gr. 17 min. in 50 æquales partes dividamus (NB. in ſchemate arcus *u h*, ob ſpatii anguſtiam, in quinas duntaxat partes diſtributus) ſic provenient pro ſingulis diebus 1 min. 32 ſec. Unde porro in Triangulis *α i u*, *β i u*, *γ i u*, *δ i u*, &c. arcus vel anguli, quos Cometa quotidie, penes *i*, in oculo noſtro format, calculo trigonometrico eliciendi; quos quidem aliis ſupputandos relinquo, id ſolum advertens, ut pro quolibet die additamentum, e motu puncti *f* reſultans (quod e Tabella motus perigæi depromi poterit) adjiciatur.

Non quidem mihi adeo ſum Suffenus, quin circa has meas allatas

* *Authoris prædictionem eventu confirmatam non fuiſſe nemo neſcit. Videatur tamen Reſponſio ad Object.* I. *pag.* 28. [Nota Editor.]

No. I. allatas hypotheſes, multas adhuc & magnas difficultates ab Aſtronomis detectum iri perſuaſiſſimus ſim; ſed confido tamen, eos facilem Authori daturos veniam, ſi perpendant, omne, ut vulgo aiunt, principium grave eſſe; nec omnibus numeris abſolutum Cometarum' ſyſtema ita ex abrupto, & manibus, quod aiunt, illotis, ſed poſt accuratiſſimas demum obſervationes & poſt longam earum ſeriem expectandum: Sufficiat mihi, hoc qualicunque conamine aliis majori inſtrumentorum apparatu inſtructis, & in hac arena verſatioribus anſam dediſſe, ut in rem ipſi inquirerent, & ſyſtema mancum adhuc & mutilum, ſi fieri poſſet, ad perfectionem deducerent. Quod ſi eventus prædictioni meæ ſuo tempore reſpondere deprehendatur, tum meæ hypotheſi tuto inſiſti poterit; ſin minus, unicuique integrum erit addere, demere, mutare, corrigere pro lubitu. Quoniam vero magnum adhuc couſque reſtat temporis intervallum; optandum eſſet, ut aliorum Cometarum (quorum apparitiones jam dudum elapſæ, veluti Cometarum an. 1652 & 1664) motus periodici calculo ſubjicerentur; quod feciſſem ipſe, ſi ſufficientes eorum obſervationes ad manus habuiſſem.

Syſtematis cum apparentiis convenientia. Sed quicquid tandem ſit de hypotheſi mea, certum eſt, pleraſque inæqualitatum & irregularitatum apparentias, in Cometis deprehenſas, exinde ſic ſatis commode deduci poſſe. Hinc enim evidens ratio redditur;

1. Cur Cometæ nonnunquam plus 6 ſignis, vel ſemicirculo perluſtrent?

2. Cur nullus detur Cometa, qui non trajiciat aut Eclipticam, aut Æquatorem, aut utrumque.

3. Cur Æquatorem aut Eclipticam tam diverſis ſecent angulis, aliqui obliquius, alii rectius, nonnulli etiam ad angulos omnino rectos.

4. Cur nodus Eclipticæ & Orbitæ Cometicæ ſit mutabilis?

5. Cur oculorum noſtrorum judicio non ſemper lineam rectam vel arcum circuli maximi deſcribant?

6. Quare nonnulli ſeriem 12 ſignorum obſervent, alii contra illam incedant,

7. Cur

7. Cur Perigæa non eodem omnes Zodiaci loco fixa habeant? No. I.

8. Quare aliqui plures, aliqui pauciores gradus motu diurno emetiantur?

9. Cur nonnulli, a primo apparitionis tempore ad ſtationem uſque ſuam vel diſparitionem, arcum majorem, alii minorem deſcribant?

10. Cur cauda perpetuo in partem a Sole averſam tendat?

11. Poſſe fieri, quamvis rariſſime fiat, ut duo, tres, pluresve Cometæ ſimul appareant.

12. Poſſe prædici, quando quiſque Cometa denuo ſit appariturus.

13. Et quo in loco Perigæum ſuum habiturus ſit? &c.

Exhibentur nunc in Tabula diurnæ obſervationes Cometæ noviſſimi, quas cœlo quidem ſereno mihi depromere licuit; & quamvis ob inſtrumentorum neceſſariorum defectum nudis tantum oculis & per filares extenſiones factæ, ſatis tamen accurate obſervationibus ſæpe laudati Authoris Gallici reſpondent: Non neceſſarium viſum fuit, eas ſchemate depictas hic exhibere, quia tales iconiſmos vulgus, non ſecus ac lyram aſinus, intueri ſolet; aſtronomiæ vero vel leviter periti, ex ſolis longitudinibus & latitudinibus hic annotatis, lineæ a Cometa deſcriptæ veſtigia globo ſuo cœleſti ipſimet imprimere facillimo negotio poſſunt.

Obſer-

Digitized by Google

Obſervationes Cometæ annorum 1680. & 1681.

1680. Menſ. & Dies. St. N.	St. V	Long. S: o. l.	Latit. o. l.	Motus diurnus. o. l.	Motus à Perigæo in ſumam collectus. o. l.	
Dec. 4	Nov. 24	♏ 10. 0.	2. 0. A.	76. 40.	81. 30.	Obſervatio eſt Cl. D. D. *Petri Megerlini.*
29	Dec. 19	♑ 25. 30.	18. 40. B.	4. 50.	4. 50.	Sub pectore Ganymedis.
30	20	♒ 0. 20.	21. 0. B.	0. 0.	0. 0.	Cometa in perigæo, & æquato-
31	21	5. 20.	22. 30. B.	4. 50.	4. 50.	rem tranſilit.
1681.						
Jan. 2	23	15. 0.	24. 30. B.	9. 5.	13. 55.	
8	29	♓ 12. 30.	28. 0. B.	25. 25.	39. 20.	
9	30	17. 0.	28. 5. B.	3. 30.	42. 50.	In pectorali Pegaſi.
11	Jan. 1	25. 30.	27. 50. B.	7. 25.	50. 15.	
15	5	♈ 8. 50.	26. 0. B.	12. 0.	62. 15.	Prope caput Andromedæ.
17	7	14. 0.	25. 30. B.	4. 30.	66. 45.	
18	8	16. 40.	25. 0. B.	2. 40.	69. 25.	Prope humerum ejus auſtralem.
24	14	26. 50.	20. 25. B.	10. 30.	79. 55.	Ex orbita ſua in meridiem paululum
25	15	28. 20.	20. 30. B.	1. 35.	81. 30.	deviat; ſed binis diebus ſequenti-
26	16	29. 40.	20. 50. B.	1. 25.	82. 55.	bus boream ſubito repetit.
Febr. 4	25	♉ 9. 40.	17. 25. B.	10. 0.	92. 55.	In baſi trianguli borealis.
5	26	10. 20.	17. 5. B.	1. 0.	93. 55.	
6	27	11. 0.	17. 0. B.	0. 55.	94. 50.	
7	28	11. 35.	17. 0. B.	0. 52.	95. 42.	
16	Febr. 6	16. 40.	15. 30. B.	5. 15.	100. 57.	Inter apem & algol.
17	7	16. 40.	15. 30. B.	0. 0.	100. 57.	Statio & diſparitio.

Sic motus Cometæ a Perigæo ad ſtationem uſque, in unam ſummam collectus, eſt graduum 100, min. 57. Quoniam vero Cometa ex orbita ſua nonnihil deviaverat, toto ſuo illo motu in circulo maximo non niſi 99 gr. 51 min. abſolviſſe cenſendus eſt.

Maxima ejus ab Æquatore declinatio eſt 32 gr. Aſcenſio recta

ta ſectionis eorum, non ſaltem eſt 292 gr. ut habet Authoris No. I.
Gallici Ephemeris, ſphalmate haud dubie typographico; ſed 208 gr. quanta quoque eſt aſcenſio ſectionis obliqua in omni ſphæra, Gallo ridicule hic diſtinguente aſcenſionem, quoniam recta & obliqua in puncto ſectionis neceſſario quantitate coincidunt.

Angulus Orbitæ Cometicæ & Eclipticæ eſt 28 gr. 5 min. Coma cum maxima & ſplendidiſſima erat, ſpatium 70 circiter graduum in cœlo occupavit.

Idem Cometa perigæum ſuum & aſpectum noſtrum denuo ſubibit anno 1719. *d.* 27 *Maii, in* 1 *gr.* 12 *min.* ♎. Sequitur

Tabella Motus Perigæi Cometarum, incedentis ſecundum ſignorum ſeriem. Epocha ſeu Radix ejus fixa eſt $\frac{20}{30}$ *Decemb.* 1680, *in* 0 *gr.* 20 *min.* ♒.

Dies.	gr. m.	Dies.	gr. m.	Dies.	gr. m.
1	0..13.	20	4..27.	200	44..30.
2	0..27.	30	6..40.	300	66..45.
3	0..40.	40	8..54.	400	89.. 0.
4	0..53.	50	11.. 7.	500	111..15.
5	1.. 7.	60	13..21.	600	133..30.
6	1..20.	70	15..34.	700	155..45.
7	1..33.	80	17..48.	800	178.. 0.
8	1..46.	90	20.. 1.	900	200..15.
9	2.. 0.	100	22..15.	1000	222..30.
10	2..13.				

Dies.	gr. m.	Dies.	gr. m.
2000	445.. 0.	20000	4450.. 8.
3000	667..31.	30000	6675..13.
4000	890.. 1.	40000	8900..17.
5000	1112..32.	50000	11125..22.
6000	1335.. 2.	60000	13350..26.
7000	1557..32.	70000	15575..30.
8000	1780.. 2.	80000	17800..35.
9000	2002..33.	90000	20025..39.
10000	2225.. 4.	100000	22250..44.

No. I. Solutio objectionum.

Duæ hic, contra hypotheſin meam, formari ſolent objectiones, quibus, antequam ulterius progrediar, ſatisfaciendum eſt.

Objectio I. Si Cometa nuperus, ſingulis 38 annis, revolutionem abſolvit & mortalibus de novo conſpicuus redditur; tum ſequitur eum ante 38 annos quoque apparuiſſe, quod tamen factum fuiſſe nemo meminerit. Ad hoc duo reſpondeo: 1°. non omnes, quoties Perigæum pertranſeunt Cometæ, ſemper in Terra conſpiciuntur; imo quam plurimos pertranſire, qui ob cœlum diutiſſime nubibus obſitum & ob alias rationes, nunquam ſub aſpectum noſtrum veniant, ipſe Cl. HEVELIUS firmiter ſibi perſuaſum habet. Exemplum habemus, ut reliqua ſilentio prætercam, in Cometa 1672, a Celeb. Dn. CASSINIO Aſtronomo Regio Pariſienſi obſervato. Is enim initio diutiſſime ſub Solis radiis hypaugus latuit, dein creſcentis Lunæ ſplendore quoque imminutus, & poſtremo ob cœlum continue nubibus tectum, ultra menſem inconſpectus latuit, ita ut non niſi paucis diebus, qui reſtabant ad omnimodam ejus diſparitionem, obſervari potuerit, referente *Diario eruditorum* (Journal des Savans) *anni* 1672, *ad d.* 11 *Aprilis.* Quod ſi triduum vel quatriduum adhuc Cometa hic latitaſſet inconſpicuus, ejus certe perpetuo obliterata manſiſſet inter nos memoria. 2°. Præcipue vero reſpondeo, diſtinguendo inter nucleum Cometæ ejuſque caudam; nucleus poteſt regulariter & ſtatis temporibus redire; cauda vero, cum probabiliter ad eſſentiam Cometæ non pertineat, & tantum ex accidenti nucleo accedat, poteſt, ut antea circa apogæum nucleo adhæſerat, circa perigæum calore Solis & continua gyratione Vorticis Cometici ſenſim iterum diſſipari & diſſolvi; ſic ut idem nucleus quandoque redire poſſit cum longiore, nonnunquam cum breviore, aliquando cum nulla vel ſaltem tenuiſſima cauda (aſtipulante HEVELIO *Lib.* 7. *Cometogr. p.* 405.) & ubi ſic redit, facile fit, ut inter agmen Fixarum Cometo-Planetæ hujus nulla habeatur ratio, & ut ſic inobſervatus tranſeat. Imo, ſi nucleus ab omni etiam materia fuliginoſa, qua antea denſe erat involutus, liberetur; poteſt eſſe tam exilis, ut vigilantiſſimi quoque obſervatoris viſum perpetuo fugiat.

Ob-

Objectio II. Si Cometæ corpora ſunt perpetua & mundo concreata, motumque poſſident regularem, & ſtatas ſuas habent apocataſtaſes; tum nequeunt eſſe ſigna & omina imminentium malorum. *Reſp.* An Cometæ irati Numinis ſigna & malorum præſagia ſint, magna adhuc inter omnis generis Doctos controverſia eſt; negotium ſi quod eſt, id totum ad Theologos pertinet, quorum eſt determinare, quid ea de re Scriptura nobis revelaverit: Aſtronomus eam quæſtionem, niſi extra oleas vagari velit, omnino intactam relinquere tenetur. Quocirca, in foro cum ſim aſtronomico, nec aſſero Cometas eſſe malorum præſagia, nec illud manifeſte nego; verum nec me negare ex hypotheſi mea jure colligitur; nam 1°. qui ſic objiciunt, non animadvertunt, Caput & Caudam poſſe eſſe res toto cœlo diverſas; meque ſcopum meum, qui fuit, ut motum Cometarum ſub perpetuas leges reducerem, obtinere poſſe, dummodo id circa Cometæ caput præſtitero, (nec enim, ut craſſo ſimili utar, in curſu equi, bovis aut alterius animantis caudam reſpicimus, ſed ſolum caput, quod cauda ſponte inſequi ſolet.) Accedat ergo capiti cauda, undecunque velit; generetur & corrumpatur toties quoties conſpicitur; ſit opus naturæ, vel irati Dei indicium; per me licet; dummodo nucleus ſit originis perpetuæ, ingenerabilis & incorruptibilis, ſtataſque ſuas habeat revolutiones. Dicamus igitur, caput Cometæ ordinarie omni cauda deſtitutum ad perigæum appellere, & non niſi tum, cum Deus generi humano iram ſuam annunciare vult, cauda inſtructum apparere; cum non niſi cauda ſit, quæ terrorem mortalibus incutere ſolet. 2°. Sed nec eo me reſponſionis devenire neceſſitas cogit: Quamvis enim Caudam Capiti eſſentialem & coævam eſſe exiſtimarem, nondum, quæ mihi improperatur, irreligioſitatis convincerer: nunquid enim fieri potuit, ut ſapientiſſimus Creator, qui omnia prævidit ab æterno, imo per cujus decretum & ordinationem eſt quicquid eſt, Cometarum motum ita ordinaverit, ut tum demum conſpicui fieri debeant, cum pœnas mundo annunciare conſtituit; & viciſſim ut pœnas ſuas per hæc fatalia ſidera non niſi tum annunciare velit, cum Cometa ſe- No. I.

No. I. cundum regularem ſuum & ſibi a creatione inditum motum incedens, ad perigæum deſcendere & mundo conſpicuus fieri, etiam citra rationem intentionis hujus divinæ, tenetur. Multi egregii Viri trium ſuperiorum Planetarum conjunctiones pro præſagiis habuerunt univerſalis alicujus cataſtrophes; quin & eclipſes crediderc mundo fatales; quamvis hæc omnia juxta ordinarium naturæ curſum eveniant, ſtataſque ſuas habeant viciſſitudines. Quis unquam inficias ivit, Irides eſſe gratiæ, & Terræ-motus iræ Divinæ ſigna? num vero credamus, Deo ſemper miracula patranda eſſe ad iſtiuſmodi res producendas; & neceſſum eſſe, ex. gr. ut Deus nubem roſcidam, contra naturalem ordinem & impulſum aliarum nubium, ſuper limbo horizontis circumrotet, uſque dum in oppoſitionem Solis perveniat, Iridem ibi pictura? aut vero ut ventos (halitus ſulphureos) e longinquo, modo plane ſupernaturali, & inſtar Judæorum גלגל המתים, per terræ cavernas violenter huc adducat, ut terram ſub pedibus noſtris contremiſcere faciat? Nunquid credibilius eſt, Deum ſuo naturæ curſu relicto, ad talia producenda effecta adhibere proximas quaſque nubes & vapores, eorumque naturalem & conſtantem motum; adeo ut & hæc effecta prædicere poſſemus, ſi Phyſica ad eum jam perfectionis gradum exculta eſſet, ut cauſæ horum effectorum mutabiles & variabiles in certas leges reduci poſſent. Sed, inſtas, ſi præſciri poteſt a nobis, Cometam noviſſimum rediturum elapſis 38 annis, ſequitur, mundum tum temporis, inevitabili fato, in perverſo jacere debere, & non poſſe non Deum per crimina ſua invitare ad iræ ſuæ facem accendendam. *Reſp.* Niſi ergo nos quid præſciamus infallibiliter, illud nec credis eſſe ratum & fixum ratione decreti & præſcientiæ divinæ? abſit! Si itaque Deus mundi peccata præſcit infallibiliter, ſic tamen ut ejus præſcientia non neceſſitet aut vim inferat voluntatibus mortalium; multo minus noſtra, ſi qua detur, præſcientia malorum neceſſitabit; eo quod non a nobis, perinde atque a Deo, voluntates hominum peccatorum dependeant. Aut ſi præſcientia futurorum malorum prophetica, hauſta ex immediata revelatione divina, non

non neceſſitavit; quare, quæſo, neceſſitaret præſcientia noſtra naturali lumine acquiſita? No. I.

Ut verbo tantum adhuc addam, quid tenendum de particularibus Aſtrologorum, ex Aſtris, & cumprimis ex Cometis, prædictionibus; eas non tantum a Theologis, ſed quibuſvis Chriſtianis recte ſentientibus merito rejici exiſtimo. Præſtantiſſimi modernorum Aſtronomorum ipſi vanitatem Aſtrologiæ judiciariæ abunde ſatis agnoſcunt; GASSENDUS eam ludibrio excipit, HEVELIUS nauci facit, CARTESIUS omnino tacet; &c. Imo vix adduci poſſum ut credam, quemquam Aſtrologorum eo uſque rationem exuiſſe, ut ſuis ipſe prædictionibus fidem adhibeat; quamvis, vel ſpe turpis lucelli, vel gloriolæ apud ſuperſtitioſam plebeculam conſequendæ, vel Principum, quibus bona præſagiunt, favorem aucupandi gratia, eas utplurimum pro delphicis oraculis obtrudere ſoleant. Et ſane quis a cachinno ſibi temperare valeat, cum arenoſum vaniſſimæ Pſeudo-ſcientiæ fundamentum, prædictiones vere e Delphica tripode petitas & manifeſtis æquivocationibus laborantes, ut & in terminis generaliſſimis conceptas, ac variis conditionibus, limitationibus, vaniſque ſubterfugiis circumvallatas Aſtrologorum locutiones, tandemque abſurdiſſimas eorum conſequentias, a baculo ad angulum concludentes, æqua trutina perpendit.

De Aſtrologia judiciaria.

Poſt tam ingenuam confeſſionem, ſatis mirari nequeo, quoſdam adhuc reperiri, qui Aſtrologiæ me addictum abſurde ſuſpicantur, propter ludicrum prognoſticon in calce editionis germanicæ adjectum; quod propterea, ne infirmo eorum judicio porro offendiculo ſim, ſtudio hic omitto. Quilibet, niſi admodum obeſæ naris homo, facile ſubolfacere potuit, prognoſtici ſcopum alium nullum fuiſſe, quam ut ineptiſſimas Aſtrologorum ratiocinationes, eorumque ex quolibet quidlibet eliciendi artificium facete traducerem, & oſtenderem me, ex iiſdem fundamentis, Principibus male ominari poſſe, e quibus paraſiti bona iis præſagire ſolent.

Sequitur Examen ſententiæ Hevelianæ de Cometis.

No. I. Syſtema Hevelianum.

FInem tandem ut imponam Tractatui huic, videndum reſtat, an incomparabilis Viri Dn. HEVELII opinio, quam in pretioſo ſuo Opere Cometographico, ex profundiſſimis Matheſeos penetralibus erutam nobis pandit, omni difficultate careat. Ejus enim ſi ſententia obtineat, jam totum meum Conamen de Cometarum prædictionibus irritum corruet. Ut vero ordine eam, ante omnia ejus mentem de Cometarum ortu, ſeu generatione, ac motu, explicabo.

Clariſſimi Viri mens eſt, Planetas omnes habere ſuas circa ſe Atmoſphæras, quod de ſingulis prolixe probat, *Lib. 7. p.* 352--374: in qualibet atmoſphæra, a corporibus ipſis Planetarum indeſinenter multas exhalationes expirari & emitti, quarum craſſiores in atmoſphæra permaneant, ſubtiliores autem ultra illam aſcendant, & in univerſum ætherem ſe diffundant; dum autem ſic vagantur, facile fieri poſſe, ut & aliarum atmoſphærarum effluvia ſeſe iis jungant, pinguiores & tenaciores craſſeſcant & coagulentur; hinc varios generari nucleos, intercedente tamen ſubinde materia rariore, ut ſuo tempore iterum diſſipari & in tenuiſſimos halitus diſſolvi queant, *p.* 383. Hanc autem variorum nucleorum congeriem, non globoſam, ſed diſciformem eſſe, planitiemque alterutram perpetuo ad Solem convertere; hinc fieri, ut radii ſolares per diſcum Cometæ tranſeuntes, partim refracti, partim reflexi, in plaga Soli oppoſita caudam efforment; quoniam vero, in puriſſima & ſubtiliſſima aura ætherea, radii hi terminari neutiquam poſſent, niſi materia aliqua reliquo æthere denſior poſt Cometam lateret; hinc exiſtimat, materiam cometicam non omnem in nucleum coagulatam fuiſſe, ſed pleramque manſiſſe dilutiorem, quæ totum Cometæ corpus undiquaque quaſi ſepiat, & atmoſphæram etiam quandam circa illum gignat; hanc vero materiam tenuio-

nuiorem vi caloris Solis rareſieri, extenuari, & a parte antica, ac ab utroque latere propelli in partem a Sole averſam, *p.* 476-478. No. II.

De Cometarum Motu ſic ſtatuit Author: Cum primum Cometa *m n*, in atmoſphæra Planetæ alicujus, v. gr. Saturni primordia cœpit, coagulatis ſcilicet, quantum ſatis eſt ad motum concipiendum, exhalationibus; moveri incipit recta verſus ſyſtematis vel vorticis ſui extremitatem; qui motus cum motu atmoſphæræ gyratorio concurrens, lineam ſpiralem *a b c d* efficit, quam dum deſcribit Cometa, continuo alteram faciem diſci ſui corpori Planetæ, cui ortum debet, obvertit. Tandem vero, cum ad extremos orbis vaporoſi terminos pervenit, a concitatiſſima circumrotatione Vorticis in vaſtiſſimum ætherem expellitur, & retento hoc priſtino impetu, motum ſuum continuat per lineam rectam *e f*, quæ tangit Vorticem in puncto ſeparationis *e*, ut ſolent omnia corpora in gyrum acta, exemplo lapidis e funda projecti, *p.* 648: ubi notandum, quamprimum Cometa a Vortice ſuo avulſus ætherem ſubintravit, ſubito planitiem diſci ſui a Planeta ad Solem convertit, & eodem poſtea ſitu Solem perpetuo aſpicit; quo fit, ut Cometæ diſcus *m n* lineam directionis *e f* ſubinde ſub alio & alio inclinationis angulo ſecet. Unde porro probare nititur Cl. Vir, ejus Trajectoriam, quam vocat, debere eſſe non omnino rectam, ſed parabolicam, quæ a recto tramite *e f* in eam ſemper partem deflectat, quæ Soli vicinior eſt, qualis eſt *x y*; id quod per motum Velificationis ingenioſiſſime illuſtrat. Poſtquam enim, a *pag.* 576. &c. egregie & prolixe diſſeruiſſet de gubernaculi natura, illud vecti comparans, & aſtruens, contra Ariſtotelem alioſque Mechanicos recentiores, potentiam moventem navigii non eſſe in nauclero ad clavum ſedente, ſed in aqua ad temonem alluente; tandem aſſerit, *pag.* 585. omne corpus oblongum & planiforme habere ſuum quaſi temonem naturalem. Tab. II. Fig. 1.

Sciendum autem, ita comparatum eſſe cum Nave, ut quamdiu temo ſecundum flaminis, aut fluminis, tum etiam longitudinis navigii ductum parallelum directus & conſtitutus eſt, haud

poſſit

No. I. poſſit aliter quam perpetuo in directum propelli; quamprimum vero temo in alterutram partem flectitur, ſic ut aqua illum oblique alluat, navis pedetentim a recto tramite declinabit, & quidem in illud latus proram obvertet, in quod temo collimat: quod porro variis ſchematibus, ut *pag.* 572. 670, inprimis autem *p.* 680, illuſtrat.

Tab. II. Fig. 2. Sit enim Cymba vel Scapha *m n*, oblongorum laterum & abſque gubernaculo, cum ipſa ſibi temo ſit naturalis; ejus latera primo exponantur, ut in *o*, parallela curſui fluminis deſcendentis ab *a* verſus *b*; ſit in ripa Director *c*, qui ita dirigat navigium *m n*, duobus funiculis *c m* & *c n*, in prora *m* & puppi *n* appenſis, nullam tamen motui ejus vim inferendo, ut navigium ſemper ſub angulo normali aſpiciat. Igitur quando ſic navigium ab *a*, ſecundum fluminis ductum, verſus *b* moveri incipit; ſtatim ſe cuſpis navigii, a ductu parallelo alvei *a b*, verſus directorem inflectit, ut in *u*; & quo longius deſcendit, eo rectius ſe curſui fluminis *a b* obvertit, ut in *x*, *t*, *y*. Hac autem deviatione a directionis linea *a b*, exiſtimat Vir Cl. fore, ut navigium tum, non ſolum ad curſum aquarum *a b* deferatur, ſed ſimul aliquanto propius ad ripam, cui director inſiſtit, accedat; ſiquidem prora navigii *m* illuc vergit; ita ut, loco rectæ *a o b*, deſcribat lineam pauliſper inflexam *o u x t y*.

Eodem porro ſchemate retento, ſi *c* ſit Sol, *m n* diſcus Cometæ Soli perpetuo orthogonaliter expoſitus; *a b* linea, ſecundum quam Cometa impulſus eſt: Rationem putat reddere Vir Cl. quare Trajectoria Cometæ non omnino ſit recta juxta impulſum *a o b*, ſed parumper inflexa & parabolica, qualis eſt linea *o u x t y*.

Talia feliciſſime inventa & ſubtiliſſime applicata fuſius deducta invenies, *Lib.* 9. *Cometogr.* Clariſſ. Viri. Difficultates, quas librum hunc raptim perluſtrando, in hypotheſi ejus deprehendiſſe mihi videor, paucis exponam. Earum quædam ſunt Aſtronomicæ, vel Opticæ, & apparentias concernunt; aliæ Phyſicæ, & rei ipſius veritatem ſpectant.

Difficultates Syſtematis Heveliani.

Quod ad Apparentias attinet, an calculus Clariſſ. Viri omni ex

ex parte iis ſatisfaciat; ob tædioſam prolixitatem examinare non vacavit; credo tamen facile, perſpicaciſſimi Authoris tantam fuiſſe vigilantiam, ut in negotio licet prolixiſſimo, falli haudquaquam potuerit. Sequentes interim ſcrupuli mihi negotium faceſſunt. No. I.

1. Si Trajectoria Cometæ eſt linea propemodum recta, Vorticem e quo egreſſus eſt, in puncto ſeparationis tangens; tum poſſibile eſt, hanc Trajectoriam nonnunquam Terræ alicubi adeo propinquam eſſe, ut cum Cometa illac tranſit, Terram radat, quin ab illa omnino perforetur; quod quamvis Viro Clar. non abſurdum videatur, ideo tamen, meo judicio, admitti non poteſt, quod alias Cometa in perigæo exiſtens, ubi majori plerumque lumine ob vicinitatem oculos noſtros ferire ſolet, contra ſubito diſpariturus, atque eclipſin paſſurus eſſet, ob umbram Terræ, cui involveretur; quod tamen nunquam animadverſum.

2. Præterea Cometa, eadem ratione, reliquorum Planetarum, qua Terræ, atmoſphæras ingredi, trajicere, & ipſorum corporibus allidi poſſet. Sed hoc caſu rogarem Virum Clariſſ. an dum Cometa ingreditur Planetæ atmoſphæram, recta illam trajiciat, quod tamen, ſuppoſita & conceſſa a Cl. Viro atmoſphæræ in orbem gyratione, concipi nequit; an vero ab illa abripiatur, & ſic participans de utroque motu, recto nimirum ſibi proprio & circulari Vorticis, ſpiras deſcribat a circumferentia ad centrum Vorticis, contrarias illis, quas deſcripſerat a centro Vorticis Planetæ (in quo incunabula ſumſit) ad ejus peripheriam: Et ſi ſic abripiatur; num planities nuclei cometici ſemper maneat Soli obverſa; num vero ad illum Planetam convertatur, a quo abripitur. Si prius dicat, rogarem, cur ſpiræ illæ nobis e Terra aſpicientibus non obſervarentur? Si poſterius, qui fieri poſſit, ut Sol, per planitiem nuclei, ad quam obliquus eſſet, radios ſuos tranſmittere & caudam illuminare queat?

3. Si Cometa ejicitur ex atmoſphæra, vi rapidiſſimæ ejus gyrationis, modo quo vult Cl. HEVELIUS; tum, aut ex æquatore Vorticis, aut ex aliquo ejus parallelo neceſſario ejiceretur:

No. I. Utrumvis dicatur, Trajectoria oportet ſit in plano, vel ipſius æquatoris Planetæ, vel ad minimum in plano aliquo ei parallelo: atqui omnium Planetarum æquator propemodum coincidit cum æquatore aut ecliptica noſtra; quocirca Trajectoria Cometæ nunquam poſſet ab æquatore vel ecliptica noſtra enormiter declinare, tantum abeſt, ut alterutram unquam normaliter ſecaret, & Cometa recta ab auſtro in boream trajiceret; contra manifeſtam experientiam Cometæ 1652.

4. Si Cauda Soli eſt diametraliter oppoſita; tum ſi Cometa vel minimum altior aut depreſſior Sole exiſteret, non poſſet non ejus coma circa conjunctionem cum Sole apparere brevior, quam in quadraturis: Apparere vero major in illa quam in his nequiret, niſi hoc ſolo caſu, cum in eadem præciſe cum Sole eſt diſtantia, fatente Cl. HEVELIO *Lib.* 8. *p.* 526. Sit

Tab. II. Fig. 3. enim *a*, Terra; *b*, Sol; *cd*, Cometa altior Sole, ſed in & prope conjunctionem; *ef*, idem in quadratura; *gh*, Cometa Sole humilior in conjunctione, vel prope; *il*, idem in quadratura; *mn*, Cometa prope conjunctionem in eadem cum Sole diſtantia; *op*, idem in quadratura. Ex hoc ſchemate manifeſtum eſt, angulos viſionis *cad*, & *gah*, eſſe acutiores angulis *eaf*, & *ial*: contra angulum *man* eſſe majorem angulo *oap*, quamvis vera caudæ longitudo in omnibus ſex locis eadem ſit. Cum itaque nuperus Cometa caudam poſſederit longiſſimam circa conjunctionem Solis; hoc ipſo demonſtrative colligeretur, cum nec altiorem nec depreſſiorem Sole extitiſſe; & ſic tædioſiſſimo parallaxium calculo bene ſuperſederi poſſet, ſi tam facile eorum diſtantia hoc medio poſſet inveſtigari.

Sed demus porro, omnia Cometarum phænomena hypotheſi Heveliana accurate ſalvari poſſe; certum tamen eſt, id nondum ſufficere ad veritatem ipſius hypotheſeos aſtruendam, niſi ſimul probetur, eam amice conſpirare cum natura totius univerſi, & cum legibus motus a ſummo ejus Opifice ab initio ei præſcriptis; quemadmodum Copernicanos parum juvaret, ſi duntaxat laborarent in demonſtrandis per ſuum ſyſtema apparentiis cœleſtibus, nec ſimul ſolliciti eſſent de oſtendenda ejus congruitate

cum

cum natura totius univerſi. Quocirca, ut tranſeam ad phyſicam conſiderationem hypotheſis Hevelianæ; examinandum mihi eſt, an ſatis conveniat cum vero mundi ſyſtemate. No. I.

1. Vir Clar. ad mentem quidem CARTESII (ut videre eſt ex ejus *Princ. Phil. part.* 2. §. 37.) pro principio aſſumit, quod adeo incertum eſt, ac quod incertiſſimum; nempe unumquodque corpus motum, habere naturaliter vim ad perſeverandum in ſuo motu, eo quod quælibet res tendat quantum in ſe eſt, ad permanendum in eo ſtatu, in quo eſt; *Lib.* 9. *Cometogr. p.* 644. Certe plerique nunc Philoſophi, & inter alios Author, quiſquis ille ſit, libri, cui titulus, Inquiſitio Veritatis (*Recherche de la Vérité*) profundiſſimarum reflexionum & ſpeculationum refertiſſimi; qui cæteroquin in omnibus, etiam circa materiam Cometicam, ſatis alias monſtroſam & abſonam, CARTESII inſiſtunt veſtigiis; in hoc ſolo & paucis aliis generalibus motus legibus, ab eo diſſentiunt. Et ſane, ſi verum fateri licet, contrarium longe videtur probabilius, nimirum unumquodque a motu ceſſaturum, quamprimum movens movere ceſſat; niſi aliquid ſit, quod motum in mobili conſervet & continuo quaſi reproducat. Ad axioma illud, *Unumquodque tendit ad permanendum in eo ſtatu, in quo eſt*, reſpondeo, longe aliam hic eſſe rationem motus, quam quietis. Hæc mera illius privatio eſt, non vero ille hujus; nam, ad quietem inducendam corpori moto, non opus eſt, ut Deus velit, voluntate poſitiva, corpus quieſcere, ad hoc ut quieſcat; ſed ſufficit, ut ceſſet velle ejus motum. Sed ponamus viciſſim, Deum ceſſare velle quietem corporis quieſcentis; nondum video corpus moveri; aut ſi qui motum iri corpus exiſtiment, dicant quam in plagam movebitur, aut quo gradu celeritatis feretur: cum enim motus ſit infinitæ varietatis, & magis ac minus recipiat, ſecus ac quies; non poterit aſſignari cauſa, quare corpus ſibi relictum in hanc potius partem quam illam, aut tali potius celeritatis gradu quam alio moveri incipiat; niſi Deus inſuper, voluntate poſitiva, velit & determinet corporis motum: ſicuti

F 2 de-

No. I. elegantiſſime hæc deduxit præfatus Author *Tom. II. Lib. 6. cap. 9.*

Niſi ergo Cl. Dn. Hevelius poſſit aſſignare, quid ſit id, quod corpus Cometæ, a Planetæ atmoſphera ſemel avulſum, in motu ſuo conſervet, tota ejus hypotheſis de Trajectoria corruet: nam ſi virtutem nominat a gyratione atmoſphæræ Cometæ impreſſam, chimæram nobis fingit, cujus clarus & diſtinctus conceptus haberi nequit.

2. Concedamus autem Cometæ virtutem hanc continuandi motum ſuum ſecundum lineam rectam, poſtquam ab atmoſphæra ſua avulſus & ſpatioſiſſimum illum campum vel Oceanum, quem vocat, æthereum ingreſſus eſt; & quæramus porro ex Viro Clar. an hic cœleſtis Oceanus omni motu deſtitutus ſit, an vero ipſe quoque circa Solem una cum toto Planetarum ſyſtemate rotetur: ſi prius ſupponit, quod ſupponere probabiliter videtur Celeberr. Vir, dum vaſtum illum Ætherem ceu mare quoddam pacificum concipit, in quo libere velificetur Cometa, tum totum Philoſophiæ Carteſianæ ædificium, tam artificioſe ab Authore conſtructum, unica hac ſuppoſitione ſubverſum it; quod an conſultum ſit, ipſe videat; cum præſertim, hoc ſuppoſito, non videatur poſſe concipi, qua ratione Terra per ſe duos pene contrarios motus exerceat; juxta Carteſio-Copernicanam autem hypotheſin illud facillime poſſit; utpote, juxta quam, non niſi diurnus Terræ per ſe & immediate competit, annuus vero materiæ cœleſti Terræ circumfuſæ, quæ in Vorticem circa Solem acta, Terram ſecum & omnes reliquos Planetas abripit.

3. Si vero Vir Cl. Ætheri concedit motum illum vorticoſum circa Solem, qui ſecum rapiat totum Planetarum ſyſtema ipſoſque Cometas; tum utique Cometarum motus non amplius erit ſimplex, ſed compoſitus ex recto in Trajectoria & circulari Vorticis; unde fieret, ut quamvis motus Cometæ proprius in Trajectoria reapſe eſſet æqualiſſimus & regulariſſimus, tamen, propter alterum ſupervenientem motum, ſpiralis & irregulariſſimus appa-

Digitized by Google

appareret; eoque irregularior, quod materia Vorticis Cometam non ubique æquali velocitate, ſed exiſtentem prope Solem velocius, alibi lentius circumduceret. Cum autem hic motus Vorticis in calculo a Viro Cl. neglectus fuerit, non videtur ejus hypotheſis de Trajectoria Cometæ poſſe cum rei veritate conciliari. No. I.

Tandem examinandum eſt, an Vir Clar. motum parabolicum Cometæ ab inclinatione diſci in Trajectoria proficiſcentem bene probet exemplo ſcaphæ vel lintris. Ubi probe conſiderandum, Ætherem iterum conſiderari poſſe ut motum, vel ut immotum: Si illum ut immotum & tranquillum ſpectemus; rurſum animadvertendum, an impulſum Cometæ ab atmoſphæra impreſſum ad inſtar curſus torrentis alicujus, ut facit Author, conſiderare velimus; an vero ut impetum venti vela inflantis; quod quidem longe convenientius eſt, eo quod Æther, cui Cometa innatat, rationem aquarum habere poſſit. Magna autem inter effectum fluminis & venti hac in parte differentia eſt: Quod fluminis curſum ſpectat, cui ſcapha oblique eſt expoſita; fallitur Vir Cl. dum credit, ſcapham non ſolum ad fluminis curſum deorſum ferri, ſed & pedetentim ad illam ripam accedere debere, cui obvertit proram: imo haud dubie recta deſcenderet, nec ad unam ripam magis accederet, quam ad alteram; tum quod fluctus *d m*, *f t*, *e n*, æquali angulo & impetu alluant proram, medium, & puppim navigii *m t n*; tum quod fluctus retro navigium *m l*, *t r*, & *n i*, in ſpatio Rhomboïde A, eodem quoque tempore & æquali celeritate recedant; ſic ut nihil impediat, quo minus prora *m* directe eat in *l*, medium *t* in *r*, & puppis *n* in *i*; atque ſic navigium, intra eoſdem fluctus parallelos *d l*, & *e i*, perpetuo contineatur. *Tab. II. Fig. 2.*

Longe vero alia ratio eſſet motus navigii tranquillo mari expoſiti & a ſolo vento agitati: Eſto enim in eodem ſchemate ſcapha *m n*, cujus lintea oblique impellat ventus *a b*, manifeſta eſt ratio, cur *m n* non poſſit ſecundum venti ductum ire in *l i*, nimirum ob renitentiam aquæ poſt ſcapham, in ſpatio

No. 1. Rhomboide A contentæ. Hinc in illam ſolum partem tendere cogitur linter, quam reſpicit prora ejus *m*, quæ cuſpide ſua faciliorem ſibi parat tranſitum. Cum vero prora *m* ſemper reſpicere debeat circulum, circa directorem *c* deſcriptum, propterea quia ſitum navigii ad directorem ſuppoſuimus eſſe perpetuo normalem; hinc navigium curſu ſuo, nec lineam rectam, nec etiam parabolicam, ſed omnino perfectum circulum *o p* deſcriberet. Nec eſt quod dicas, venti impulſu, lintrem *m n*, non tantum in partem, in quam prora tendit, ſed & ſecundum ipſius venti ductum verſus *l i*, latum iri, & ſic parabolam deſcripturum; quia non poteſt dari ratio, quare vel minimum ad *l i* accedat, ubi ſemper multum reſiſtentiæ invenit, cum totam ventus vim poſſit exercere pellendo lintrem in partem, quam prora *m* aſpicit. Verum quidem eſt in praxi, navem ventum oblique excipientem, nunquam in tam perfectum circulum agi poſſe, quin ſimul a centro ſubinde longius recedat, eam in partem abrepta, qua venti impetus fert: Verum id inde eſſe exiſtimo, quod nunquam ventus ſit, qui non aquam ſimul multum agitet, fluctuſque anteriores impellat in ſcapham, dum poſteriores ab illa propellit; in quorum adeo locum ſcapham ſuccedere nil mirum eſt; ſic ut motus ille ſcaphæ, ſecundum ductum venti, non tam ipſi vento, utcunque validiſſimo, quam aquæ poſt illam recedenti aſcribendus ſit. Id quod ad materiam præſentem accommodari nequit, ubi virtus Cometæ impreſſa ætherem agitare, ut ventus aquam, concipi nequit. Sive igitur virtus hæc Cometæ ab atmoſphæra impreſſa flumini, ſive vento, comparetur; neutro modo elicies motum Cometæ parabolicum; cum, priori modo, Trajectoria futura eſſet omnino recta; poſteriori, omnino circularis.

Et ſic quidem Ætherem conſideravimus, ceu immotum & tranquillum; ſed ſi porro illum, ut rei natura poſcit, concipiamus inſtar magni Vorticis, qui, in modum rapidiſſimi Torrentis aut Euripi, ſecum, non recta, ſed in gyrum circa Solem, deferat Cometam, quem præterea virtus ab atmoſphæra impreſſa,

ſa, ceu ventus validiſſimus, in eam partem impellat, in quam inclinatus eſt diſcus; omnino evincemus, ex hoc ipſo ſimili, quod nobis ſubminiſtravit Cl. HEVELIUS, Cometam, nec rectam, nec etiam parabolicam, ſed omnino circularem lineam deſcripturum; cum & gyratio Vorticis & propria inclinatio diſci eo colliment. No. I.

APPENDIX.

EPimetri loco, propino Lectori ſolutionem duorum Problematum, quorum unum Dn. COMIERS, Præfectus Eccleſiæ Collegialis de Ternant, propoſuit Authori Diarii Eruditorum (*Journal des Savans*) vid. *Tom. Anni* 1676. *p.* 222. *

PROBLEMA TALE EST:

Dato puncto c, *in circumferentia circuli*, *cujus diameter* oe; *reperire*, *in radio ejus* oi, *punctum* m, *per quod ducta recta* cr *ſegmentum* mr *ſit æquale radio* oi.

I. SOLUTIO ALGEBRAICA.

Angulus $oic = mic = A.$

$rci = mci = Z.$

$rmi = mci + mic = A + Z,$

exterior duobus interioribus, per I. 32.

rim,

* *pag.* 215. *Editionis Batavæ.*

No. I. $rim = rmi = A + Z$. per I. 5.
latera enim ri, & rm, ſupponuntur æqualia.
$irm = mci = Z$, per I. 5.
Triang. enim ric eſt Iſoſceles.
Hinc $rmi + rim + irm = \Delta\ rmi = 2\,A + 3\,Z$
$= 180$ gr. per I. 32.
Ergo $3\,Z = 180$ gr. $- 2\,A$.
Et $Z = 60$ gr. $- \frac{2}{3}\,A$.

Quocirca cognito arcu oc, vel angulo $oic = A$, ejus ſubtrahantur duæ tertiæ partes a 60 gr. reſiduum erit $Z = rci$, vel mci; cui ſi addas mic, habebis rmi; cui æqualis alter rim, vel rio; adeoque & arcus ro. Hinc nata eſt ſequens Tabella:

Poſito A, ſive ang. *oic*.		erit Z, ſive ang. *rci*.		arcus *or*, ſive ang. *rio*.	
gr.	0 —	60.	0.	60.	0.
	10 —	53.	20.	63.	20.
	20 —	46.	40.	66.	40.
	30 —	40.	0.	70.	0.
	40 —	33.	20.	73.	20.
	50 —	26.	40.	76.	40.
	60 —	20.	0.	80.	0.
	70 —	13.	20.	83.	20.
	80 —	6.	40.	86.	40.
	90 —	0.	0.	90.	0.

2. Solutio Geometrica.

E puncto dato c, ducatur diameter cg.
Arcus oh fiat æqualis arcui dato oc.
Abſcindatur ex h tertia pars arcus hg, quæ ſit hr.

Jun-

Digitized by Google

Jungantur *c* & *r*, recta *cr*: No. I.
Dico lineam *cr* habere partem *mr* æqualem radio *io*.

Demonstr. Ang. *rcg* ſubduplus eſt angulo *rig*, per III. 20.
Ang. *rih*, eidem quoque ſubduplus eſt, per conſtructionem.
Igitur anguli *rih*, & *rci*, æquantur, per axiom. 6.
Iterum ang. *hio* æquatur angulo *oic*, per conſtructionem.
Totus igitur ang. *rio* æquatur duobus *rci*, & *mic*, ſimul ſumptis.
Angulus autem *rmi* æquatur iiſdem duobus *rci*, & *mic*, per I. 32.
Itaque anguli *rmi*, & *rim*, æquantur inter ſe, per ax. 1. adeoque recta *rm* æqualis radio *ri*, vel *oi*: ſunt enim crura Iſoſcelis *rmi*, per I. 6. quod erat demonſtrandum. *

Alterum PROBLEMA *in plateis hujus Urbis affixum legitur & propoſitum eſt a quodam Nic.* VOOGHT, *Geometra Amſtel. Eſt autem tale:*

OBſervatur alicubi, poſt meridiem hora ſexta, Solis altitudo 12 gr. elapſis autem, poſt momentum obſervationis, hora una & 12 minutis occidit Sol; quæritur, ſub qua Latitudine, & quo anni tempore inſtituta fuerit obſervatio?

Reſp. Obſervatio inſtituta fuit ſub latitudine 45 gr. 16½ min. Sole exiſtente in ♉. 17 gr. 15 min. aut ♌. 12 gr. 47 min. & declinationem habente 17 gr. 1 min.

* *Videatur Num. II. ſub finem.*

No. I. Calculum vitandæ prolixitatis cauſa non addo. Attente in-
Tab. II. ſpicias ſchema, & ex reſolutione duorum triangulorum *a b c*,
Fig. 5. & *c d e*, veritas ſolutionis tibi innoteſcet.*

* *Videatur Num. II. ſub finem.*

JACOBI

Digitized by Google

N°. II.

JACOBI BERNOULLI DISSERTATIO DE GRAVITATE ÆTHERIS.

Edita primo
AMSTELÆDAMI;
Apud HENRICUM WETSTENIUM,
1683.

Digitized by Google

PERILLUSTRI

VIRORUM QUADRIGÆ,

SCHOLARCHIS

Inclytæ Reip. Baſil. Spectatiſſimis,

D. JOH. BALTH. BURCKHARDO,

D. THEODORO BURCKHARDO,

Seni duo-de-nonagenario,

D. ANDREÆ MITZIO,

SENATORIBUS & TREDECIM-VIRIS MERITISSIMIS:

D. JOH. CONRADO HARDERO,

IBIDEM ARCHIGRAMMATÆO, RERUM AGENDARUM PRUDENTIA MAXIME CONSPICUO.

VIRI AMPLISSIMI, GRAVISSIMI:

DOGMA propono, non odioſæ, ut videri quidem poſſet, reum novitatis, ſed quod antiquitate cum vetuſtiſſimæ Philoſophiæ certet placitis, coætaneum non *Ariſtoteli*, non *Platoni*, ſed priſco *Atlanti*, ex quo

Digitized by Google

Ovid.l.4. Metam. Fab. 17.

——————— *omne*
Cum tot ſyderibus cœlum requievit in illo.

Quorſum enim, nobis fingere Senem facie incurva, vultu cernuo, titubante genu, & tanquam ſub magna fatiſcentem mole, ſi quod portavit cœlum, leve credidere Veteres? Ne tamen a' fabulis Antiquitatis laudem fœnerer, illud hoc Veterum didiciſſe ſufficiat exemplo, Ætherem, qualem præſenti molior opuſculo, gravem & ponderoſum Atlantum ſuffulciendum eſſe humeris, ne mole ruat ſua.

Onus ut cœleſte, ſic nobile, AMPLISSIMI VIRI, cui ferendo quos digniores ſeligerem humeros, quam Veſtros, qui non niſi magna, non niſi eximia ferre ſunt aſſueti? Veſtri ſunt humeri, qui arduum regiminis in ſe ſuſcepere onus, ſuſceptum tanta cum laude & prudentia portavere hactenus. Veſtri ſunt humeri, quos cura Eccleſiæ, cœlique illius myſtici premit pondus. Vos eſtis, quos Academiæ Scholarum-

larumque noſtrarum oneroſa fatigat ἐπισκοπή. Neve hoc reticeam, Vos eſtis, quorum curis, conſiliis, & auſpiciis, Clariſſ. Dnn. Profeſſores Academiam noſtram nunc demum heroico plane auſu, nec infelici cum ſucceſſu, priſtino reſtituere nitori allaborant. Ne itaque gravemini, AMPLISSIMI VIRI, poſt tot exantlatas curas, tantaque ſuſcepta onera, etiam cœleſtis iſtius, quod ſtruxi, ponderis curam & patrocinium in Vos ſuſcipere; patiaminique, ut *Ætheris Gravitas* illuſtrium Veſtrorum nominum auctoritate præmuniatur? Iſtis enim ſuffulta ſtylobatis ſtabit ſalva & inconcuſſa, nec erit, cur vel ab apertis hoſtium arietibus, vel clandeſtinis malevolorum cuniculis, vel tormentis invidiæ, vel canum latratibus, aut dentibus Momorum, aliiſque inſultibus ullam ruinam metuat. Firmet autem Deus O. M. humeros Veſtros, AMPLISSIMI VIRI, ut glorioſa illa onera, quibus Eccleſiæ Patriæque bono obruimini quotidie, alacriter

ter & conſtanter feratis, donec præmia laborum, utinam ſero tamen, reportetis in cœlis. Ita vovet

AMPLITUDINUM VESTRARUM

Humillimus & Devotiſſimus
Servus ac Cliens

Dabam
Lugd. Batav.
11 Julii
1682.

JAC. BERNOULLI.

MO-

Digitized by Google

MONITUM
AD
LECTOREM.

CUM bona pars hujus Diſſertationis ſub prælo prodiiſſet, ferebat occaſio, ut inter confabulandum cum Amico, varii præcipue de præſentibus, ut fit, ſtudiis miſcerentur ſermones; interque alia mentio incideret Cauſæ Firmitudinis Corporum Durorum; ubi monuit Amicus, eam a MALEBRANCIO Compreſſioni Ætheris ambientis aſcribi. Ego illum per jocum hæc dixiſſe, poſtquam in Adverſaria mea, vel impreſſa Diſſertationis folia forte caſu quodam incidiſſet, ſuſpicatus; Seſquiannus eſt, regeſſi, ex quo Auctoris iſtius Scrutinium veritatis (Recherche de la vérité) fugitivo quidem, fateor, oculo perluſtravi; ſed non obſervavi, ſaltem non memini, illum, circa Cohæſionem partium duri corporis, ultra CARTESII quietem penetraſſe: Amicus vero aſſeverare dicta ſua, & ne dubitem, commodare librum, ac monſtrare locum, qui fidem dictis faceret. Quo ſane perlecto mirabar, non tam quod dictus Auctor in Cohæſione partium duri corporis jam ante me Preſſionem Ætheris repererit, ſed præcipue quod in cognitionem hujus veritatis eodem filo Ariadnæo deductus, eique comprobandæ iiſdem rationibus, iiſdemque adeo exemplis mecum uſus ſit; uti e Scrutinii veritatis & Diſſertationis noſtræ collatione patere poterit. Iſthæc autem Lectorem moneo, non quod veritatis alicujus inventionem admodum mihi vendicare, aut de ea multum gloriari animus ſit (ſic enim diſſimulaſſe opportuiſſet, quæ modo propalavi); verum ut fortuitus noſter conſenſus evidenti argumento ſit (quod perſuadere mea intereſt) nec contradicendi prurigine, nec novaturiendi ſtudio, ſed ſolo veritatis amore inductum me iſthæc ſcripſiſſe. Ea enim vivimus tempora, quibus non ſatis de-

Recherche de la vérité Lib. 6. cap. 9.

Digitized by Google

clinare poſſumus ſiniſtra multorum judicia, qui de Scripto aliquo ex opinione, quam de perſona Scribentis concepere, ſæpe quidem illa fallaci & iniqua, aliiſque ſuis affectibus, quam ex rebus ipſis, judicare malunt. Tales ergo rogo, ut quæ hic reperient de Cauſa Cohæſionis partium duri corporis, *non ut mea tractent, ſed ut opinionem* MALEBRANCII, *unius e ſagaciſſimis noſtri ſeculi Philoſophis.*

Alterum eſt, quod Benignum Lectorem monitum velim, ut obſervet, me repræſentare in tota fere Diſſertatione hominem, qui ſuo uſus ratiocinio gradatim in cognitionem rei, quam quærit, devenit, quique aſſumit quandoque talia, quæ majore accedente luce talia non reperiuntur: Exempli cauſa, ad reddendam rationem, cur corpus motum non poſſit impellere quodlibet corpus quieſcens, pag. 69. *ſuppoſui initio, cum* CARTESIO, *in ipſa quiete quandam reſiſtendi vim, porportionatam magnitudini corporis quieſcentis, antequam exploratum haberem, omnem corporum reſiſtentiam provenire ab ambientis materiæ preſſione. Ita p.* 107. (*ex eo, quod pondus ferramenti quandoque majus eſt pondere ſimilis cylindri atmoſphærici, concluſi ipſum quoque Ætherem ſua gravitate debere eſſe inſtructum, qua adjuvet pondus Atmoſphæræ in connectendis ferramenti partibus; ſed iſta concluſio mox vacillare deprehenditur ex iis, quæ ſequuntur pag.* 112. *ubi demonſtratur, ferramentum licet ponderoſiſſimum in ſuſpenſione vel attractione omne ſuum amittere pondus; hinc enim quid aliud conſequitur, quam ad ſuſtentandum vel propellendum ferramentum minimam ſufficere Atmoſphæræ vim, nec opus eſſe; ut Ætheri propterea pondus affingatur? Interim ne hoc* Gravitati Ætheris *fraudi ſit, obſervabit Lector, quamvis id, quod prima mihi de illa cogitandi extitit occaſio, non fundat pro ea argumentum valde neceſſarium, alia tamen poſtea adduci argumenta, quibus hanc Gravitatem omnino apodictice & infallibiliter confirmari putem.*

N°. II.

Digitized by Google

N°. II.

DISSERTATIO

DE

GRAVITATE

ÆTHERIS.

RECEPTA jam eſt ubique Aeris noſtri atmoſphærici Gravitas. Ea a primis Scriptoribus Hydroſtatices indefeſſa ſolertia perveſtigata, non ſolum rationi conſona, ſed infinitis quoque ſatisfacere deprehenſa fuit experimentis; ut multis contradicentibus ad aſſenſum a ſe impetrandum ſatis etiam ponderis habere viſa fuerit. Et quamvis reliqui, in quorum animis Aeris Levitas profundiores egit radices, manus dare hactenus impediti fuerint; quod ſibi perſuaderent fore, ut ſentiremus ſupra nos ejus, ſi quod haberet, pondus; quodque abſur-

Gravitas Aeris.

Digitized by Google

No. II. abſurdum exiſtimarent, fluidum levius poſſe ponderare ſuper graviori, Aerem ſcil. ſuper Aqua, cum potius deprehendatur, illum ſub hac detentum omni niſu aſcendere, & per bullas emergere; res tamen ſi curate inſpiciatur, adeo evidens eſt, ut ad hos homines convincendos, confugiendum ſit, non ad operoſas machinas aut pretioſas antlias, ſed vel e trivio petita, & mercatoribus bajuliſque obvia experimenta.

Fluidum levius ponderat ſuper graviori. Impone corpus aliquod gravius, puta Plumbum, uni lanci trutinæ; immiſſoque alteri tanto pondere, quantum requiritur ad bilancem in æquilibrio conſervandam, perge plumbo ſuperimponere aliud corpus *in ſpecie* quidem levius, videlicet Lignum. Quid manifeſtius, quam lancem hanc quæ Plumbum cum Ligno continet, alteri præponderaturam; ita ut tantum ponderis iſti addendum ad trutinam æquilibrio ſuo reſtituendam, quantum alias deprimeret lignum, ſi ſeorſim appenderetur? Nemo autem concipiet, iſtud lancis præpondium aliunde provenire, quam ex eo, quod lignum, licet plumbo *in ſpecie* levius, tota ſua mole ſuper illo gravitet, ambo vero junctis viribus premant lancem. Et ne rationi, ſed ſenſui quoque hæc probetur gravitatio, quotuſquiſque eſt, qui onus in capite geſtans non experiatur, magno ſæpe ſuo incommodo, oneris ſupra ſe gravitationem & tendentiam deorſum, quam, ſcalam poſtea aſcendens, nihilo imminutam ſentiet, quamvis inter aſcendendum iſtud onus ſpeciem levitatis præ ſe ferat. Unde manifeſtum eſt, aſcenſum alicujus corporis non ſtatim arguere, id eſſe abſolute leve, vel nullam habuiſſe, aut ſublatam eſſe preſſionem conatumve ejus tendendi deorſum; ſed preſſionem hanc irritam tantum reddi per aliam preſſionem vehementiorem ſurſum, impedirique, ne in actualem deſcenſum abeat. Quemadmodum ſi duo Luctatores manus inter ſe conſerunt, & alter alterum impellit robore inæquali; ſolus fortioris impulſus ſortitur effectum, dum debiliorem retroagit: propterea vero non concludimus, impulſionem debilioris ſublatam eſſe; pergit enim hic impendere omnes ſuos nervos, ut reſiſtat alteri, & fortior revera reſiſtentiam debilioris ſentit, & niſi debilior reſiſteret, for-

Digitized by Google

fortior eodem temporis ſpatio, pro ratione roboris ſui, duplo vel triplo longius eum propelleret, quam nunc reſiſtentem & prementem ſe propellere potis eſt. No. II.

Verum, inquiunt, non ſentitur preſſio vel pondus Aeris ſupra nos: ſed quid tum poſtea? Nec ſentitur ab urinatoribus pondus aquæ incumbentis; ergone minus gravis eſt? Audio regerentes, Elementa in locis propriis non gravitare. Itane vero ſibi ipſis reſpondent incauti? poſito enim verum eſſe, quod non eſt; nunquid Aer eſt in loco ſuo nativo? cur ſolus ergo, ſi ſit gravis, hoc in loco ponderaret?

Gravia quandoque aſcendunt.

Et ne ullum dubium relinquatur circa Aerem ſub aqua contentum, quem per bullas ſponte erumpere videmus; nonne idem contingit in ligno ſub aquam vi depreſſo, quod ſibi relictum, in ſuperficiem aquæ ſponte (ut quidem videtur) emergere ſolet? an ovum ovo poterit eſſe ſimilius? Quod ſi ergo Aer abſolute levis dicendus, quod ſub aqua contentus ſurſum erumpere nititur; cur veremur ligno, cui idem accidit, abſolutam levitatem aſcribere? Non neſcio, quid errori anſam dederit: Ligno propterea gravitatem conceſſere Veteres, quod quamvis in aqua aſcenderet, præſto tamen eſſe viderent aliud Fluidum, nempe Aerem, in quo deſcendit: Cum vero deprehenderent, Aerem in omni fluido aſcendere, in nullo deſcendere; hinc factum, ut abſolutam ei levitatem imprudentius aſcripſerint: cum tamen ipſis cogitandum fuiſſet, ſi ſenſibus noſtris obviam forſan eſſet aliquod fluidum Aere adhuc levius, fore ut Aer in illo non minus fundum petere conſpiceretur, quam lignum in Aere; adeoque eum non tam abſolute levem pronunciandum, quod in reliquis fluidis aſcendit, quam vero magis minuſque gravem reſpectu horum aut illorum fluidorum; uti lignum Aere gravius eſſe dicimus, quamvis interea aqua minus grave ſit.

Sed piget, in re Sole meridiano clariore prolixiorem eſſe. Gravitas hujus noſtri, quem haurimus, Aeris apud pleroſque jam eſt in confeſſo: De ipſius vero quoque *Ætheris Gravitate*, quam hac Diſſertatione oſtendendam ſuſcepi, apud Scriptores Hydroſtaticos, quorum experimenta ad ſolius Atmoſphæræ preſſio-

H 3 nem

No. II. nem demonſtrandam tendunt, altum hactenus fuit ſilentium: adeo tamen evidens eſt, aut ego peſſime fallor, cjus rei argumentum, ut, illo intellecto, a nemine in dubium vocari amplius poſſe, firmiter mihi perſuadeam.

Occaſio ſcripti. Quia vero maximi momenti eſſe & ad majorem intelligentiam quamplurimum conducere judico, ſi qua primum occaſione quave via in cogitationes tuas incideris, enarres, quod alias per modum præfationis fieri ſolet; non abs re erit, ſi tribus id verbis hic innuam.

Incidi nuper in Scriptum aliquod *de Gravitate Aeris*, * Auctore Cl. VOLDERO, Profeſſore in Academia Lugduno-Batava Celeberrimo. Id cum ſecunda vice evolverem, cœpi attentius ruminare, quæ *ſect.* 37. *ſeqq.* de receptis duobus Motus generibus, docte & ſolide ſcripſit. Quæ quia ſequenti Tractatui ortum dedere, non poſſum, quin totidem pene Auctoris verbis, quantum ad propoſitum meum faciunt, huc transferam; quod citra Plagii notam interpretabitur benignus Lector.

Duo motus genera, Pulſio & Attractio. Dicit ibi, omnem Motum ad duo vulgo revocari genera; *Pulſionem* & *Attractionem*; utramque duplicem eſſe. *Pulſionem* vocari, ubi corpus, quod tanquam cauſa motus in alio corpore ſpectatur, vel *quieſcit*, dum alterum, quod ab illo impelli dicitur, ab eo recedit; vel *movetur*, & ad motum concitat id corpus, cui ſuo in itinere occurrit. *Attractionem* vero dici, ubi movens vel *quieſcit*, mobili ad ipſum accedente, vel *præcedit*, mobili illud inſequente. Prioris *Pulſionis* exemplum proponit in Magnete; qui licet ad ſenſum quieſcat, alium tamen magnetem ſimilibus polis ſe ſpectantem a ſe abigit; uti cum ferrum ad ſe attrahere dicitur, prioris *Attractionis* ſpecimen nobis exhibere poteſt. Poſteriorem *Pulſionis* ſpeciem ſpectari monet infinitis in caſibus; *Attractiones* vero primario patere in Antliis, in quibus embolo adducto, qui motus aquæ cenſetur cauſa, ſequitur pone ipſa aqua.

His

* Burchardi de Volder *Quæſtiones Academicæ de Aeris Gravitate.* Medioburgi, 1681.

His præmiſſis, quid de utraque ſpecie cenſendum ſit, inquirit; oſtendendo primo, in nullius corporis natura motum involvi, adeoque nullum corpus moveri poſſe a ſeipſo, ſed quodcunque movetur, moveri ab alio. Unde porro infert, id quod movet, neceſſario quoque moveri; cum nemo comprehendat, quo pacto corpus quieſcens ad motum concitet aliud, in quod ſua quiete agere non poteſt. Quibus ſtabilitis, priores ſpecies, tum *Attractionis*, tum *Pulſionis*, ubi corpus quieſcens aliud vel ad ſe allicit, vel a ſe propellit, ſponte ruere manifeſtum eſt. Poſteriorem *Attractionis* ſpeciem agnoſcit quidem, ſicubi movens & mobile vinculo quodam inter ſe connexa ſunt; ſed eam a Pulſione non differre ſimul monet. Alteram vero, quam *Suctionem* vulgo dicunt, qua corpus motum inſequitur corpus movens, quicum nullo vinculo conjunctum eſt, omnino rejicit, hac demonſtrationum ſerie uſus: Nullum corpus aliud movere potis eſt, niſi ei partem ſui motus communicet; non poteſt autem communicare partem, quin tantundem illi decedat; decedere vero nequit, quin id quod movetur, moventis, aut motui, aut determinationi impedimento ſit; impedimento denique illud eſſe nequit, niſi ſitum ſit in eadem linea per quam, & eaſdem partes, verſus quas fertur corpus movens. Si quis enim crederet, corpus, quod vel pone eſt, & extra viam ejus quod movetur, impedimento huic eſſe poſſe; eadem facilitate ſibi quis perſuaderet, (quod ejus non inficetum eſt ſimile) tormenti globum, orientem verſus exploſum, ſiſti in motu poſſe a mœnibus, quæ ad occidentem ſunt. Unde concludit, corpus quod a tergo eſt, ab eo quod præcedit, nulla ratione motum iri: cunctaque tandem eo dirigit, ut omnem Attractionem, Suctionem, atque his affinem vacui Fugam e rerum natura eliminaret.

No. II. Non datur Attractio diſtincta a Pulſione.

Huc cum perrexiſſem, Attractioni terra marique ſollicitus quæſivi patrocinium; & quamvis omnia rite demonſtrata eſſe evidenter perciperem, tamdiu ab aſſenſu me cohibui, donec plures motus, qui Attractionis ſpeciem præ ſe ferre poterant, in ſpecie examinaſſem, & tentaſſem, utrum per Pulſionem explicari commode poſſent.

Ad.

Digitized by Google

No. II. Natura Pulſionis. Advertebam autem primo illud in Pulſione; non neceſſum eſſe, ut movens ſemper mobile in directum a ſe abigat; ſed in diverſas illud partes impellere poſſe, pro diverſa obliquitate ſui appulſus. Experientia enim compertum eſt, ſphæram, ab alia ſphæra tactam & impulſam, ſecundum eam lineam propelli, quæ per punctum contactus & per centra utriuſque ſphæræ ducitur; nulla habita ratione lineæ, quam ſphæra impellens ante contactum deſcripſerat: quam naturæ legem in emolumentum ſuum apprime vertere norunt illi, qui ludo delectantur tudiculario (*jeu de billard*).

Quocirca, ut determinetur, quam in partem quælibet Pulſio fieri debeat, deſcriptus ſit circulus *a b c d*; eoque per lineas *a c*, & *b d*, in quatuor quadrantes diviſo, ponatur in ejus centro *e*, ſphærula per lineam *a e* delata; quæ, in puncto *i*, aliam ſphærulam *g* offendat, ſic ut linea *e i*, punctum contactus cum centro *e* jungens, (quæ producta etiam per centrum ſphæræ impulſæ *g* tranſibit) in directum ſita ſit cum recta *a e*; quo quidem caſu nullum eſt dubium, ſphæram *g* in directum propulſum iri ſecundum lineam *g c*. Si vero nunc ſphærula *e*, ad alteram *g* ita appellere ſupponatur, ut punctum contactus *i*, in alterutro quadrante *c e b*, vel *c e d* reperiatur, adeoque recta *e g*, per centra ſphærularum tranſiens, cum recta *a e* non in directum jaceat, ſed quemcunque angulum obtuſum conſtituat; tum ſphærula *g* non amplius feretur in directum per lineam *e c*, aut huic parallelam *g f*, ſed per rectam *g h*; ita ut linea mobilis *g h*, rectæ *e g* in directum exiſtens, eundem, quem iſta, cum linea moventis *a e* conſtituat angulum. Ubi denique ſphærula *e* alteram *g* ita offendit, ut punctum contactus utriuſque *i* incidat in lineam *e b*, vel *e d*, quadrantetenus diſtantem a recta *a e* deſcripta per motum ſphæræ *e*, ceſſabit omnis pulſio, eo quod jam tota ſphæra *e*, ſine obſtaculo, inter parallelas *m n* & *o p*, iter ſuum proſequi poſſit. E quibus haud difficulter conſtabit, fieri non poſſe, ut contactus ſphærularum fiat in quadrantibus *a e b*, vel *a e d*: defluens enim pila ex *a* verſus *e*, neceſſario prius aliquo ſui puncto offendet pilam immotam *g*, in *f*, eamque propellet per lineam

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

neam *g t*, obtuſum cum recta *a e* conſtituentem angulum. Adde, quod etiamſi per impoſſibile ſupponamus, pilam *e*, penetratis dimenſionibus pilæ *g*, in punctum *e* defluxiſſe; nulla tamen ratio eſt, quare altera pila *g*, poſt contactum *i*, debeat impelli per lineam *g u*; cum nullum afferat impedimentum pilæ *e*, quin libere iſta moveri pergat ex *e* in *c*. Quibus perpenſis, concludebam, in omni *Pulſione*, lineam moventis ante contactum deſcriptam, & lineam mobilis deſcribendam poſt contactum, obtuſum perpetuo angulum inter ſeſe conſtituere debere; & ſi quando deprehendantur formare acutum, dubitabam, an ille motus aliter quam per *Attractionem* explicari poſſit. No. II.

In omni Pulſione linea moventis & linea mobilis obtuſum angulum conſtituunt.

Talem vero motum reperiri primo ſuſpicabar in Re nautica, ubi Nautæ, vento etiam adverſo, ſpatia conficere norunt. Quoniam enim hoc in caſu plaga, e qua ingruit ventus, ab illa, in quam curſus navis directus eſt, minus quadrante abeſt; ventus, prima fronte, videri cui poſſet attrahere potius navem, quam a ſe repellere. Verum brevi deprehendi, & hunc navium motum cum Pulſionis legibus modo allatis optime conſpirare.

An ventus adverſus attrahat navem.

Eſto igitur *a b*, longitudo navigii cujuſdam (cujus prora *a*, puppis *b*,) eamque in tranſverſum ſecet recta normalis *c d*. Ventus, quem mihi imaginabar ut congeriem infinitorum globulorum ad vela allidentium, repræſentetur per parallelas *g h*, cum anteriore navis parte *h a* angulum quemcunque acutum *g h a* conſtituentes. Velum *l m* medio loco ſit expanſum inter lineas *g h*, & *a h*: quandoquidem noſtro in caſu vela ita dirigi ſolent, ut eorum planum inter plagam, e qua irruit ventus, & eam quam reſpicit prora, intermedium jaceat, ut hac ratione ventus a velis obliquius, quam ab ipſa nave excipiatur. Quo facto, ut pateat, in quam partem motus navis determinandus ſit; conſideremus ſolum venti globulum *e*, (quia reliquorum par eſt ratio.) Is propellere conabitur navem ſecundum rectam *i n*, ductam per globuli centrum & globuli velique contactum. Sed quoniam iſte motus magnam partem infringitur per reſiſtentiam aquæ poſt navem in ſpatio *a d b* contentæ; intelligamus illum compoſitum eſſe ex duobus aliis, quorum unus Fig. 5.

 pellit

Digitized by Google

No. II. pellit navem in tranſverſum juxta rectam *i d*, ſeu *o n*, alter in directum ſecundum lineam *d n*, vel *i o*: ſtatimque patebit, motum in tranſverſum, ſi non omnino, ſaltem maxima ex parte, ſublatum iri a tota illa globulorum aqueorum ſerie, quorum quia totidem, vel plures, navis longitudini obicem ponunt, quam globuli venti vela impellunt, mirum non eſt, quod huic determinationi ſufficienti impedimento eſſe poſſint. Eadem vero opera redditur hinc ratio, cur alter motus in directum debeat, vel nullum, vel exiguum detrimentum pati: cum enim pauciſſimi ſint globuli aquei, qui proræ cuſpidem excipiunt, eorum vires globulis venti reſiſtendo nequaquam pares erunt; unde navis a vento impulſa nullo negotio eos ſulcabit, atque ita perpetuo ſecundum rectam *i a*, incedere perget, nunquam valde notabiliter ad latus deflectendo. Quæ explicatio nos docebit, ad nullam hic Attractionem confugiendum, ſed motum hunc navigii, quanquam venti impulſui, ut videtur, contrarium, non minus per Pulſionem effici, quam ſi prora obverſa puncto *n*, cum plano veli *l m* perpendiculares conſtitueret angulos; hoc tantum cum diſcrimine, quod navis *i a* longe tardius incedere debeat nave *i n*; quia quo tempore hæc ſpatium *i n* percurrit, illa viam multo breviorem, nempe non niſi lineam *i o* emetitur. Horum vero motuum (ut hoc in tranſitu moneam) ſcietur proportio; ſi aſſumto radio *i n*, atque ſinu anguli *a i l*, hoc eſt, *n i d*, nempe recta *d n*, ſive *i o*; fiat, Ut ſinus obliquitatis veli cum nave, ad ſinum totum; ita via navis *a b*, ad viam, quam percurreret eodem temporis ſpatio, ſi vela haberet ad angulos rectos expanſa. Eruntque in univerſum velocitates navium ad invicem, ut ſinus obliquitatis velorum ad naves; ſupponendo vela eodem angulo ventos excipientia, æqualique ab iis impetu impulſa.

Clavus non tantum agit per modum vectis. Antequam ulterius progrediar, non poſſum ſub ſilentio præterire (quod nihil tale cogitanti inciderat) poſſe nimirum per hanc explicationem, genuinam reddi cauſam virtutis Clavi ſeu Gubernaculi; nimis enim evidentia ſunt, quam ut diſſimulari mereantur, nec Lectorem, ſpero, digreſſionis tædebit. Creditum

tum fuit tam a Veteribus, quam a pleriſque Modernis, Clavum unice agere per modum vectis, cujus hypomochlium, ſeu fulcimentum, ſit vel in centro gravitatis ipſius navigii, vel in puppis cardine, cui clavus inſeritur; potentia vero motrix in reſiſtentia ipſius aquæ ſtagnantis, ad quam allidit clavus. Sed bene obſervatum eſt a * quodam e Recentioribus, virtutem iſtam, qua clavus navim ſibi adhærentem circumagit, non unice naturæ vectis tribui poſſe; ſed præterea aliud aliquid agnoſcendum, in quo præcipuum ejus rei momentum conſiſtat. Nam ſi per modum vectis ſolum operaretur clavus; tum in quavis ſui inclinatione proram navis in eam partem flectere deberet, in quam ipſe inclinatus eſt, & quidem eo efficacius, quo rectiores cum longitudine navis lineiſve directionis conſtitueret angulos; quod tamen non omnino veritati conſonum deprehenditur: ſi enim clavus eouſque inflectatur, ut ejus latitudo perpendicularis ſit cum navigio, multo languidiorem factam comperiere ejus virtutem; quod ſi illum adhuc ultra perpendiculum ad navem, ſeu lineas directionis, inflectas, ut angulos acutos cum illis efformet, tunc non ſolum prora non convertetur amplius ad clavum, ſed in contrarium potius latus impelletur. No. II.

Quam bene autem hæc obſervavit prædictus Auctor, tam abſtractam & obſcuram effecti rationem aſſignat; recurrens ad neſcio quem fomitem in corporibus motis latitantem, qui ad tempus otioſus, mox actuoſus eorum lationem, pro re nata, nunc accelerare, nunc retardare poſſit. Uter vero intelligibilius rem expediat, mox judicabit Lector.

Sit ergo *a*, prora alicujus navigii; *b*, puppis; *b c*, gubernaculum ad ſiniſtram inflexum, ea ratione, ut primo cum longitudine navis *a b* conſtituat angulum obtuſum, dehinc rectum, tandem acutum: *d e*, ſit linea directionis, ſecundum quam fit impulſus aquæ ad gubernaculum; perinde autem eſt, ſive nave immota, aqua deorſum labens allidat ad gubernaculum, *Fig. 6. 7. 8.*

I 2 ſive,

* Stephanus Gradius *in prima Diſſertationum quatuor*, Amſtel. 1680. *impreſſarum.*

No. II. ſive, nave a vento ſurſum impulſa, gubernaculum allidat ad aquam ſtagnantem: utroque enim caſu concipiemus, quo pacto gubernaculum *bc* per occurſum globulorum aqueorum *e*, (juxta ea, quæ ſupra diximus de determinatione motus duarum pilarum ſibi occurrentium) debeat impelli per lineam *ef* ipſi gubernaculo perpendicularem, atque per centra globulorum, punctumque contactus tranſeuntem. Quia vero interim venti impetus, vel remorum efficacia, navem alio propellit, nempe ex *b* in *a*; poteſtmus priorem impulſum, ex *e* in *f*, conſiderare, ut compoſitum ex duobus aliis, quorum unus navem directe ex *e* verſus *g*, alter in tranſverſum ex *e* in *h*, protrudere conatur; notabimuſque, per lationem navigii ex *b* in *a*, tolli quidem illum motum, qui fieret in contrariam partem ex *e* in *g*, minime vero alterum, quo idem navigium ad latus, ex *e* in *h*, impelli debet. Ex his enim manifeſtum eſt, ſi gubernaculum ſiniſtrorſum flexum obtuſum cum longitudine navis angulum conſtituit, debere puppim dextrorſum impelli, (unde prora viciſſim ſiniſtrorſum ad gubernaculum converti videtur) eo validius, quod motus iſte gubernaculi lateralis cum illa vi, qua agit per modum vectis, in eandem partem nunc conſpirat: ubi vero gubernaculum ad navem perpendiculare exiſtit, eo languidiorem liquet fore converſionem proræ ad ſiniſtram; eo quod, evaneſcente motu laterali, gubernaculo illa tantum virtus relinquitur, qua per modum vectis operari poteſt: ubi tandem clavus angulum cum nave conſtituit recto minorem; perſpicuum utique eſſe puto, impulſum lateralem & illum, qui fit per modum vectis, in diverſa tendere, proinde navem obtemperare debere prævalenti. Unde quoniam conſtat, hoc in caſu proram in aliam quam prius partem, dextram videlicet, converti, vecte nequicquam contrarium ſuadente; ſequitur, potiſſimam rationem virtutis, quam gubernaculo ad gubernandos navium curſus ineſſe videmus, conſiſtere in motu iſto laterali a nobis modo explicato, non autem in illo, qui fit per modum vectis.

Attractiones Magneticæ. Sed ſatis diu pelago ratem commiſimus; elementum noſtrum Terram repetamus, viſuri, ſi qua, in illa Attractionis ſeſe nobis offe-

No. 11. Electricæ fiunt per Pulſionem.

offerant veſtigia. Accedendum autem primo fuiſſet ad Virtutem attractivam Magnetis, (eique cognatas attractiones electricas) niſi exiſtimaſſem vel ſublimioris hæc eſſe ſpeculationis, vel nimis præclara ea de re *Philoſophi* inventa, quam ut in iis non ſit acquieſcendum: quamvis enim, quoad ipſam rei veritatem, multis forte non ſatisfaciunt; poſſibilitatem tamen hoc Naturæ miraculum per *Pulſionem* explicandi, abunde comprobant: vid. *Princ. Phil. part.* IV. §. 133. *ſeqq.*

Attractio Effluviorum a Sole fit per Pulſionem.

Nec magis immorandum eſſe duxi Vaporum & Exhalationum e Terra Attractioni: nam quanquam invenirem CARTESIUM in ejus explicatione ſatis jejunum, *Cap.* II. *Meteor.* de commoda tamen ſolutione non deſperavi, conſiderans fieri poſſe, ut materia ſubtilis, calore Solis multum agitata, minutiſſimas quaſque particulas a corporibus terreſtribus abradat, quæ avulſæ, cum poſſint eſſe minores particulis atmoſphæricis, vehementiorem iſtis concipiant motum, atque adeo fortiorem a centro Terræ recedendi conatum, & majorem in ſpecie levitatem acquirant, quafiat, ut in altum evolare neceſſum habeant, donec, ſuperata ponderoſiore atmoſphæræ parte, in ea regione ſubſiſtant, quam ejuſdem ſpecificæ levitatis particulæ occupant. Quod Experimenta Boyliana de effluviis & fumis, in recipiente pleno, aſcendentibus, exantlato, ſubſidentibus, non parum confirmant, vid. *Libr. de nov. experim. num.* 29. *&* 30.

Attractio olei in lampade fit per Pulſionem.

Quo pacto porro, oleum attrahatur e vaſculo a flamma lampadis; res erat explicatu non difficilis, ſi ſupponatur, preſſionem Aeris flammæ imminentis maximam partem impediri agitatione primi elementi flammam conſtituentis; huic enim conſequens eſt, aerem incumbentem oleo reſtagnanti in vaſe, illud per ellychnium ſurſum impellere debere. Hinc eſt, quod Matronæ parſimoniæ ſtudentes ſolent operculo vaſculum occludere; ut debilitata, hac ratione, aeris preſſione, oleum flammæ non tanta copia affluat, nec tam cito conſumatur.

Suctio & Reſpiratio fiunt per Pulſionem

Suctionis vero, & huic affine *Reſpirationis*, negotium parumper videbatur obſcurius: nec enim ſufficiebat dicere, liquorem ideo per tubum in os ſugentis attolli, quod, poſt attractionem aeris, liquor

No. II. liquor in tubo nullum amplius ſupra ſe pondus ſentiat, quo deprimatur; unde obſecundare neceſſum habeat preſſioni aeris externi, & ab illa ſurſum in os impelli. Quippe idem quæri poterat de aere in tubo, per quamnam pulſionem illi hæc aſcendendi vis adveniat. Quare ut totum hoc negotium per Pulſionem expediatur, Microcoſmi ſtructura conſulenda erit; qua inſpecta, deprehendimus, per Suctionem nec attrahi aerem in tubo, nec liquorem poſt aerem, ſed dilatari tantum beneficio certorum muſculorum, vel ſecundum alios diaphragmatis motu, cavitatem abdominis, atque ita rarefieri aerem huic cavitati incluſum, qui hactenus compreſſos tenuit pulmones, aeremque, in ore & aſpera arteria ſtabulantem ab ingreſſu in illos arcuit. Iſte enim aer, ſic rarefactus & ad majus jam ſpatium expanſus, non amplius tanta vi comprimere poteſt, ut antea, pulmones; unde fit, ut, hac preſſione ſublata, externus Atmoſphæræ cylindrus liquorem ſurſum per tubum in os, aeremque, ex ore, aſperaque arteria, in pulmones impellat. Advertebam autem ſimul, fieri non poſſe, ut cavitas abdominis in tantam amplitudinem diſtendatur, aerque illi incluſus eouſque debilitetur, ut omni prorſus exuatur robore; cum præſertim per inflatos pulmones ſubinde ad priſtinam reducatur anguſtiam, vireſque ſuas reſumat. Unde concluſi, ſuctione orali liquorem neutiquam in tantam altitudinem elevatum iri, in quantam elevaretur, ſi, applicata antlia, preſſio illa aeris tubo imminentis embolo perfecte interciperetur: quod ipſum quoque teſtatur experientia; quippe Mercurius etiam maximo adhibito conatu vix ad altitudinem paucorum digitorum ſolo ore inſugi poteſt; nec credo quenquam eſſe, qui ſibi perſuadeat, ſe ſola halitus ſui attractione imitaturum Antliam, quæ aquam ad 34 pedum altitudinem in tubum attollere ſolet.

Attractio catenæ & Tractio currus fiunt per Pulſionem.

Cum hac ratione mihi ſatisfactum eſſet circa Reſpirationem & Suctionem; reliquas quoque Attractionis ſpecies perluſtrare ſuſtinui. In Attractione quidem Catenæ pulſio unicuique obvia eſſe poteſt; utpote qua attracta, præcedens annulus ſubinde propellit ſequentem in flexura. Cui ſimile quid conſpicitur in Tractione Currus, quæ nihil aliud eſt, quam plures pulſiones ſibi mutuo con-

concatenatæ. Equus enim pellit ante ſe helcium ſeu collare, collare funem, funis clavum, clavus currum, curruſque pellit axibus ſuis rotas. No. II.

Attractio baculi fit per Pulſionem.

Cum manus attrahit baculum, pulſio partium baculi non adeo quidem ſenſibus manifeſta eſt; eam tamen facile ſibi quis perſuadeat, cum conſideraverit, nullius baculi ſuperficiem adeo exquiſite tornatam & lævigatam eſſe poſſe, quin infinitis adhuc dehiſcat hiatibus & poris, inter quos innumeræ protuberent aſperitates, velut totidem anſulæ ſeu manubria, quibus propelli manu poſſit baculus: cujus rei indicio eſt, quod ad movendum baculum non ſufficiat, eum immediate, ſed ſuperficiarie tantum tetigiſſe; verum requiratur inſuper firma & arcta manus compreſſio, qua molles ejus partes baculi poris ſufficienter intrudi, & anſulis iſtis applicari poſſint.

Examinatis ita præcipuis *Attractionum* generibus, credebam me in iis omnibus *Pulſionem* ſatis planam reddidiſſe, nec poſſe dari aliud exemplum, in quo non pari modo oſtendi poſſet *Pulſio.* Sed expecta paulum, & videbis, longe maximas adhuc difficultates reſtare ſuperandas. Quem in finem, ultimo exemplo de baculi Attractione manu facta pertinacius inhærebo.

An partes baculi cohæreant cæmento?

Intelligo ex antedictis, quænam *Pulſionis* partes ſint in *Attractione* baculi: nunquid vero totius baculi? minime; ſed ſupremæ tantum ejus partis cui manum immediate applicuiſti. Quare itaque moventur reliquæ? An pelluntur? nullum apparet Pulſionis veſtigium. Forſan pellit præcedens ſequentem, ſequens tertiam, hæc quartam, uſque ad alteram baculi extremitatem. Id capiat qui volet, attrahi reliquas video, pelli (cum ſint extra viam partis motæ, imo pone ipſam) non capio. Verum, ne deſponde animum; datur forte occultum quoddam vinculum, cæmentum, ſive gluten, quod partes baculi ita firmiter connectit, ut nulla poſſit moveri abſque altera. Itane vero? Quale cæmentum? miror quo pacto cæmentum a parte baculi præcedente, & ſequens a cæmento impellatur. Impellantur autem; habet ſuas quoque cæmentum partes: dic, ſodes! qua ratione prior impellit poſteriorem: dabitur fortean cæmenti cæmentum? Nugæ!

Digitized by Google

No. II. gæ! Bona verba, quæſo! nondum cane receptui; omnia prius tentanda; meminiſtin, te quondam legiſſe, corpora dura conſta-

Fig. 9. re particulis ramoſis, figuram hamorum vel uncinulorum præ ſe ferentibus, quibus ſe mutuo inſtar annulorum catenæ amplexentur. En reperiſti tandem myſterium, habes cui tuto inſiſtas; nempe capis, quo pacto partis ſuperioris *a b* flexura inferior *b* pellat ante ſe ſuperiorem inferioris *c*, hujuſque flexura inferior *d* ſuperiorem ſequentis *e*, idque continua ſerie ad alterum uſque baculi extremum. Specioſe! interim ne præcipites tuum εὕρηκα: clare ni fallor percipis, hamulos iſtos non eſſe puncta mathematica, neque in loco indiviſibili; ſecus enim tota baculi longitudo redigeretur ad punctum. Quid ergo? adhuc erunt extenſi; habebunt adhuc partes extra partes; effare quo cæmento

An Funiculo? hæ particulæ cohæreant. Confugere hic ad Funiculum neſcio quem, partes corporis tam pertinaciter connectentem (quod *Franciſci* LINI Angli fuit ſomnium) ſtrenue nugari eſt, non philoſophari. Nemo enim, ut opinor, concipiet, LINI Reſtiarium adeo fuiſſe ſubtilem, ut quemadmodum APELLES duxiſſe olim fertur lineam abſque latitudine, iſte fabricare potuerit funiculum omnis quoque longitudinis expertem. Si vero habet longitudinem, id eſt, extenſionem; id eſt, partes extra partes; liquet, rationem nondum eſſe redditam, cur ipſius quoque funiculi partes non diſſolvantur; nec reddi poſſe, niſi funiculos funiculis in infinitum addere, id eſt, in infinitum in-

An ſolis hamulis ſibi denſiſſime implexis? Fig. 10. ſanire velis. Alia ergo via elabi ſtudebo; dicam, in baculo non unam tantum eſſe ſeriem hamorum vel uncinulorum (qualis conſpicitur in *Fig.* 9.) Sed innumeras tales eſſe catenulas juxta ſe poſitas, ſibique denſiſſime implexas (quales adumbrantur in *Fig.* 10.); quo fiat, ut quamvis una altera catenula rumpatur in medio alicujus uncinuli, ea tamen ſuſtentetur ab aliis catenis lateralibus, in quibus nulla talis potuit fieri ruptura, quod forte e regione rupturæ correſpondeant flexuræ uncinulorum: Ita quamvis, attracto baculo, uncinulus *i m* rumpatur in medio ſui *o*, manebunt tamen reliqui a latere *p n*, *n l*, & ſequentes integri, quia ſunt in flexuris, quæ ſeparationem impediunt. Sed nequicquam

Digitized by Google

quam hæc affulſit reſpirandi rima: nonne prævides, quæ jugulum tuum repetit, inſtantiam? Si una rumpi conceditur catenula, rumpentur omnes, non quidem in flexuris uncinulorum, ſed in illorum medio. Ita quamvis flexuræ uncinulorum *p n*, *n l*, & ſequentes, prohiberent, ne rumperetur baculus in directum ſecundum planum *o n r*, ad modum ligni ſerra fiſſi; non poſſunt tamen impedire, quin ſingulæ catenulæ aliis in locis rumpantur, una altius, altera humilius, in punctis *o*, *o*, *o*, inſtar ligni manu confracti; atque ita omnium partium baculi divulſio ſequatur.

An quies ſit cauſa cohæſionis partium duri corporis?

Cum dubius ita fluctuarem, ſuccurrit CARTESII ſententia, de cauſa iſtius cohæſionis partium duri corporis, quam in earumdem *quiete* conſtituit, *Parte ſecunda Princip. Philoſ.* §. 55. ubi ait: *Neque profecto ullum glutinum poſſumus excogitare, quod particulas durorum corporum firmius inter ſe conjungat, quam ipſarum quies.* Sed ut verum fatear, non poſſum a me obtinere, ut iſta acutiſſimi Philoſophi deciſione hac vice acquieſcam; cujus diſſenſus rationes, ſalvo aliorum judicio, fuſius exponam; (utinam vero etiam hoc ipſo gratiam inirem aliquam apud Antiquæ Scholæ Doctores!)

Statim autem animadvertimus, explicationem cohæſionis corporum per quietem involvere meram, quam vocant, principii petitionem, atque explicationem ejuſdem rei per eandem; quod omnibus a partium ſtudio alienis patebit, ſi modo conſiderent, ſe non aliam habere poſſe notionem cohæſionis corporum, & quietis eorumdem. Quid enim, obſecro, aliud eſt cohærere duo corpora, quam non ſeparari ab invicem? & quid non ſeparari, niſi non transferri unum ex vicinia alterius? non transferri autem ex hac vicinia, nonne idem eſt quod non moveri? Cum ergo cohæſionis conceptus nihil involvat præter negationem motus, enunciatio hæc, Cohæret, quia quieſcit, reſolvetur in iſtam, Non movetur, quia quieſcit. Neſcio vero quid ſit ταυτολογεῖν, ſi hoc non ſit.

Obſervandum vero præterea, dictionis iſtius, Cohæret, ſeu non movetur, quia quieſcit, duplicem eſſe poſſe ſenſum, vel enim ſignificat, corpora, eo ipſo quo quieſcunt, vel dum quieſcunt, mo-

Digitized by Google

No. II. veri non poſſe: vel innuere vult, illa quæ primo minuto juxta ſe quieverunt, hac ſua quiete, cauſam eſſe, non tam quod eodem illo minuto cohæſerint, quam quod ſecundo, tertio, & ſequentibus minutis, cohærere pergant. Si prior ſenſus obtineret, tum, præter inanem ταυτολογίαν, compoſitionis quoque luderetur ſophiſmate: Nam ſi quis ad probandum, nunquam motum iri corpora, rationem ſufficientem dari credat ex eo quod, dum quieſcunt, moveri non poſſunt; ille non minus impertinens eſſet, ac ſi quis probaturus ſe nunquam moriturum, diceret ſe, dum vivit, mori non poſſe. Neque poſterior ſenſus valde approbandus: Quia enim cohæſio nihil aliud dicit præter meram negationem motus, atque adeo ipſiſſimam quietem; mirum nobis videbitur, quo pacto quies efficere poſſit, ut corpus perpetuo quieſcat, cum nihil ſit cauſa, vel efficiens, vel conſervans, ſui ipſius. Facile equidem concipimus, corpus quieſcens, quamdiu a nullo alio impellitur, perſeveraturum in hac ſua quiete, eo quod nihil poſſit moveri a ſeipſo: habere vero vim nonnullam poſitivam ad impediendum ne moveatur, etiam tum cum ab alio ad motum ſollicitatur, intellectu valde difficile eſt. Quid enim eſſet illa vis? an conſiſtit in hoc, quod corpus quieſcens alii corpori tam pertinaciter adhæreat, mediante funiculo quodam, qui ſeparationem eorum prohibeat? an potius quod vim & conatum moventis, æquali vi & conatu, a ſe repellat, per quandam reactionis ſpeciem? Verum quod quieſcit, qui agere hac ſua quiete poterit in aliud corpus? Sed pone agere; quæ ratio, cur hæc quietis actio, in uno corpore minima vi, in altero vix maxima, tolli poteſt? an ergo in uno corpore efficacior, in alio minus efficax eſt? abſurde; cum quies non recipiat magis & minus, inſtar motus. Fatendum ſane eſt, per impulſum moventis non ſemper tolli quietem corporis quieſcentis; unde hoc *reſiſtere* dicitur; verum quis ſcit, an hæc reſiſtentia poſitivam quandam ſupponat vim, in ipſo corpore quieſcente latitantem; an aliquid aliud potius, quod adhuc inveſtigandum eſt. Antequam igitur cognoſcamus, quid hoc ſit, ſuſpendamus tantiſper judicium; & credamus, hanc eſſe Dei voluntatem, ut corpus, cum, tali, vel

tali

Digitized by Google

tali mole, aut celeritatis gradu, ad aliud corpus quieſcens appellens, illius quietem nunc ſuperare, nunc non ſuperare debeat, idque juxta æternas quaſdam leges, quas primus Motor naturæ in creatione indidiſſe cenſendus. No. II.

Quanta autem virtute & mole debeat inſtructum eſſe unumquodque corpus, ut movendo alii corpori quieſcenti aptum ſit, determinabimus ex generalibus illis motus regulis ab ipſo CARTESIO allatis; ut ſi forte nobis corpus occurrat quod moveri nequit, cum juxta regulam moveri deberet, concludamus ejus reſiſtentiam neceſſario aliunde quam a quiete derivandam eſſe. Harum regularum quinta eſt: *Si corpus quieſcens C eſſet minus quam B, tunc quantumvis tarde B verſus C moveretur, illud ſecum moveret, partem ſcilicet ſui motus ei talem transferendo, ut ambo poſtea æque celeriter moverentur.* Hujus recordatus Auctor, poſtea § 63. recte ſibi objecerat exemplum clavi ferrei, cujus ambæ medietates, quarum ſingulæ pro uno corpore numerari poterunt, quamvis manibus noſtris longe minores, tam firmiter tamen ſibi mutuo adhærent, ut nulla manuum vi ab invicem divelli poſſint, uti juxta citatam regulam divelli deberent, ſi nullo alio glutino ſibi invicem adhærerent, quam quod juxta ſe quieſcunt. Ad hanc autem objectionem ſibi reſpondet ibidem *Philoſophus*, rationem, cur clavus ſola manuum vi frangi nequeat, hanc eſſe; quod manus noſtræ, quæ ob mollitiem ſuam ad fluidorum corporum naturam accedunt, non totæ ſimul agere poſſint in clavum, ſed ea tantum ipſarum pars, quæ clavum proxime tangit; unde cum hæc pars minor ſit parte clavi, cui incumbit, mirum non eſſe, cur facilius a reliqua manu ſeparetur, quam pars clavi a reliquo clavo.

Ut vero precariam hanc eſſe reſponſionem oſtendamus, varia nobis obſervanda venient: Primo, ſi quies partium clavi illum manu frangi impediat, eademque ſit cauſa, cur uno ejus extremo attracto ſequatur pone alterum; quid dicendum de bacillo ligneo æqualis craſſitiei & molis, cujus ſi unam extremitatem attrahas, prompte ſequi videbis reliquam, priorique cohærere? An per quietem ſufficienter explicetur, cur clavus manu frangi nequeat?

No. II. rere? An quia quieſcunt ejus partes juxta ſe mutuo? Si ſic, quidni hac quiete fiet, ut eadem difficultate rumpatur bacillus, qua flectitur clavus? nunquid enim pars manus minor eſt parte bacilli, cui incumbit? nam tametſi lignum habeat plures ferro poros, cogitandum habere viciſſim quoque pauciores manus partes ſibi incumbentes, quæ in illud agere poſſint.

Præterea, ſi eadem eſt quietis ratio in attrahendo, atque in frangendo clavo; nulla ſufficiens ratio reddi poterit, cur in attractione clavi pene nullum, in ejus inflexione maximum conatum adhibere ſoleamus; ſiquidem æque, per utramque, partes clavi ad motum & ad ſeparationem mutuam invitantur.

Fig. 11. Non parum etiam geſtio audire rationem, ob quam lignum ſatis craſſum, applicato genu, vel etiam ſola manu (pollice ad latus ligni innixo) facile diſrumpi queat, conatu frangendi facto juxta lineam *a b*, vel *a c*, perpendicularem longitudini baculi *d e*; cum tamen tenuis bacillus, aut corpus adhuc fragilius, nullis humanis viribus diffringi poſſit, ubi conatus adhibetur in directum ſecundum lineas *e f*, & *d g*: tametſi enim obtendi poſſet, id fieri ob naturæ a vacuo abhorrentiam, eo quod, facta hoc ultimo caſu ſeparatione, aer non poſſet eodem momento a lateribus bacilli ad ejus medium irruere; non tamen ita reſpondebunt Vacuiſtæ, nec inter Pleniſtas illi, qui quietem cohæſionis cauſam ſtatuunt.

Iterum miretur forte aliquis, quare eadem manuum vis, quæ ſeparat alia quieſcentia multo majora clavo, quæ librum de tabula ſeparat juxta quam quievit, ingentia pondera in terra quieſcentia in altum elevat, non poſſit tollere quietem particularum clavi. Dicis, ſuperficies libri & tabulæ, ponderis & terræ, non immediate ſe contingere, ſed intercedere utrinque aerem, vel fluidum aliud ſubtilius. Verum ipſe hic aer, qui intermediat, ejuſve particulæ, aut quieſcunt etiam juxta ſuperficiem libri vel ponderis, aut moventur: ſi quieſcunt; iterum redibit quæſtio, cur hanc quietem ſuperare valeat vis manus, cum non valuerit ſuperare illam particularum clavi longe minoris: ſi moventur; etiam liber in menſa jacens, & pondus in

terra

terra quieſcens movebuntur, cum particulæ aeris nequeant transferri ex vicinia libri & ponderis, quin hæc transferantur ſimul ex vicinia illarum: ſic nihil demum ſola manu moveri poterit, quod prius non motum fuerit; ſic omnia corpora aeri expoſita, etiamſi non impulſa, movebuntur; ſic movebuntur ædificia, turres, montes, &c. Scio, quamvis hæc, a communi loquendi uſu alieniſſima, in Auctoris tamen hypotheſi non adeo abſurda eſſe. Sed illud potiſſimum hic obſervandum; quod proprie hic quæſtio non ſit, an corpus aere undiquaque ambitum recte dicatur moveri, necne, reſpectu habito ad aerem ambientem; hæc enim relatio, pure extrinſeca, nullam realem mutationem vel modum addit corpori: ſed quæritur, an corpus iſtud abſolute per ſe, & tanquam in vacuo ſpectatum, poſſideat illam vim, quæ agitat corpora, quæque eſſentiam motus conſtituit; an vero hæc vis inſit ſoli aeri ambienti, an denique utrique, ita ut aer allidens ad corpus, ei partem harum virium communicet? Neutrum dicere poterit CARTESIUS, quin regulæ ſuæ quartæ contradicat: ſi omnis movendi vis ſit penes aerem, nulla penes corpus craſſum aere circumdatum; quo pacto illi a manu toties minore iſta vis imprimetur? ſin illam communicatam ſupponat ab aere, meminiſſe debuiſſet, fluidiſſimi corporis illas tantum particulas in corpus agere poſſe, quæ illud proxime ambiunt; ſed hæ omnes ſimul ſumtæ forte ſexcenties minores ſunt mole commovenda; quo pacto ergo huic partem motus ſui juxta regulam communicabunt? Sed ſenſibili aliquo exemplo forſan evidentius inſufficientia explicationis Carteſianæ demonſtrabitur. No. II.

Quem in finem repetamus idem, quod nobis Auctor ſubminiſtravit, exemplum clavi: Sumatur clavus ferreus, intrudatur mediotenus arcto foramini parietis, altera medietate extra parietem prominente; hanc deſuper malleo pete, & comperiere, illam ſat validos ſuſtinere ictus, antequam vel curvetur ſemel, nedum frangatur. Si nullum aliud glutinum eſſet, quod partes clavi connecteret, quam ipſarum quies; ſequeretur juxta citatam regulam, ad impulſum mallei, utpote corporis clavo longe majoris, partem clavi prominentem a reliqua non tantum avulſum, ſed ea

Digitized by Google

No. II. quoque celeritate latum iri, quæ æqualis fere eſt velocitati mallei, antequam clavum attigiſſet. Supponamus enim malleum non niſi nonagies novies quantitate excedere clavum, & uno pulſu arteriæ ſpatium unius perticæ in aere emenſum fuiſſe; communicabit igitur, juxta regulam, clavo in occurſu centeſimam partem ſui motus, nonaginta novem pro ſe retentis; ut ſic malleus & clavus æquali celeritate ferantur: nempe quia malleus centeſimam tantum partem motus ſui amiſit, uterque pulſu arteriæ $\frac{99}{100}$ unius perticæ emetiri debet; quod ſane fieri nequit, niſi pars iſta clavi ab altera quieſcente ſeparetur. Nec valet hic *Philoſophi* exceptio: malleus enim, cum corpus ſit, non inſtar manuum molle, ſed duriſſimum, hinc non tantum ſuperficie illa, qua clavum immediate contingit, imo nec illa ſua craſſitie tantum, quæ clavo directe incumbit, ſed tota ſua mole & ſoliditate in clavum agere cenſendus eſt. Hanc quippe eſſe corporum durorum naturam experitur quivis, qui magnum onus in capite geſtans, non tantum ſentit pondus illius cylindri, qui capiti directe incumbit, ſed & totius molis reliquæ, quæ extra caput prominet.

Ut vero rem magis illuſtremus, ſuſpendatur ex hoc clavo parieti infixo malleus; evidens eſt, non tantum malleum, ſed præterea magnum pondus eidem clavo appenſum ab ipſo ſuſtentatum iri. Pari ratione axiculus bilancis utramque lancem, una cum multis centumpondiis, & uncus ferreus ſatis exiguus immenſæ molis campanas ſuſtinet. Idem autem uſu venit in his exemplis, quod in præcedenti: ſi enim ibi clavus per mallei ex alto ruentis impetum ad ſeparationem invitatur, non minus hic clavus, axiculus, & uncus a tam vaſtis ponderibus ſibi appenſis, ad quorum molem nullam pene habent proportionem, ſollicitantur ad motum: de quo facile conveniemus, ſi perpenderimus, non poſſe appendi hæc pondera, quin tota ſua mole ſuper clavo, axiculo, vel unco gravitent, illoſque premant; premere autem non poſſe abſque conatu illos loco movendi, adeoque partem a parte ſeparandi. Quæ cauſa ergo, cur nulla actualis ſeparatio ſequatur? anne quies particularum clavi, axiculi, unci? Fabulam nobis

Digitized by Google

nobis narras, CARTESI: annon hæc tolli deberet vi regulæ tuæ quintæ per preſſionem vaſtorum corporum ipſis appenſorum, ad quorum molem nullam imaginabilem proportionem habent illæ particulæ? No. II.

Firmitas corporum tribuenda compreſſioni corporis alicujus externi.

Poſtquam itaque certo certius cognoviſſem, neque catenas, nec hamulos, nec funiculum, nec ipſam quietem, nec quodvis aliud cæmentum, quod inter particulas durorum corporum intercedere forte poſſet, earum cohæſionem ſufficienter explicare; judicavi longe aliud hic latitare myſterium. Et quum perſpicerem, duo corpora perinde cohæſura, ſive ab interno vinculo connectantur, ſive ab externa vi comprimantur; non dubitavi tandem concludere, cohæſionem partium duri corporis neceſſario acceptam ferendam extrinſeco alicui corpori comprimenti, quodcunque demum illud fuerit. Tali enim, ſi quod detur, glutino longe ſane firmius conjungi intelligemus particulas durorum corporum, quam ipſarum quiete, aut alio quovis cæmento, modo indicibili illas connectenti.

Cui ſi animum advertiſſet CARTESIUS, non difficulter agnoviſſet infirmitatem illius ſui dilemmatis, quo uſus fuit ad quietem hujus cohæſionis cauſam aſſerendam, quando pergit loco allegato: *Quid enim eſſe poſſet glutinum iſtud? non ſubſtantia, quia cum particulæ iſtæ ſint ſubſtantiæ, nulla ratio eſt, cur per aliam ſubſtantiam potius, quam per ſe ipſas jungerentur: non etiam eſt modus ullus diverſus a quiete; &c.* Quid ſi enim ſubſumtionem invertam: *Atqui non eſt modus* (proinde nec quies); modi enim non conjungunt, quia modorum non eſt agere, ſed ſubſtantiarum per modos. *Ergo ſubſtantiam eſſe oportet:* Sed ſi ſit ſubſtantia, an illa nulla poterit eſſe alia, quam ipſæ cohærentes particulæ? imo quævis alia potius, quam iſta; cum uti nihil a ſeipſo moveri, ita nihil per ſeipſum alteri jungi poſſit: Notandum autem, non obſcure hic prodere *Philoſophum*, ſe per illam aliam ſubſtantiam nullam aliam intellexiſſe, quam intermediam inter duas particulas intercedentem; cum hac ratione verum ſit, ad vitandum progreſſum in infinitum, ſubſiſtendum neceſſario eſſe in duabus tandem particulis, quæ per ſe cohæreant, abſque interventu aliarum

No. II. rum mediarum. Sed dum ita ratiocinatur, non advertendo ad aliam ſubſtantiam externam & ambientem, qua particulæ connecti poſſint; perinde facere videtur, ac ſi quis librum ſub compactoris prelo videns, & ad prelum non attendens, inferre vellet, cohæſionem foliorum quieti illorum aſcribendam eſſe, ex eo quod nequeat attribui vel ipſis foliis, vel ulli ſubſtantiæ interceptæ inter folia, utpote quæ nulla eſt. Imo mirari merito ſubit, cur acutiſſimus Philoſophus, qui primus claros in Philoſophiam conceptus intulit, quique corporum gravitatem, non indicibili cuidam principio interno, ſed ambientis materiæ preſſioni aſcripſit; cohæſionem tamen illorum intrinſecæ quieti, cujus quæ ſint connectendi vires, intelligere mens noſtra nequit, quam vero externæ preſſioni tribuere maluerit.

Et quidem Gravitati Atmoſphæræ.

Poſtquam itaque ſatis, ut opinor, conſtiterit, cohæſionem durorum corporum nulli alii cauſæ, quam compreſſioni alicujus corporis externi deberi; non multum porro illi determinando inſudabimus, cum præter Aerem nullum detur, quod corpus durum immediate tangat & ambiat. Illud tantum inquirendum, an cum verbi gr. manu attraho baculum, ille duntaxat aer, qui per motum brachii mei expellitur, & per circulum ad alterum baculi extremum defertur, baculum poſt manum pellat, ejuſque partes ita cohærere faciat. Id namque videtur ſuaderi ex eo, quia quo ponderoſius corpus quod attrahitur, eo major ei attrahendo conatus adhibendus; propterea quod majus pondus magis quoque reſiſtit aeri pellenti ſe, & conſequenter manui pellenti aerem. Verum quod ſolus aer manu expulſus hanc baculi cohæſionem non efficiat, exinde liquet, quia nulla eſt ratio, quare iſte aer expulſus potius ad imum baculi per majorem ambitum, quam per minorem peripheriam ad quamvis aliam ejus partem intermediam deferatur: cum enim partes baculi nullo cohæreant cæmento, & per attractionem manus ſuperior tantum baculi pars ad motum ſollicitetur, adeoque diſponatur ad hiatum relinquendum inter ſe & inferiorem, locumque aeri cedendum; videtur potius, aerem manu expulſum inter illas ſeſe inſinuaturum, quam vero longiori via ad imum baculi perrecturum; cum natura

natura via, quantum licet, breviſſima agere nitatur. Illud vero cum primis hic animadvertendum, quod ſi ſolus aer a manu attrahente expulſus cohæſionis cauſa ſit; ſequeretur, ſi loco attractionis ſuſpenderetur in aere baculus, eum ſubito in partes collapſurum eſſe, quod tum nullus amplius a ſummo baculi extremo propelleretur aer; ceſſante enim aeris expulſione, tanquam cauſa, deberet ceſſare cohæſio partium baculi, velut effectus. Unde cum cohærere pergant, alia huic effecto cauſa quærenda; & quandoquidem præter generalem totius Atmoſphæræ preſſionem (qua gravitatis effectus in corporibus terreſtribus producitur) nulla alia meditanti ſeſe preſſio offert; neceſſaria conſequentia infero, hanc demum veram eſſe iſtius cohæſionis cauſam. No. II.

Cui aſſertioni ſtabiliendæ opportune incidit celebre illud Experimentum de duobus marmoribus politis & lævigatis, quæ ſibi juncta, ut nullus aer intermediare poſſit, quovis cæmento tenacius cohæreſcunt, adeo ut niſi maxima adhibita vi avelli a ſe mutuo nequeant. Quod Phænomenum, ubi per preſſionem vel gravitatem atmoſphæræ explicant Scriptores Hydroſtaticorum, hoc volunt: Cum duo marmora ita ſibi juncta in altum elevantur, vel ex alto ſuſpenduntur; per hanc elevationem vel ſuſpenſionem fit, ut marmor inferius nullum amplius ſupra ſe pondus habens, quo deprimatur, a pondere laterali aeris ſurſum impelli debeat contra ſuperficiem inferiorem ſuperioris marmoris, atque ita ſuſpenſum teneri, quamdiu, una cum pondere annexo, ſi quod annexum fuerit, non præponderat ſimili cylindro aërio, (vel potius priſmati, ſi marmor ſit quadrangularis figuræ) a marmoribus ad ultimos atmoſphæræ limites protenſo. Pari modo in attractione baculi exiſtimandum eſt, pondus aeris ſupremæ ejus ſuperficiei incumbentis reprimi & impediri, ne gravitare poſſit ſuper particulis inferioribus; quo conceſſo, quid evidentius, quam has ſurſum impelli debere per pondus aeris lateralis, atque ita ſuperioribus firmiter agglutinari?

Paralleliſmus inter cohæſionem marmorum politorum, & particularum inſenſibilium duri corporis.

Manifeſtum quoque eſt, eundem effectum ſequi debere, ſive at-

No. II. attrahatur baculus, ſive ſuſpendatur; perinde uti cohærere ſolent marmora, ſive dum e terra elevantur, ſive dum ex unco ſuſpenſa quieſcunt; quia utroque in caſu particulæ inferiores a pondere ſibi incumbente liberantur, ſufflaminato a ſupremis impetu deſuper ruentis aeris.

Facilis etiam hinc redditur ratio, cur aer lateralis pellat integrum baculum potius, quam ſeſe inſinuando partibus baculi pellere poſſit tantum ſuperiores: nam eo ipſo quo attrahere conor vel ſuſpendere baculum, tollo eodem momento pondus aeris incumbentis ab omnibus partibus intermediis uſque ad infimam; adeo ut antequam aer partibus baculi alicubi ſeſe intrudere poſſit, infima ejus particula nullum amplius ſupra ſe pondus habens, debeat ab aere laterali ſurſum impelli, & pellere ante ſe ſuperiores. Quare quamvis in baculo ſit ſeries innumerarum talium particularum ſibi cohærentium, non poterit tamen fieri, ut in ejus attractione vel ſuſpenſione ulla ab alia ſejungatur; quemadmodum nullum dubium eſt, etiamſi tria, quatuor vel plura complanata marmora ſibi ſuperficietenus conjungantur, ea omnia non minus cohæſura, quam ſi duo tantum in experimentum adhibeantur. Ex quibus omnibus conſtat, idem fieri in cohæſione particularum duri corporis, quod fit in illa marmorum politorum; hoc tantum cum diſcrimine, quod hic induſtria humana circa duo magna corpora poliendo præſtat, quod natura in ſuperficiecculis particularum inſenſibilium coaptandis præſtare ſolet. Ad quem manifeſtum paralleliſmum ſi attendamus, mirari non parum ſubit, quod recentiores Philoſophi in cohæſione marmorum aeris preſſionem agnoverint, nec eandem repererint in cohæſione partium inſenſibilium duri corporis. *

Ne

* Cum hanc diſſertationem ad umbilicum fere perduxiſſem, incidi in Exc. Dn. Boylii Tractatum de *Hiſtoria Firmitatis corporum*, e quo perſpexi, Nob. Authori jam olim ſuboluiſſe *vim aeris in connectendis duobus corporibus ſenſibili mole conſtantibus* (non audet adjicere, *in conglutinandis particulis inſenſibilibus ejuſdem corporis*) *ſect.* 8. & 24. Tametſi vero non parvam inde

Ne quid vero aſſumamus, quod alii ſenſuum & infantiæ præjudiciis occupati, vix largientur, conſultum erit, ut diſſertationis noſtræ orbitam tantiſper deſeramus, donec examinaverimus, an hæc *Aeris Preſſio* ſeu *Gravitas* extra omnem jam dubitationis aleam ſit poſita, ne chimæram videamur pro principio noſtro aſſumere. Primum & præcipuum, quod illi natales dedit, eſt celeberrimum illud Experimentum Torricellianum de Argento vivo, quod tubo vitreo ſuperne obſtructo incluſum ad certam & determinatam altitudinem in illo ſuſpenſum hæret: Sumitur enim Tubus vitreus cylindricus *a b*, altera ſua extremitate bene clauſus; iſque impletur argento vivo; dein invertitur, obſtructo prius digito orificio ejus, ne quid effluat; inverſuſque immergitur cum claudente digito in vaſculum quoddam *m n* alio argento vivo repletum; poſtmodum ſubtrahitur paulatim digitus; quo ſubtracto, deprehenditur argentum, quantumvis ponderoſum, minime tamen in vaſculum effluere, ſed tubi ſummitati affixum hærere, dummodo tubus non altior fuerit 29 circiter digitis. Idem animadvertitur, ſi loco Mercurii quicunque alius adhibeatur liquor, puta Aqua; qua ſi tubum quantumvis procerum dicto modo repleveris, eumque inverſum in aliam aquam ſtagnantem immerſeris; ſubtracto digito, reperies eam tubi ſummo adhuc affixam hærere; imo tametſi poſtea tubum e liquore reſtagnante omnino extrahas, non defluet tamen e tubo aqua, dummodo tubus non nimis ampli fuerit orificii. Idem vero quoque paucis mutatis effectui dederis; ſi aſſumta, loco tubi una extremitate clauſi, fiſtula utroque orificio aperta, immergatur liquori alicui ad ſummitatem uſque, eoque repleatur, ac poſtmodum ſuperiori orificio digito obſtructo extrahatur: hoc enim facto, liquor in fiſtula adhuc ſuſpenſus hærebit, quamdiu obturatum manet ejus orificium; quod jam vulgare eſt in cylindris illis, e laminis

No. II. Gravitas Aeris ſub examen revocatur.

Experimentum Torricellianum.

Fig. 12.

L 2 ferri

de lucem iſtis afferre potuiſſem, & nonnulla alio diſponere ordine: conſultius tamen judicavi, nihil meditationibus meis addere, eaſque hic recenſere, quo primum naturaliſſimo ordine ſeſe menti meæ obtulerunt.

No. II. ferri confectis, quibus vina e doliis attolli ſolent. Sed quid mirum, præoccupas, non deſcendere liquores in tubis; cum enim, ob clauſum tubi verticem, nullus aer poſſit loco liquoris deſcendentis ſuccedere, neceſſe eſt ut ſic ſuſpenſus hæreat ad impediendum vacuum. Sed expecta pauliſper, & videbis, longe aliud hic latitare myſterium; præterquam enim quod Vacui metus finem tantum dicat hujus ſuſpenſionis, non cauſam ejus efficientem; ipſi quoque non ſemper congruit experientiæ. Fig. 13. Quare ſumatur nunc Tubus *a d*, altior 29½ digitis, iſque denuo repleatur argento vivo; reliqua peragantur ut prius, digituſque ſubtrahatur; jam ſi natura tantopere abhorreret vacuum, quo pacto ſibi conſuleret? certe ſuſpenſum teneret in tubo liquorem, ſi saperet; quandoquidem per deſcenſum liquoris in tubo breviori non magis vacuum timendum ſit, quam per deſcenſum in altiori. Sed quid fit? non obſtante prætenſo hoc vacui metu, deſcendit mercurius ad *l*, uſque dum altitudinem 29½ digitorum ſupra argentum in vaſe reſtagnans obtineat, qua quidem in ſtatione quieſcit, nec humilius deſcendit. Pari modo deprehenſa eſt aqua, per antlias ſuctorias, non ad quamcunque altitudinem elevari poſſe, ſed in altitudine 34 circiter pedum ſubſiſtere, quam cum attigit, nequicquam agitabitur embolus, nihil amplius efficiet.

Explicatur per aeris preſſionem. Horum ergo phænomenorum ut cauſam reddant ſanioris Philoſophiæ Patroni, reſpondent, ideo hydrargyrum, vel aquam, in tubis brevioribus non deſcendere, quoniam pondus ſimilis columnæ aeriæ *e f*, a terra ad ſummos uſque atmoſphæræ limites protenſæ, & pro baſe *e i* habentis partem ſuperficiei liquoris in vaſe ſtagnantis, fortius premere ſubſumitur ſuper hanc ſuam baſin, quam tantillum pondus liquoris in fiſtula contenti premit ſuper partem ſuperficiei *a c* lateribus fiſtulæ interceptam; unde fiat, ut debilior hæc liquoris preſſio fortiori illi aeris externi cedere, ipſeque proin in fiſtulam intrudi, in eoque penſilis hærere neceſſum habeat: hancque ſimiliter eſſe rationem, cur dicti liquores in tubis longioribus deſcendant; nempe quia jam liquoris cylindrus, in fiſtula *a d*, præponderat ſimili cylindro atmo-

moſphærico, extra fiſtulam, *e f*. Unde concludere promtum eſt, ſi externus atmoſphæræ *e f*, & internus liquoris *a l*, æquiponderant; nec aſcenſurum nec deſcenſurum amplius in tubo liquorem. Quanta vero liquoris cujuſque portio ſimili cylindro aerio æquiponderare cenſenda ſit, experientia ſola nos docere poteſt; quæ cum teſtetur, argentum ſemper in altitudine 29½ digitorum, & aquam 34 circiter pedum acquieſcere, inque æquilibrio hærere; concludimus, cylindro aeris, a ſuperficie liquoris ſtagnantis ad ſummitatem atmoſphæræ protenſo, æquiponderare ſimilem cylindrum argenteum 29½ dig. & aqueum 34 pedum; qui duo proinde & inter ſe æquiponderabunt: unde ſimul ratio iniri poterit ſpecificæ gravitatis utriuſque liquoris; cum enim gravitates duorum corporum ejuſdem molis ſint in ratione reciproca altitudinum ſimilium cylindrorum æquiponderantium; erit gravitas argenti ad gravitatem aquæ, ut 34 pedes ad 29½ pollices, id eſt, mercurius erit quam proxime quatuordecies in ſpecie aqua gravior; quod ipſum liquoribus ad bilancem examinatis experientiæ conſonum deprehenditur. No. II.

Explicatis ita breviter, juxta mentem ſaniorum Philoſophorum, cauſis ſuſpenſionis liquorum in tubis; ſupereſt, ut examinemus ea, quæ huic explicationi poſſunt in contrarium objici. Itaque, ſi aer, gravitatis ſuæ pondere vel preſſione, ſuſtentet in tubo liquorem; colligi debet, ſi quo artificio preſſio illa aeris externi arceri & impediri poſſit, ne in liquorem incluſum ſeſe exerat, fore ut liquor, toto ſuo pondere, repente deorſum ruat; ſublata enim cauſa, deberet ceſſare effectus. Hoc autem artificium ut, ſine omni myſterio, effectui detur, applicetur os orificio inferiori fiſtulæ alicujus *r s*, ſuperius ſigillatæ & repletæ aqua; atque intus ſugatur ſeu attrahatur aqua; quæ, hac ratione, magno impetu in os irruere debere videtur; idque duplici jure, ſemel vi ſuctionis, ſemel vi propriæ ſuæ gravitatis, quæ libere nunc ſortiretur effectum, utpote non amplius impedita a preſſione aeris externi. Sed quid fit? eventus accidit plane contrarius: liquor in fiſtula hæret pertinaciter, nec niſi difficulter in os deſcendit; uti experiuntur illi, qui e lagena, ore totum ejus orificium obtegente, bibere conantur.

De adſuctione liquoris e tubo clauſo vel lagena.

Fig. 14.

L 3 Quam-

No. II. Quamnam ergo aſſignabimus cauſam, cur admoto ore non deſcendat liquor? videtur profecto, omnis agentis externi preſſio, ore intercepta cum ſit, cauſam ſuſpenſionis non alibi quærendam eſſe, quam intra ipſum tubum. An ergo confugiemus ad vacui fugam, dicendo, ideo liquorem non deſcendere, quia ſi ſugenti obtemperaret, vacuum relinqueret in ſuperiore fiſtulæ parte? An Lini arripiemus funiculum, ſeu tenuem ſubſtantiam a liquoribus abraſam vel abradendam, & more funiculi liquoris ſuperficiem cum ſuperiore tubi ſuperficie connectentem? Sed quia inſtitutum nobis eſt de rebus loqui, quas concipere valeamus; nec fuga vacui, nec Lini funiculus tutum nobis præſtabit aſylum: quid ergo? repetemus *Aeris preſſionem*; nec temere cauſam, infinitis alias nixam experimentis, deſeremus; quamvis forte, prima fronte, difficultas omnis ſuperari nequeat: illam potius conciliare cum noſtro caſu annitemur. Quamobrem conſiderandum, quid in Inſpiratione & Suctione contingat, videndumque, an idem in re præſenti locum habeat. Cum muſculi thoracis (vel, ut alii, diaphragmatis motus) inflant abdomen, dilatari ſolet cavitas illa, in qua jacent pulmones; quo fit, ut exiguus ille aer pulmones ambiens, in majus ſpatium extendatur ac rarefiat, neque amplius tanta vi pulmones conſtringere poſſit, ut fecerat antea; quare neceſſum eſt, ut prævalens jam atmoſphæræ pondus aerem ſine obſtaculo in nares & os, perque aſperam arteriam in pulmones, ipſum vero liquorem per tubum in os intrudat, ubi a muſculis œſophageis abreptus in debita porro ſibi vaſa devehitur. Applicaturi jam hæc ad rem præſentem, advertimus forte fieri poſſe, ut in dicto caſu nulla detur ſuctio: ubicunque enim ſuctio eſt, ibi venter intumeſcit, & aerem proximum e loco expellit; ſed cum jam antea omnia ſupponantur plena, non poſſet pelli aer, niſi in locum, quem deſeruit aqua attracta: ad hunc autem locum cum non pateat acceſſus, ob orificium digito obturatum, ſequitur aerem non poſſe pelli, nec ventrem expandi, nec proin aquam in os inſugi. Cum vero & hac ratione ſequi videatur, ſi antlia, loco oris, applicata fuerit tubo altera ſui extremitate clau-

ſo,

ſo, nec embolum quoque ipſum poſſe adduci, eo quod aer ab embolo expulſus locum non inveniat quo ſe recipiat; quod tamen frequenti refragatur experientiæ. Quare ut hæc concilie-mus, aliud medium non ſupereſt, quam ut dicamus, embolum propterea propellere poſſe aerem, quod ſatis habeat virium ad illum condenſandum, id eſt, ad expellendam materiam ſubtiliorem, inter aeris particulas craſſiores natantem, eamque in tubum intrudendam; muſculos vero thoracis non ſufficientibus ad aerem condenſandum viribus eſſe inſtructos: proinde abdomen non poſſe aerem ambientem expellere, nec ejus locum occupare, citra dimenſionum penetrationem. Hinc enim ratio, quare embolus adduci facile poſſit, & adductum prompte ſequatur liquor, non vero identidem dilatari queat cavitas pulmonum; qua dilatatione negata, nulla poteſt fieri ſuctio. Reſponderi etiam poſſet, tametſi cavitas illa per conatum muſculorum ægre quodammodo amplietur, aerque illi incluſus tantundem rarefiat; illum tamen ſufficientes adhuc poſſe retinere vires ſuſtentando tantillo cylindro liquoris incluſi, ejuſque deſcenſui impediendo, præſertim quia, ob excluſam, obturato orificio *s*, atmoſphæræ preſſionem, liquor proprio duntaxat pondere deſcenſum molitur. No. II.

De Elatere Aeris ejuſque effectu.

Sed non immerito quis porro quærat; unde fiat, quod parva illa aeris moleccula, ſive ſit in ſtatu ſuo naturali, ſive in ſtatu modicæ dilatationis, reprimere poſſit pondus multo majoris copiæ liquoris alicujus incumbentis, cumque a deſcenſu cohibere; quare non potius liquor iſte, tanquam multo ponderoſior, aerem in corpore humano ſtabulantem condenſet, quo in anguſtias redacto, aperta illi pateret deſcendendi via? Sciendum itaque, Phyſiologos modernos in aere, præter gravitatem, conſiderare *Vim* quandam, quam vocant, *Elaſticam*; ita comparatam, ut minima portio aeris alicubi incarcerati vel incluſi, in ſuſtentandis aut pellendis liquoribus tantum poſſit, quantum totius atmoſphæræ pondus; adeo ut, per hanc vim pauxilli aeris corpori humano incluſi, aqua non minus in tubo ſuſtentari debeat, quam ſuſtentaretur, amoto ore, a toto pondere atmoſphærico.

Per

No. II. De duabus fiſtulis ſibi agglutinatis. Per idem elaterium, ut opinor, explicabunt ſequens experimentum: Inſeratur inferiori ejuſdem fiſtulæ *r s*, aqua repletæ, & ad perpendiculum erectæ, orificio, loco oris nuper admoti, orificium alterius fiſtulæ *t u*, inferiori ſui extremo clauſæ vel hermetice ſigillatæ; ſic ut orificia fiſtularum *t r* communicationem habeant invicem, ſed ita arcte ſibi jungantur, ut nullo modo aeri externo ingreſſus permittatur: quid fiet? hærebit adhuc ſuſpenſus in ſuperiore fiſtula liquor, quamvis nullus aeri laterali externo pateat acceſſus ad liquorem ſurſum pellendum: quantum enim ad aerem in inferiore fiſtula *t u* contentum, is non videtur ſolus hoc præſtare poſſe; propterea quod, cum aqua longe ſit in ſpecie gravior aere, preſſio cylindri aquæ deorſum multo deberet prævalere preſſioni tantilli cylindri aeris ſurſum. Hic igitur, inquam, Elateriſtæ iterum ad virtutem aeris elaſticam recurrent; qua fieri poſſit, ut parva moles incarcerati aeris tantam vim habeat ſurſum premendi liquorem, quantam haberet integer aeris cylindrus ad extimam uſque atmoſphæræ ſuperficiem extenſus.

Fig. 15.

De ſuſpenſione liquorum in loco clauſo, aut obſtructo vaſculo. Eundem elaterii effectum conſpici autumant in obſervationibus de hac ſuſpenſione liquorum factis in loco aliquo clauſo, cubiculo puta, recipienti nondum evacuato, aut ubi ſolummodo vaſculum inferiori tubi orificio appenſum obturatum fuerit: in omnibus enim his caſibus, hærebit ſuſpenſus liquor, non minus atque ſi experimentum ſubdio, extra recipiens & recluſo vaſculo captum fuiſſet; indicio nempe, aeris parietibus conclavis aut recipientis lateribus incluſi, vel inter ſuperficiem liquoris ſtagnantis, vaſculique operculum intercepti, elaterem æquipollere gravitati totius atmoſphæræ.

De aere relicto in ſummitate tubi. Quod vero iſtud, de elaterii æquipollentia cum atmoſphæræ gravitate, aſſertum non ita crude, ac ſine limitatione, intelligendum ſit, ex ſequenti patebit experimento: Sume commodæ altitudinis fiſtulam *m n*, utrinque patulam; ejuſque inferiori orificio digito obſtructo, per ſuperius infunde mercurium; relicto tamen, in ſummitate tubi, uno alterove pollice aeris, ſic ut mercurius occupet ſpatium *b*, aer ſpatium *a*: Immerge dein

Fig. 16.

tu

tubum, cum claudente digito, in argentum vaſculi q; admotoque alio digito ſupremo fiſtulæ orificio, ſubtrahe alterum argento immerſum; quo facto, deſcendet quidem notabiliter liquor, multoque humilius, quam ſolo pondere tantilli aeris incluſi deprimi poſſet, nempe per ſpatium y; nihilominus maximam adhuc partem ſuſpenſus hærebit; qui tamen lapſum omnimodum non poſſet evitare, ſi aer incluſus elatere ſuo tantundem in illum ageret, quantum, deobturata fiſtula, tota cylindri atmoſphærici moles; propterea quia preſſio cylindri ex liquore & aere incluſo compoſiti, preſſione ſimilis cylindri externi ex puro aere conſtantis, tanto foret validior, quanto liquoris incluſi gravitas excederet gravitatem æqualis molis aeris. No. II.

Ut itaque cautius mercari diſcamus, circa rem maxima etiam alias obſcuritate involutam, operæ pretium me facturum arbitror, ſi quam notionem de hoc aeris elaterio habeamus, & quouſque extendendum ſit, explicem. Hunc in finem autem, altius paulo repetenda ſunt, quæ de Natura & Cauſis Gravitatis corporum nobis innoteſcunt.

De Natura & Cauſis Gravitatis.

Cum videamus, ſi non omnia, pleraque ſaltem corpora, quanquam cætera diverſiſſimæ naturæ, in hoc tamen convenire, ut libero aeri expoſita deorſum, terram verſus, ferantur; merito concludimus, hanc vim tendendi deorſum non provenire a forma aliqua intrinſeca, vel qualitate cuique corpori peculiari, ſed aſcribendam eſſe cauſæ alicui externæ & univerſali, quæ, omnia in hoc mundo ſublunari corpora implicans, eundem in iis gravitatis effectum producere debet. Iſtiuſmodi vero generalem cauſam, luſtrando totum hoc Univerſum, vix reperiemus alibi, quam in motu vorticoſo materiæ Terræ circumfuſæ. Quocirca meminerimus, Deum, poſtquam hunc ſublunarem mundum condidiſſet, ei indidiſſe motum, eumque geminum; unum generalem, quo omnes hujus materiæ particulæ in eandem plagam circa commune aliquod centrum, Terræ videlicet, rapiantur; alterum peculiarem, quo unaquælibet particula materiæ in omnes plagas infinitis modis moveatur: cogitemuſque,

No. II. que, illum, in quem conſpirat tota hæc materiæ compages; Gravitatis forte; hunc vero Elaterii cauſam exiſtere poſſe: quare illum, *Motum communem* ſeu *Gravitatis*; hunc, *proprium* ſeu *Elaterii*, non incommode appellare poterimus.

Quanam autem ratione effectus Gravitatis ex priori motu elici poſſit, aſſequemur; ſi conſideremus, omnia in hoc Vortice contenta, per proprietatem a motu circulari inſeparabilem, acquirere vim & conatum recedendi ab ejus centro; qui quidem conatus in iſtis particulis tanto major, vel minor exiſtit, quanto quælibet earum ſigillatim vel rapidiorem, vel languidiorem agitationem accepit; ita ut proprie loquendo omnia corpora dicenda ſint levia; quamvis interim illa, quæ reliquis minus levia ſunt, ob rationem mox dicendam, deſcendere debeant (unde gravia illa appellare aſſueti ſumus): plane ut illi, qui omnia corpora conſiderant ut gravia, aerem tamen non verentur appellare levem, quod ſub corpore graviori aquæ detentus aſcendere cogitur.

Fig. 17. Quare concipiamus porro in aere noſtro duos Conos contiguos *a b*, *a c*, materiæ homogeneæ, a ſuperficie terræ *d e*, ad orbem uſque Lunæ *b c*, protenſos, verticibuſque ſuis in centro terræ *a* coeuntes. Hi coni, per motum ſui vorticis, diſpoſitionem acquirunt recedendi a centro *a*, & tametſi iſte conatus, in ſingulis horum conorum corpuſculis, fiat ſecundum tangentem orbitæ, truſio tamen illorum mutua communicari debet (juxta illa, quæ initio diſſertationis de natura Pulſionis monuimus) a centro ad circumferentiam, ſecundum lineas *a b*, *a c*, in quibus corpuſcula illa ſe contingunt: unde revera quoque ſecundum has lineas extruderentur, niſi obſtaret materia, qua plenum eſt omne ſpatium ſupra orbem Lunæ *b c*. Hac ergo ulteriorem aſcenſum prohibente, oritur conflictus quidam duorum conorum in circumferentia *b c*; neutro tamen alterum loco pellente, quandoquidem, ob materiam homogeneam, nulla ratio eſt, cur unus alteri prævaleret. Si vero nunc ſupponamus, alterutri horum conorum immitti corpus aliquod terreſtre *f*, cujus partes craſſiores, aut nullam, aut exiguam habeant

Supra pag. 58.

agita-

agitationem; liquet, hujus coni a centro recedendi impetum tanto imminutum iri, quanto particulæ corporis iſtius minus poſſident agitationis, quam æqualis moles materiæ fluidæ, cujus locum occupat: cui conſequens eſt, ut alter conus, qui nihil virium ſuarum amiſit, diffundendo ſeſe verſus circumferentiam *bc*, debiliorem conum deorſum impellat, iſteque impulſus ſecum protrudat corpus *f*, atque ita gravitatis in illo effectum producat. Si jam concipiamus, argentum vivum, aut quemcunque alium liquorem, in vaſe ſtagnantem, eſſe illud corpus terreſtre, quod minus aere habet agitationis; non difficulter rationem perſpiciemus, quare iſte liquor ab incumbente cono aerio (qui ob latera ſua tantum non parallela cylindrus vulgo audire conſuevit) jugiter deorſum premi, atque ſi copia detur, in tubum intrudi debeat. No. II.

Ex hac porro explicatione perſpicuum eſſe poterit, gravitatem corporis alicujus non tam dependere a multitudine particularum terreſtrium illud conſtituentium, quam ab earundem languidiore motu; ac v. gr. aurum 19000ies pene aere gravius eſſe poſſe, etiamſi forte non centuplo plus contineat materiæ terreſtris, quam æqualis maſſa aeris; dummodo quod numero deeſt, particularum quies reſarciat.

De incremento & decremento Gravitatis.

Prætermittendum quoque non eſt in tranſitu, (quod in ſequentibus obſervaſſe juvabit), huic motui Gravitatis pondus & incrementum nonnunquam accedere poſſe a preſſione globulorum cœleſtium, (quo nomine materiam ſubtilem ætheris inſigniunt,) qui, rotatione vorticis ſolaris, indeſinenter a Sole Terram verſus vibrati, pro majore vel minore ſui agitatione, dictos conos vel cylindros, diverſis anni tempeſtatibus, fortius vel debilius premere, citra abſurditatem, ſtatui poſſunt.

Quid ſit Elaterium aeris?

Hæc dicta ſunto de motu Gravitatis. Poſtquam autem Naturæ Conſulti vidiſſent, hunc ſolum motum non ſufficere explicandis omnibus circa ſuſpenſionem liquorum phænomenis; quippe qui non explicat, quare ſuſpenſus hæreat in tubo liquor, obturato vaſculo, ubi totius tamen atmoſphæræ gravitatio intercepta: hinc alium adhuc aeri peculiarem, atque a motu gravi-

No. II. tatis independentem, aſcripſere motum, quo aeris particulæ conatum quendam (non communem aquæ, fluidiſque aliis craſſioribus) habeant ſeſe expandendi, dilatandi, remotoque obſtaculo majus occupandi ſpatium; quique conatus, in aere incluſo, par ſit ſuſtentando tanto ponderi liquoris alicujus, quantum ſuſtinere valeat gravitate ſua tota atmoſphæræ moles; nonnunquam minori, aliquando etiam majori, pro re nata. Illud mirari ſubit, quod cum omnes hydroſtaticorum Scriptores hanc aeris vim elaſticam unanimi fere fateantur ore, plerique eam oſtendiſſe ſint contenti; pauci vero in naturam & cauſam illius penitius inquirere ſuſtinuerint, aut ſolliciti fuerint, ut certas illi regulas præſcriberent, atque omnes evolvendo caſus aeris liberi, incluſi, condenſati, rarefacti, exponerent, quantum in ſingulis horum caſuum effectum ſortiri aer debeat.

Ejus cauſa obſcura. Enimvero unde iſtud Elaterium ſive conatus ſeſe dilatandi in aeris particulis proficiſcatur; an ex eo, quod ſingulæ illarum circa proprios axiculos rotentur, vel plures aliquot in unum motum circularem conſpirantes, infinitos parvos vortices conſtituant; dumque ab horum centris recedere conantur, ambientes particulas loco pellendi ac ſe dilatandi vim acquirant: an vero procedat ex peculiari harum particularum figura vel textura; quod forſan ſint graciles, flexiles, intortæ ac conglomeratæ ſpiræ, inſtar tæniæ, funis, aut elaterii horologii portatilis: an quod, ab agitatione materiæ primi & ſecundi Elementi inter corpuſcula aeria rapidiſſime diſcurrentis, illis hic elaterii motus communicetur, quo in continua quaſi conſerventur bullitione, ut qua licet ſeſe diffundant: an denique quod iſta ſeſe dilatandi virtus, abſque adminiculo cauſæ externæ, immediate a Primo Motore in creatione illis indita olim fuerit: hoc, inquam, negotium eſt tam arduum, conjecturis ubique æquali difficultatum numero laborantibus; ut inter abſtruſiſſima naturæ myſteria jure merito referatur. Quocirca, hac de re quicquam determinare non ſuſtineo; præſertim cum unuſquiſque, ſalvis forte phænomenis, hic ſuo ſenſu abundare poſſit.

Quid ſit Quod vero effectum ſpectat hujus Elaterii; illi paulo diſtinctius ex-

excutiendo inhærebimus : & quia multis id videtur comprehenſu valde difficile, qua ratione pauxillum aeris, etiam non compreſſi, ingentis atmoſphæræ preſſionem, æquivalente preſſione & actione efficaci, (talem enim activam efficaciam ſignificatio vocis in illis rebus, quibus tribui ſolet, requirit,) repellere irritamque reddere valeat : hinc ad captum illorum nos accommodaturi, atque elaterium hocce mitigaturi, aliud quiddam præterea in aere conſiderabimus, quod *Reſiſtentiam* vocabimus *paſſivam*; atque ita effectum ſoli hactenus elaterio tributum bipertiemur; partem relinquendo actioni elaterii, partem vero aſſerendo reſiſtentiæ illi paſſivæ; monſtrabimuſque, quo pacto idem ſequi debeat effectus, omniaque allata experimenta non minus, ſed forte intelligibilius, ſolvi poſſint; etiamſi aer longe minori, quam vulgo creditur, elatere foret prædirus, cætera vero mere paſſive ſe haberet; reſiſtentia ſupplente elateris vicem. Notandum vero ante omnia, per hanc aeris *Reſiſtentiam paſſivam*, me non tam intelligere qualitatem aliquam in ipſo aere latitantem, & a noſtra cognitione remotam, quam vero defectum virtutis in liquore aerem premente, qui non ſatis habere cenſendus eſt virium ad aerem loco movendum, vel condenſandum. No II. Aeris Reſiſtentia paſſiva?

Ut vero diſtinctius cognoſcamus, quæ poſſint eſſe partes hujus reſiſtentiæ paſſivæ, conſideremus duo corpora ſe invicem prementia (puta duos luctatores, vel duas pilas;) ſitque primo utrumque libero aeri, (id eſt, loco ubi nihil vel adjuvat, vel impedit illorum motum) expoſitum, nullique innixum ſuſtentaculo; occurratque corpus A corpori B; quo ſi fortius eſt, illud propellet; ſi debilius, pelletur ab ipſo in contrariam partem; ſi æquali denique vi premat & renitatur utrumque, ſublatis ex æquo viribus, eodem loco tanquam quieſcentia ſpectabuntur ambo. Hoc unico proinde in caſu, non conſtabit ex ſola loci conſideratione, utrum alterum in alterum æquali preſſionis conatu agat, an vero ambo inertia & otioſa juxta ſe quieſcant; quod poſtmodum demum cognoſcere datur, cum alterum loco moveris; ſi pone enim ſequatur alterum, concludes ſeſe preſ- Illuſtratur exemplo duorum Luctatorum.

 ſiſſe

No. II. ſiſſe antea; ſi immotum maneat, indicio eſt, antea quieviſſe utrumque, quamvis interim utrobique præſtet illa conſiderare, ut omnibus viribus deſtituta; cum ſi quas habent, tantundem iis efficiant, ac ſi non haberent.

Sit vero etiam porro corpus B (luctator vel pila) innixum ſolido alicui fulcro, puta luctator parieti cuidam, vel pila lateri menſæ tudiculariæ; faciatque corpus A impetum in corpus B ſuffultum, quid fiet? hoc quidem illud in contrariam adhuc partem repellet, ubi plus illo impendit virium: ſed ſive vires utriuſque ſint æquales, ſive vires corporis B ſint debiliores, ſive plane nullæ; in omnibus his tribus caſibus, neutrum corpus loco ſuo expellet alterum, ſed juxta ſe quieſcent; adeo ut hactenus nulla pateat ratio, quæ nos cogat ad credendum, corpus B, ad impetum corporis A infringendum & ſufflaminandum, æqualem potius conatum adhibere, quam vel debilius, vel plane non reniti. Sed ubi porro conſideraverimus, etiamſi mille præterea homines, aut pilæ, in directum poſitæ eſſent, quæ omnes vires ſuas jungerent cum luctatore vel pila A, ad pellendum corpus B, illas tamen omnes non plus effecturas, quam antea fecerat ſolum corpus A; juſtam habebimus ſuſpicandi anſam, obſtaculum, quo impediebatur paulo ante corpus A, ne propellere poſſet corpus B, non proveniſſe a renitentia & repulſione æquivalente facta a corpore B, id eſt ab aliquo ejus elaterio (quale præcipue in pila eburnea concipere abſurdum foret), cum non ſit veroſimile, eandem hanc vim corporis B, poſtea parem eſſe potuiſſe repellendo impetui millies majori: ſed a mera interpoſitione corporis B, quæ ſola ſufficiens eſſe poſſit ſiſtendo impetui corporis A, totiuſque ſeriei corporum iſtud juvantium. Pergat enim, ſi poſſit, corpus A moveri in directum poſt contactum corporis B; aut penetret neceſſe eſt dimenſiones hujus, quod omnino impoſſibile; aut faciat, ut hoc permeet ſolidum fulcimentum, cui innixum eſſe ſupponimus: ſed ſic vel integrum corpus B deberet trajicere, quod idem involvit abſurdum, vel deberet prius in minutiſſimas partes conteri, eæque dein per poros muri adigi; quod cum non fiat, con-

concludendum, corpus B eſſe talis texturæ, cui diſſolvendæ impar ſit conatus quantumvis maximus corporis A, omniumque reliquorum vires ſuas huic adjungentium: atque in hoc illud ipſum conſiſtere puto, quod vocare ſoleo *Reſiſtentiam paſſivam.* Quæ cum omni corpori, etiam ipſi aeri ſolido vaſi incluſo & lateribus ejus ſuffulto, applicari poſſint, non difficile erit perſpicere, quare minima ejus portio ſufficiens ſit ſuſtentando multo majori ponderi, quam ſola ſua gravitate præſtare poſſet; non quod credendum ſit, particulas fluidiſſimi corporis tali præciſe textura & nexu inter ſe cohærere, qui earum ſeparationem reddat difficiliorem ponderi incumbenti; ſed quod externa materia vaſi circumfuſa, non minore gravitate pollens quam pondus incluſum, materiam ſubtilem exire conantem æquali vi repellere, atque intra vaſis latera cohibere poſſit: imo, conſiderans iſta attentus Lector forte non obſcurum hic myſterii illius, quod noſtræ titulum diſſertationis facit, indicium deprehendet. No. II.

Hæc vero omnia (quod expreſſe moneo) ea intentione a me non dicuntur, quod diffiteri, aut poſſim, aut velim omne aeris elaterium; ſed quod ad illud in omni caſu confugere non neceſſum ducam. Quare nunc aliquas Leges ſeu Regulas, quas quidem rationi & experientiis, maxime Boylianis, conſonas fore deprehendero, tum pro *Aeris Elaterio*, tum pro ejus *Reſiſtentia paſſiva* ſtatuminabo.

Regulæ Elaterii & Reſiſtentiæ paſſivæ.

I. *Qualibet aeris portio, naturalem habentis conſiſtentiam ſeu laxitatem, in loco aperto, ſub dio, reſiſtit paſſive ponderi totius ſibi incumbentis atmoſphæra.* Ratio, quia ab æqualis ponderis columnis lateralibus ſuffulcitur; quam ob rationem etiam aqua, omni licet elaterio fere deſtituta, in profundiſſimo maris, ſine notabili condenſatione, toti moli aqueæ ſibi incumbenti reſiſtendo par eſt. Tum vero aeris portionem aliquam dico habere *naturalem conſiſtentiam*, quando tantundem continet materiæ ſubtilis, tantundemque materiæ terreſtris, quantum utriuſque ſub æquali volumine ordinarii illius, in quo experimenta fieri plerunque ſolent, quemque ſpiramus, aeris continetur. Te-

nen-

Digitized by Google

No. II. nendum namque, aerem noſtrum non eſſe corpus homogeneum, ſed particulas ejus terreſtres ſatis diſſipatas, atque æqualibus fere intervallis a ſe invicem disjunctas, majorem adhuc copiam materiæ alicujus ſubtiliſſimæ & æthereæ concludere, ſolidiſſima quæque corpora permeantis: adeo ut, ſi ſupponamus in iſto, quem haurimus, aere, ſingulis particulis terreſtribus ordinarie reſpondere centum alias materiæ ſubtilis; dicere conveniat, ejus portionem aliquam naturali ſua laxitate præditam eſſe, quotieſcunque contingit, ſive in loco libero, ſive clauſo, ut quantitas materiæ ſubtilis, in illa portione contentæ, centies excedat quantitatem materiæ terreſtris; eandem vero duplo, triplo, &c. denſiorem eſſe redditam, quandocunque, parte materiæ ſubtilis expulſa, particulæ terreſtres accedunt ad ſe invicem, atque jam arctius conſtipatæ, duplo, triplo, &c. minorem, quam antea, locum occupant: uti viciſſim duplo, triplo &c. rarior dicendus aer, ubi eadem quantitas materiæ terreſtris, intervallis ſuis per accedentem novam materiam ſubtilem ampliatis, ad duplo, triplo &c. majus ſpatium extendi cogitur.

II. Qualibet aeris incluſi portio, naturalem habentis conſiſtentiam, reſiſtit paſſive ponderi totius atmoſphæræ, aut cuicunque alii preſſioni huic æquivalenti. Ratio, quia a lateribus corporis ſolidi continentis ſuffulcitur. Ita perſpicuum eſt, in fiſtula ſolo aere repleta, cujus ſuperius orificium apertum, inferius clauſum, aerem quamvis incluſum, & totius atmoſphæræ ponderi ſuccumbentem, non magis comprimi vel condenſari, quam quamvis aliam ejus portionem extra tubum, in eadem horizontali ſuperficie cum incluſo exiſtentem. Perinde ut ſi tubum repleveris aqua; infimus aquæ pollex, tametſi nullo ſenſibili gaudeat elaterio, notabiliter non magis compreſſus erit, quam quivis alius, ſive intra, ſive extra tubum. Quod probe obſervandum, contra illos, quibus ordinarium eſt, aeris incluſionem & compreſſionem in hac materia confundere.

III. Quantulacunque aeris condenſati portio paſſive reſiſtit majori vi aut ponderi, quam ſoli atmoſpharico, aut huic æquivalenti;

ei; idque ea lege, ut denſitates duarum portionum aeris fere *ſint* No. II.
ad invicem, ſicut pondera ab iis ſuſtentata.

IV. Aeris rarefacti portio quantacunque, minori tantum vi aut ponderi, quam atmoſphærico, paſſive reſiſtendo par eſt; ſuntque raritates ad ſe invicem in ratione reciproca ponderum ſuſtentatorum. Veritas utriuſque hujus regulæ manifeſta fit duobus curioſis experimentis ab Illuſtr. Dn. BOYLIO hanc in rem factis, quæ videſis in *Tractatu ejus contra* LINUM, *Cap.* V. cui duas Auctor ſubjunxit Tabulas pro diverſis Condenſationis & Rarefactionis gradibus.

V. Aer incluſus naturalis conſiſtentiæ, preſſus a majori pondere, quam eſt atmoſphæricum, aut aliud ei æquale, condenſatur quouſque eum denſitatis gradum acquiſiverit, qui juxta proportionem Reg. 3 *memoratam, par ſit paſſive reſiſtendo illi ponderi.* Hinc eſt, quod, in campana vitrea urinatoribus nonnunquam uſitata, quo profundius illa immergitur, eo magis aer incluſus comprimitur; quia, præter atmoſphæricam columnam, tantum adhuc cylindrum aqueum ſuſtinet, quantus porrigitur a ſuperficie aquæ ad orificium campanæ; adeo, ut campana 34 pedes ſub aquam depreſſa, aer incluſus non niſi dimidiam circiter ejus cavitatem impleturus ſit.

VI. Aer incluſus naturalis conſiſtentiæ, minori vi aut pondere preſſus quam atmoſphærico, vi elaterii ſui ſe expandit ad eum uſque rarefactionis gradum, qui ſecundum proportionem Reg 4 *ſufficiens adhuc ſit paſſive reſiſtendo illi ponderi.*

VII. Aer condenſatus, preſſus a majori vi aut pondere, quam cui paſſive reſiſtendo ſufficiat, magis condenſabitur: preſſus a pondere exacte æquivalente gravitati atmoſphæricæ, vi elaterii ſui ad conſuetam uſque laxitatem dilatabitur: a minori vero pondere preſſus, eadem vi rarefiet magis.

VIII. Aer rarefactus, preſſus a minori vi aut pondere, quam cui reſiſtendo ſufficiat, vi elaterii ſui magis dilatabitur: preſſus a pondere atmoſphærico aut alio æquipollenti, ad naturalem conſiſtentiam redigetur: a majori preſſus magis condenſabitur: eaque omnia per gradus denſitatis & raritatis ponderibus proportionatos,

 jux-

No. II. *juxta* Regg. 3 & 4. Sic collo recipientis evacuati ſub aquam demerſo, apertoque epiſtomio, adſcendere ſolet aqua atmoſphæræ pondere ſtipata, eouſque in recipiens, donec aer per totam illius cavitatem diffuſus, atque per aſcenſum aquæ ſeſe contrahens, ad priſtinam conſiſtentiam redeat.

IX. Minima aeris quantitas, ſive naturalem habentis conſiſtentiam, ſive condenſati, ſive rarefacti, qua parte ab omni materia premente (excepta ſubtili) *liberatur, vi elaterii ſui ſeſe protinus expandet, & per totum ſpatium materia ſubtili repletum æqualibus intervallis ſeſe diffundet.* Hinc applicato antliæ recipienti, & adducto embolo, verſoque epiſtomio, non manebit omnis aer in recipienti, nec deſcendet omnis in antliæ ſcapum, relicturus materiæ ſubtili totam recipientis cavitatem; ſed reſtabit ſubinde pars aliqua in recipienti, quæ æqualibus intervallis per materiam ſubtilem diſperſa, eandem acquiret laxitatem cum illa, quæ deſcendit in ſcapum. Hinc eſt, quod aerem materiæ ſubtili facile permiſceri dicunt; ſecus atque fit in aqua aliove liquore, cui adducto embolo ſoli materiæ ſubtili ſpatium ſuperius cedens, totus in ſcapum deſcendit. Facilis quoque iſthinc redditur ratio, quare veſica recipienti incluſa protinus intumeſcat, cum evacuari incipit aer; quoniam enim, per hanc evacuationem, pauxillum aeris, quod in veſica remanſit, ab aere ambiente liberatur, neceſſum eſt, ut vim elaſticam exercendo ſeſe dilatet & veſicam inflet, quouſque ejus permittunt latera; imo, ubi veſica non ſatis robuſtæ eſt texturæ, ea omnino diſrupta, per totam recipientis cavitatem ſeſe diffundat.

X. Aer in infinitum rareſieri poteſt, ſed non in infinitum condenſari. Conſectarium hoc eſt præcedentis regulæ, de cujus veritate abſque experimentis certi eſſe poterimus, ubi conſideraverimus, intervalla inter particulas aeris terreſtres nunquam poſſe eſſe tam ampla, quin, ingrediente nova materia ſubtili, ampliora ſubinde fieri poſſint: ſed viciſſim, expulſa omni materia ſubtili, hæc intervalla tandem plane tolli debere; adeo ut nullus amplius poſſit eſſe condenſationi locus: Ita grana poſſunt in

in-

infinitum ſpatium diſſipari, ſed non arctius conſtipari, quam immediatus eorum contactus permittit. No. II.

[Notandum, quando in Reg. 3. diximus, *denſitates aeris eſſe ad invicem, ut pondera ab illo ſuſtentabilia*, non ſine cauſa adjectam eſſe particulam *fere*; quia ubi experimenta accurate inſtituta ſunt, ſemper deprehendetur, pondus ab aere denſiori ſuſtentatum ad pondus ſuſtentatum a minus denſo, majorem tantillo habere rationem, quam denſitas ad denſitatem: cujus ratio dubio procul hæc eſt, quod, decreſcente proportionaliter in condenſatione aeris incluſi volumine, ſola expellitur materia ſubtilis, non imminuta quantitate materiæ terreſtris; unde fit, ut decrementum materiæ ſubtilis (& conſequenter incrementum virium particularum craſſiorum) aliquantillo majus eſſe debeat, quam foret, proportione habita ad decrementum totius voluminis. Exempli gratia, ſi in determinata aliqua quantitate aeris atmoſphærici, contineantur decem corpuſcula terreſtria, centumque æquales particulæ materiæ ſubtilis, ſic ut tota maſſa ſit centum decem partium; requiritur ad hanc maſſam in duplo minus volumen redigendam, ut quinquaginta quinque particulæ inde expellantur; ſed quia nulla decem craſſiorum expelli poteſt ob exilitatem pororum vitri, omnes demendæ erunt ex materia ſubtili, cui proinde non niſi relinquentur quadraginta quinque, adeo ut pluſquam ſui dimidii jacturam patiatur: atque ita ratio decem particularum terreſtrium ad reſiduam materiam ſubtilem, pluſquam duplo major erit illius rationis, quam habuere illæ decem particulæ ante condenſationem ad omnem materiam ſubtilem. Unde fit, ut pluſquam duplo majores etiam in ſuſtentando liquore vires nanciſci debeant. Et hoc egregie confirmatur experimento illo Cl. BOYLII ſupra citato; in quo animadverto, ſemper nonnihil majus ab aere condenſato ſuſtentatum fuiſſe pondus, quam juxta hypotheſin, cum ipſius, tum noſtram, ſuſtentandum fuiſſet. In cujus differentiæ contemplatione cum occupor, mentem ſubit, annon forte, ex illa cognita (ſuppono autem experimentum cum omni requiſita ἀκριβείᾳ peractum), ratio iniri poſſit utriuſque materiæ, terreſtris & ſubti-

Limitatio Regulæ 3.

 lis,

No. II. lis, contentæ ſub volumine aliquo aeris atmoſphærici in naturali ſua laxitate conſtituti; id eſt, annon inveſtigari queat, quoties quantitas unius excedat quantitatem alterius. Id quod hac ratione exequor:

Eſto *volumen aliquod aeris communis* . . . . *a.*
Ratio voluminis hujus ad volumen aeris condenſati, ut *m.* ad *n.*
Erit *volumen aeris condenſati* . . . . *n a : m.*
Quantitas materiæ terreſtris ſub utroque volumine comprehenſa, x.
Ergo *quantitas materiæ ſubtilis ſub volumine a*, erit . *a - x.*
Quantitas ejuſdem ſub volumine n a : m erit . . *n a : m-x*
Pondus ab aere communi ſuſtentatum . . . . *b.*
Pondus ab aere condenſato juxta hypotheſin ſuſtentandum n b : m
Pondus ab aere condenſato ſuſtentatum . . . . *n b : m + c*
Differentia ſuſtentandi & ſuſtentati . . . . . *c.*

Jam quoniam ratio materiæ terreſtris ad materiam ſubtilem voluminis minoris, debet eſſe ad rationem, quam illa habet ad materiam ſubtilem voluminis majoris, ut pondus ſuſtentatum ab illo volumine ad pondus ſuſtentatum ab hoc: ſive (propter eandem utrobique quantitatem materiæ terreſtris) quoniam materia ſubtilis voluminis majoris eſt ad ſubtilem minoris; ut viciſſim pondus ſuſtentatum ab hoc volumine, ad pondus ſuſtentatum ab illo: erit *a - x* ad *n a : m - x*; ut *m b : n + c* ad *b.* Unde, proportione ad æqualitatem reducta, translatiſque quantitatibus cognitis in unam, incognita in alteram partem; habebitur $x = nnac : (mmb + mnc - mnb.)$

Quanto plus contineatur materiæ ſubtilis, quam terreſtris, in portione aliqua aeris atmoſphærici?

Quocirca, ſi volumen aliquod aeris in ſtatu ſuo naturali conſtituti (quod volumen ponimus 10000 partium) ſuſtentavit $29\frac{1}{8}$ digitos mercurii, juxta Tabulam Boylianam; idemque aer, ad duplo minus volumen redactus, ſuſtinuit $58\frac{13}{16}$ dig. quorum, juxta hypotheſin, non niſi $58\frac{1}{4}$ ſuſtinere debebat, adeo ut differentia ſuſtentati & ſuſtentandi fuerit $\frac{9}{16}$ dig.; calculus patefaciet, materiam terreſtrem occupare non niſi $94\frac{14}{19}$ partes illius voluminis, reliquis $9905\frac{5}{19}$ omnibus a ſubtili repletis; adeo ut quantitas materiæ terreſtris a quantitate interſperſæ ſubtilis excedatur quam proxime centies quinquies: eruntque, ſi corpuſcula terreſtria æqualibus per aerem intervallis diſſeminata ſupponamus, inter

duo

duo quævis corpuſcula proxima, ad minimum quatuor æquales materiæ ſubtilis portiones interjectæ. Obſervandum tamen, ſi in experimento Boyliano idem calculus inſtitueretur circa aerem quadruplo denſiorem naturali; ubi differentia mercurii ſuſtentandi & ſuſtentati erat $1\frac{1}{16}$ dig.; fore, ut quantitas materiæ ſubtilis quantitatem terreſtris pluſquam trecenties tricies ſuperare deprehenderetur. Hoc vero inde provenire auguror, quod forte particulæ aeris craſſiores, per nimiam condenſationem, tam valide comprimantur, ut, figura ſua rotundiore in oblongiorem & graciliorem mutata, jam libere per poros vitri, juxta cum ſubtiliore materia, expelli poſſint; tametſi illos paulo ante penetrare, ob craſſitiem ſuam nequiverint. Hinc enim fit, ut reſidua materia terreſtris non poſſit tantum pondus ſuſtinere, quantum ſuſtinere deberet, ſi nulla omnino expulſa fuiſſet; proinde nequeat locum amplius habere analyſis noſtra, quæ ſub utroque volumine aeris naturalis & condenſati, æqualem materiæ terreſtris quantitatem ſupponit.] No. II.

Sed ut ex tricis algebraicis redeamus ad inſtitutum noſtrum; non difficile nobis erit, ſtabilitis paucis illis regulis, reſpondere ad experimenta ſupra memorata, omniaque reliqua, quæ ab adverſa parte ad aeris gravitatem impugnandam afferri forte poterunt. Nam quod ſpectat primo Fiſtulam ſuperne clauſam, vel Lagenam, e qua liquor ſola ſuctione attrahi nequit; ratio eſt, quia cum abdomen ob imbecillitatem muſculorum, hoc in caſu, vel nullatenus, vel difficulter dilatari poſſit, aer ejus cavitati incluſus naturalem ſuam quam proxime retinebit conſiſtentiam; adeoque, per Reg. 2, & 4, reſiſtendo pluſquam par erit pauco aeri in aſpera arteria, liquorique in lagena vel fiſtula contento, eorumque proin deſcenſui impediendo.

Cur e tubo clauſo vel lagena difficulter adſugi poſſit liquor.

Quod porro attinet ad duas Fiſtulas, ita ſibi coaptatas, ut communicationem habentes invicem, aeri externo omnem ingreſſum præcludant, quarumque ſuperior aqua vel alio liquore craſſiore, inferior ſolo aere repleta ſit; valde quidem dubito de ſucceſſu experimenti, niſi ubi fiſtulæ ſupra modum graciles fuerint: ſecus enim fiet, ut aer inter liquorem & vitri latera ſibi tranſitum pa-

Reſpondetur ad exemplum duarum fiſtularum.

No. II. parando, ſenſim ſuperiora petat, dum interea liquor inferiorem ſibi locum vendicabit; non aliter atque in clepſammo, deſcendente in inferius vaſculum arena, aer per ejus grana ad ſuperiora eluctari ſolet. Si vero forte contingat in tubis gracilioribus, ut ſuſpenſus hæreat in ſuperiori liquor; tum nihil obſtabit, quo minus dicamus, aerem per reſiſtentiam ſuam paſſivam, liquoris deſcenſum impedire, ut pote quæ juxta Reg. 2 etiam multo majori ponderi ſuſtentando par eſſet.

Reſp. ad ſuſpenſionem liquoris in loco clauſo, vel vaſculo obſtructo.

Ita etiam in promptu ratio eſt, cur liquor adhuc ſuſpenſus in tubo hæreat, ſi vel experimentum fiat in cubiculo clauſo, vel vaſculo obſtructo, ſive eodem incluſo recipienti. Quantum quidem ad cubiculum; non exiſtimo, ullum adeo exacte clauſum eſſe poſſe, quin aer externus rimam inveniens, toto ſuo pondere in conclave irruat, & vi gravitatis hunc effectum producat, qui elaterio aſcribitur. Ad reliquos vero caſus reſpondebimus, neque gravitatem, neque elaterium ſuſpenſionis cauſam eſſe; cum reſiſtentia aeris incluſi pure paſſiva illud præſtare poſſit. Quod enim non neceſſarium ſit, ad elaterium hic confugere, vel ex eo manifeſtiſſime liquet; quia ſi loco aeris ſupremam vaſculi partem occupantis, ſuperinfundatur liquori in vaſculo reſtagnanti aqua vel mercurius, vel quivis demum alius liquor, ſive homogeneus, ſive heterogeneus, illoque vaſculum penitus repletum obturetur, idem ſecuturus eſt effectus, liquoris videlicet in tubo ſuſpenſio: ubi ſane elaterio nullæ poſſunt eſſe partes; cum, fatentibus Elateriſtis, nullus præter aerem liquor, tali virtute notabiliter polleat. Proxima ergo ratio, cur maneat in conſueta ſtatione mercurius, alia nulla dari poteſt, quam quod liquor ſuperinfuſus in vaſculo reſtagnans, & undique ſuffultus lateribus & operculo vaſculi, reſiſtentia ſua paſſiva, reliquo liquori in tubo, ſe prementi ac deſcenſum molienti, obſtaculum ponat. Unde cum concipi poſſit, eundem ſecuturum etiam cum aere incluſo effectum, nullo concepto elaterio; ſequitur, elaterium hocce, neque eſſe unicam, neque proximam ſuſpenſionis cauſam.

Suc-

Succurrit tamen hic quoddam experimentum, quo doctrina noſtra de reſiſtentia aeris paſſiva primo intuitu omnino videtur ſubrui. Illud autem tale: In cubiculo clauſo, vel alio aliquo loco ubi aeri ingreſſus non patet, loco ſimplicis tubi, adhibe ſiphonem inæqualium crurum, ejuſque crus brevius immerge liquori cuicunque, quem per crus longius adſugito; quo peracto, comperies, liquorem omnem e vaſculo per crus brevius aſcenſurum, & per longius deſcenſurum, idque continuo fluxu, quamdiu crus brevius liquori immerſum eſt, non ſecus atque fieri ſolet alias, cum experimentum ſub dio capitur. Sed ne iſte continuus liquoris fluxus poſſit excuſari per pondus totius atmoſphæræ, ſub prætextu, quod conclave nunquam adeo exacte claudi poſſit, quin aer incluſus cum externo per rimam aliquam communicet; eundem ergo fluxum efficere tentabimus in recipienti clauſo, ubi nullum ab aere externo periculum timendum. Hanc in rem autem opportune incidit experimentum, a Cl. VOLDERO, pro ultimo ſuperioris anni ſpecimine, in Theatro Phyſico Academiæ hujus publice oſtenſum, quo Elateriſtæ admodum gloriantur. Sumſit vitrum cylindricum *a*, aqua ſubrubido colore tincta impletum; eique immiſit crus brevius ſiphonis *b c d*; atque ore admoto longiori adſuxit per ſiphonem aquam; qua fluente, protinus vitrum cum ſiphone demiſit in recipiens *e f g*; quod pariter mox aqua ſubrubida ad ſummam uſque oram adimplevit, ne quid in illo remaneret aeris; atque tandem operculo admoto clauſit, & cera undiquaque probe munivit. Quo facto, cœptum eſt agitatione emboli evacuari recipiens; extracto per ejus collum *e* liquore, uſque ad ſuperficiem circiter *i l*; quo ſubſidente ſenſim, ſubſidit pariter liquor in cavitate ſiphonis contentus, manſitque ſubinde in eodem plano cum ſuperficie liquoris extra ſiphonem; deſcendens in breviori quidem crure ad ſummam uſque oram vitri cylindrici; in longiori vero, quouſque ſubſederat reliquus in recipienti liquor; propterea quod, præter materiam ſubtilem, nihil aderat quod ponderare ſuper liquore in recipienti, cumque in

No. II. Fluxus liquoris per ſiphonem in loco clauſo explicatur per Reſiſtentiam aeris paſſivam.

Fig. 18.

No. II. in ſiphonem impellere, vel in eo ſuſpenſum tenere potuiſſet. Evacuato ſic maximam partem recipienti, intromiſit per apertum obſtructorium aerem, qui irruens in liquorem vitri cylindrici, cum pondere ſuo impellebat in crus ſiphonis brevius, & exinde porro in longius; nec ceſſabat liquoris per ſiphonem fluxus, quantumvis poſtea obſtructorium loco ſuo iterum intruſum fuiſſet. Cujus rei quidam ratio, ſuppoſito aeris elaterio, reddi poteſt facile; cum enim per obſtructorium intromiſſus aer, virtute ſua elaſtica, premat tum ſuper liquore in vitro cylindrico contento, tum ſuper reliquo extra cylindrum; fit ut liquor in utroque crure ſurſum impellatur, uſque ad mutuum occurſum in flexura ſiphonis *c*, ubi quia in contrarias tendit partes, ſpecies quædam luctæ oritur inter liquores utriuſque cruris, adeo ut neuter alteri prævaleret, ſed immoti hærerent, ſi æqualibus ambo viribus fuiſſent impulſi: Verum, quia elaterio columnæ aeris *qr*, a pondere liquoris in longiori crure magis reſiſtitur, quam elaterio columnæ *op* reſiſtitur a minori pondere cruris brevioris; fit ut liquor fortius adactus in crus brevius, alterum debilius impulſum repellat, & ita in continuo fluxu perduret, ex vitro cylindrico aſcendendo in crus brevius, ex breviori deſcendendo in longius, & ex longiori in recipiens. Atque ſic quidem elaterio res conficitur: idem vero abſque elaterio demonſtrari quoque poſſe, forſan videbitur nonnullis prima fronte impoſſibile; cum facile quidem intelligi poſſit, qua ratione aeris incluſi reſiſtentia paſſiva ſuſpenſum teneat in cruribus ſiphonis liquorem, ejuſque deſcenſum impediat; non vero identidem, quo pacto fluxu continuo novus ſubinde liquor in crus brevius aſſurgat, niſi ſupponatur aliquod ſupra liquorem vitri cylindrici, quod eum efficaci preſſione in crus illud intrudat; quæ preſſio aliunde procedere poſſe non videtur, quam ab aeris elaterio. Quare ſupereſt, ut monſtremus adhuc, etiamſi nullum in aere agnoſceremus elaterium, eundem tamen ſecuturum ex hypotheſi noſtra effectum. Intelligere jam putamus, quare admiſſo per obſtructorium aere, debeat impleri ſipho; nimirum quia pauxillum aeris irruentis, tota ſtipatum atmoſphæ-

ræ

No. II.

ræ mole, dum obſtructorium apertum eſt, ſuper liquore premere, cumque gravitatis impetu in utrumque crus impellere cenſendum eſt. Conſideremus vero nunc recipiens iterum obſtructum, & liquorem in utroque ſiphonis crure ſuſpenſum; quid fiet? ceſſabit atmoſphæræ gravitatio, nec aeris incluſi pondus ullius erit momenti; & ſiquidem elaterio nullum quoque locum hic tribuimus, ceſſabit omnis premendi in illo conatus: ſed non ceſſat pariter gravitatio liquoris in cruribus ſuſpenſi, qui naturali ſuo pondere ſubinde deſcenſum moliens, liquorem in recipiente & vitro cylindrico ſublevare, & cum liquore aerem imminentem verſus ſupremam recipientis cavitatem attollere conabitur, longioris quidem cruris liquor columnam *q r*; brevioris columnam *o p*; ille niſu majori, quia ponderoſior, hic minori, quia ut brevior, ita minus gravis. Cedet ergo fortiori preſſioni columna *p o*, unaque deprimet liquorem ſibi ſubjectum, eumque in crus brevius aſcendere faciet; non vi propriæ elaſticitatis, ſed vi adventitia, communicata ſibi a preſſione prævalente liquoris in crure longiori: adeo ut, quemadmodum prius ex Elateriſtarum mente conſiderabamus pugnam duorum liquorum ab elaterio aeris impulſorum in flexura ſiphonis *c* factam, fortioremque ex parte *p o*; ita vice verſa eandem nunc contemplari conveniat, tanquam inter duas columnas aerias a pondere liquorum impulſas, in ſuperficie concava operculi *g* geſtam, fortioremque ex altera parte *q r*. Ad quorum meliorem intelligentiam in memoriam nobis revocemus Luctatorem illum B, Supra pag. 88. qui nuper eludebat conatum Luctatoris A, ſuffultus tantum parieti, cætera nullas adhibens vires ad repellendum ipſum A. Pateat vero nunc ei rima, qua pelli poſſit ab ipſo A, eumque immediate contingat in adverſo latere alius Luctator C, qui pariter non niſi paſſive ſe habens, prematur in oppoſitam partem a quarto Luctatore D, ſed viribus debilioribus, quam B pellitur ab ipſo A. Qua ratione evidens eſt, Luctatorem D, cui vires ſunt debiliores, repulſum iri; idque non tantum a Luctatore A, qui reapſe conatum adhibuit, ſed potiſſimum a duobus intermediis B, & C; quamvis non propriis horum viribus, quas o-

No. II. tioſi nullas adhibent, ſed viribus ipſis communicatis a Luctatore A. Jam ſi, loco Luctatoris A, ſubſtituamus liquorem cruris longioris; pro Luctatore D, liquorem brevioris; pro utroque otioſo, columnas aerias $q\,r$, & $o\,p$; applicatio nullo inſtitueretur negotio.

Cur relicto in ſummo tubi aere mercurius ſolito humilius deſcendat, nec tamen omnis effluat?

Unius adhuc ſupereſt phænomeni ut evolvamus cauſam, (quod intellectis noſtris de Elaterio & Reſiſtentia paſſiva regulis non erit arduum) quare videlicet, ſi in tubi mercurio impleti ſummitate relictum fuerit pauxillum aeris, argentum vivum nec omne effluere, nec omne in tubo ſuſpenſum hærere, ſed notabiliter tamen deſcendere debeat, etiamſi argentum ad longe minorem altitudinem 29 digitis infuſum fuerit. Notandum autem, duo hic diſtincte quæri poſſe; ſemel, cur argentum, quamvis ad minorem altitudinem infuſum, non aſcendat; columna enim atmoſphærica vaſculo imminens illud altius impulſura eſſet in tubum, ſine interventu aeris in ſummitate relicti: dein, cur præterea etiam notabiliter deſcendat. Prioris cauſam rejiciemus non in elaterium, ſed paſſivam tantum reſiſtentiam incluſi aeris, qui, cum naturalem habeat conſiſtentiam, & a ſumma baſe tubi ſuffultus ſit, juxta Reg. 1, toti atmoſphæræ ponderi, argentum altius ſubinde impellere conanti, obicem ponere potis eſt. Quod vero argentum non tantum non aſcendat, ſed & deſcendat; exinde eſt, quoniam aer incluſus non premitur a tota cylindri atmoſphærici mole, ſed a tanta duntaxat illius portione, quæ correſpondet exceſſui, quo totum ejus pondus ſuperat pondus cylindri mercurialis incluſi: ex gr. Si altitudo mercurii infuſi fuerit 20 digitorum; aer, inter tubi ſummitatem & mercurium interceptus, ſentiet tantum pondus 9½ digitorum mercurialium; quanta videlicet eſt differentia inter pondus atmoſphæricum, æquivalens 29½ digitis mercurialibus, & pondus mercurii incluſi: quoniam enim atmoſphæra ab una parte, tota ſua mole ſurſum impellere conatur argentum, ab altera vero argentum naturali ſua gravitate, contra nititur; fit ut æqualibus, illinc pellendi ſurſum, hinc deſcendendi, viribus ſublatis, aer incluſus ea tantum preſſione afficiatur, qua pondus cylindri mercurialis

curialis incluſi ſuperatur a ſimili cylindro atmoſphærico. Quare, juxta tenorem Regulæ $6^{tæ}$, conveniens eſt, ut aer incluſus, vi ſua elaſtica, ſeſe expandat, hydrargyrum eouſque deprimendo, donec imminuta hinc dilatati aeris reſiſtentia, & illinc adaucta preſſio, qua cylindrus atmoſphæricus cylindrum mercurialem reſiduum excedit, pari paſſu ambulent. No. II.

Quouſque vero mercurius in quovis caſu, juxta hypotheſin noſtram deprimi debeat, ut calculo experiamur, ponamus in *Fig.* 16. Quouſque deſcendere debeat? *Fig.* 16.

Pro *Quantitate Aeris incluſi* . . . . a.
Pro *Altitudine cylindri mercurialis incluſi* . . . . . . b.
Pro *Exceſſu, quo pondus hujus ſuperatur a pondere ſimilis cylindri atmoſpharici, id eſt a pondere* $29\frac{1}{2}$ *digitorum mercurialium* . . . . c.
Denique pro *Quantitate futura depreſſionis* . . . . . . y.
Erit *Volumen aeris rarefacti* . . . . $a + y$.
Pondus Atmoſphæricum, ſeu $29\frac{1}{2}$ *digitorum mercurialium.* $b + c$.
Pondus ſuſtentandum ab aere rarefacto . . . . . . $c + y$.

Et quoniam per Reg. 4, Volumen aeris incluſi debet eſſe ad Volumen aeris rarefacti, ut viciſſim Pondus ſuſtentandum ab hoc, ad Pondus totum atmoſphæricum ſuſtentabile ab illo; erit ut a ad $a + y$, ita $c + y$ ad $b + c$: & multiplicatis extremis ac mediis habebitur æquatio inter $ab + ac$ & $yy + ya + yc + ac$. Translatis porro in alteram partem quantitatibus $ya + yc + ac$, ſub ſigno contrario, erit $yy = (-a-c)\,y + ab$. Radix vero: $y = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}cc + ab.)}$ Hinc Regula generalis:

Si quadrans quadrati altitudinis incluſi aeris, & quadrans quadrati exceſſus, quo pondus atmoſphæricum ſuperat pondus liquoris incluſi, una cum illo, quod provenit ex altitudine incluſi aeris bis multiplicata, ſemel in dimidium dicti exceſſus, ſemel in altitudinem liquoris incluſi, in unam ſummam conjiciantur; & ab aggregati latere quadrato ſubtrahatur dimidium altitudinis incluſi aeris, una cum dimidio dicti exceſſus; reſiduum indicabit, quouſque deprimendus ſit liquor.

O 2 Ubi

Digitized by Google

No. II. Ubi notandum, ſi pondus liquoris infuſi exæquet pondus ſimilis cylindri atmoſphærici; tum, evaneſcente quantitate c, habebitur radix: $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + ab)}$

Eritque Regula ſequens:

Si id, quod provenit ex altitudine aeris incluſi, multiplicata tum per quadrantem ſui ipſius, tum per altitudinem liquoris incluſi, in unam ſummam colligas; ex ſummæ radice quadrata dimidium altitudinis incluſi aeris ſubtrahas; indigitabit reliquum, quouſque infra conſuetam ſtationem deſcendet liquor.

Quocirca, juxta priorem regulam, mercurio infuſo altitudinem obtinente 20 digitorum ſupra reſtagnantem, ſi cylindrus aeris, ſupremam tubi partem occupantis, ſit *pollicaris*, ſubtracto digito, deſcendet argentum per $1\frac{13}{20}$ dig. ſi *bipollicaris*, per $2\frac{4}{5}$ dig. ſi *tripollicaris*, per $3\frac{7}{10}$ digitos; &c.

Iterum juxta poſteriorem regulam, elevato per infuſionem mercurio ad conſuetam altitudinem $25\frac{1}{2}$ pollicum, ſi cylindrus aeris in ſummitate tubi relicti ſit *pollicaris*, deprimetur mercurius $4\frac{19}{40}$ dig. ſi *bipollicaris*, $6\frac{3}{4}$ dig. ſi *tripollicaris*, $8\frac{1}{40}$ digitis, &c.

Calculum hunc prolixum Lectori ponimus ob oculos, ut illum conferat cum * verbis Nob. ROHOLTI, qui ad eundem caſum, quo in ſummitate tubi relinquitur aer, memorat, *pollice aeris eo humilius depreſſum iri mercurium, quo minus excedit tubus ordinarium mercurii ſtationem.* Unde nonnulli, quibus non major, ac mihi, eſt experiundi copia, concluſerunt, ſi duo tubi diverſæ longitudinis impleantur argento vivo ad eandem altitudinem, reliquo ſpatio aeri conceſſo; fore, ut argentum in tubo breviori, ubi minor eſt aeris copia, profundius deſcendat, quam in longiori, cui major aeris quantitas eſt incluſa; propterea quod virtus aeris elaſtica fortior eſſe debeat in arctiori, quam ampliori loco.

Major aeris quantitas abſolute magis, comparative minus profunde deprimit liquorem.

Quæ

* In Phyſic. ROHOLTI, part. prim. cap. 12. §. 34. *Nous prévoyons même, qu'un pouce d'air fera d'autant plus deſcendre le vif-argent, que le tuyau excéde moins la longueur de vingt-ſept pouces & demi.*

Quæ cum directe adverſentur calculo noſtro, concludendum, alterutro in loco errorem ſubrepſiſſe. Certum autem eſt, a parte noſtri nullam poſſe eſſe hallucinationem; eo quod ſuppoſitio hæc, *Denſitates aeris eſſe ad invicem, ut Pondera ſuſtentata*, e qua calculus noſter immediate fluxit, non alia eſt quam ipſiſſima Clar. BOYLII hypotheſis, egregiis inſuper experimentis, gemina tabula in Tractatu ejus contra Linum exhibitis, ſtabilita: quodque in toto hoc negotio nullum aliud inter nos diſcrimen eſt, quam quod ille elaterio tribuit, quæ ſola nonnunquam aeris reſiſtentia paſſiva explicari poſſe autumo; cætera vero iidem omnino utrinque effectus expectandi. Sed nolumus etiam ſuſpectam reddere veritatem aſſertionis Roholtianæ, quam experientiæ conformem deprehendi ſubjungit Auctor. Neque vero tamen nobis perſuadebimus, idem experimentum alium in Anglia, contrarium in Gallia, ſucceſſum ſortiri; cum naturam ſibi ſemper & ubique conſtare, ſit certiſſimum. Potius ergo ſtatuemus reliquos, intellecta perperam ROHOLTI mente, deceptos fuiſſe. Et revera decipiuntur in eo, quod exiſtimant, argentum *abſolute* humilius deprimi debere a minore, quam a majore aeris incluſi quantitate; cum illud *comparative* tantum intellexiſſe videatur Auctor: neque enim de toto aere incluſo loquitur, ſed de *pollice* tantum *aeris*; ſignificans, majorem aeris copiam profundius quidem detrudere poſſe mercurium, quam minor ejus quantitas eundem in alio tubo deprimit, ſic tamen ut ſinguli pollices majoris quantitatis per ſe minus efficiant, quam ſinguli minoris. Atque ſi hæc ſit ROHOLTI mens, ut nullus dubito, nihil aliud dicit, quam quod principiis & calculo noſtro conforme; juxta hunc enim, liquor, in conſueta ſtatione conſtitutus, deſcendet per $4\frac{13}{18}$ digitos, ubi aer incluſus fuerit pollicaris; cum vero fuerit bipollicaris, non niſi deprimetur per $6\frac{1}{4}$: ubi quamvis cylindrus incluſi aeris duplo priori altior eſt, nequaquam tamen propterea duplo humilius liquorem detrudit.

Interim non diſſimulandum, quod ſanior forte eſt aſſertionis Roholtianæ ſenſus, quam ſolidior ejus ſubjuncta ratio; qua pu-

No. II.

No. II. putat Auctor, aerem arctiori loco conſtrictum, exemplo elaterii automati cujuſdam, majoribus ſeſe dilatandi viribus pollere: nec enim, quod aer, hic, quam ibi, arctioribus eſt concluſus limitibus, propterea magis compreſſus, aut majus habere elaterium cenſendus eſt, dummodo pro ratione anguſtioris ſpatii minor quoque ſit incluſi aeris quantitas; id eſt, dummodo aer, quod ſupponitur, ejuſdem utrobique ſit denſitatis ſeu conſiſtentiæ. Minus vero adhuc excuſari poterunt illi, qui, hoc elaterii ſimile ulterius extendentes, ſibi perſuadent, aerem minori loco incluſum abſolute majorem præſtare debere effectum, quam alium ſub majori contentum: ſi enim elaterium certæ cujuſdam aeris portionis ſub ſimplo ſpatio majoris foret efficaciæ, quam duplo majoris ejus quantitatis ſub duplo ſpatio; tum ſequeretur ex eodem fundamento, pauxillum pulveris pyrii, quod ſclopetis minoribus ſolet inſeri, majorem habiturum vim glandem explodendi, quam habet major ejus quantitas altius intruſa tormento. Quamvis interim verum ſit, & ipſis principiis noſtris conforme, quod ubi eadem quantitas aeris ampliatis intervallis rareſit, & majus tubi ſpatium implere cogitur, ejus efficacia deprimendi liquorem non amplius tanta futura ſit, quanta fuit antea, ubi occupaverat minus ſpatium; propterea quod per rarefactionem ejus debilitatur elaterium: uti nullum dubium eſt, ſi eadem (nec major) quantitas pulveris, quo ſclopeta onerantur, ita immittatur ſcapo, ut, diſperſis a ſe granis, majorem locum occupet, multo minorem habituram eſſe effectum, quam ubi grana denſius conſtipata, minori ſpatio fuere concluſa.

Aer efficit Firmitatem corporum, uti ſuſpenſionem liquorum in tubis.

Sed jam dudum, Benevole Lector, tua abuſus patientia, atque Diſſertationis pene prætergreſſus limites, in inſtituti mei orbitam quantocyus redibo. Poſtquam, prolixa hic digreſſione, de *Atmoſphæræ noſtræ Gravitate* multa diſſerui, oſtendendo, quænam poſſint eſſe ejus partes in ſuſpenſione liquorum, & quo pacto argumenta in contrarium allata, vel per *Elaterium Aeris*, vel per ejus *Reſiſtentiam paſſivam*, vel per utrumque commode queant explicari; jure ſuſpicabimur, imo nulli amplius dubitabimus, eandem ipſam Gravitatem quoque eſſe Cohæſionis

nis

No. II.

nis partium duri corporis cauſam; cum, præter eam, nullum poſſit concipi aliud gluten, quo connectantur; adeo ut hæc durorum corporum, utut vulgaris, proprietas, non minorem mereatur conſiderationem, quam mereri primum viſa fuit TORRICELLIO mercurii in tubo ſuſpenſio; neque hæc, quam illa, majus ſit naturæ miraculum cenſenda.

An vero ſolus aer, diſquiritur per comparationem ejus, quod accidit mercurio in tubo longiori.

Hoc ergo ſuppoſito, quia mens noſtra proclivis ſolet eſſe ad comparandos ſtatim invicem duos effectus, quorum cognoverit eandem eſſe cauſam; hinc non cunctabimur, inter Suſpenſionem liquorum & Cohæſionem corpuſculorum talem inſtituere paralleliſmum. Primum autem & proximum, quod cogitanti ſeſe offert, eſt deſcenſus argenti vivi, qui animadverti ſolet in tubo longiori $29\frac{1}{2}$ digitis. Unde mox inferemus, ſimilem effectum debere conſpici in corporibus duris, ubi certam quandam altitudinem exceſſerint, atque verbi gr. partes baculi cujuſcunque, ſive attracti, ſive ſuſpenſi neceſſario diſruptum iri, tum cum totius baculi pondus ſuperarit pondus ſimilis columnæ atmoſphæricæ. Quare ut ejus rei faciamus periculum, examinabimus corpora quævis ponderoſiſſima, aurum, plumbum, ferrum, &c. & quoniam aurum decies novies, plumbum duodecies, ferrum octies, mercurius vero quatuordecies aqua in ſpecie graviora deprehenſa ſunt; & proinde mercurii ad aurum ratio eſt ſubſuperquintupartiens decimas quartas, ad plumbum ſeſquiſexta, ad ferrum ſupertripartiens quartas; inde calculo eliciemus, cylindrum aureum $21\frac{14}{19}$ dig., plumbeum $34\frac{5}{13}$ dig., ferreum $51\frac{5}{8}$ digitorum, æquiponderaturos ſimili cylindro mercuriali $29\frac{1}{2}$ pollicum, cui æquivalet ſimilis cylindrus aerius, a terræ ſuperficie ad extimos atmoſphæræ limites protenſus. Unde inferre non cunctabimur, fore, ut baculi aurei, plumbei, ferrei, attracti vel ſuſpenſi, neceſſario in fruſta concidant, ubi aſſignatam ſinguli altitudinem exuperent; eo quod a ſimili cylindro atmoſphærico, quo ponderoſiores tum exiſtunt, non poſſint amplius propelli, ſi attrahantur, nec ſuſtentari, ſi ſuſpendantur.

Qua-

No. II. Quare oculis in naturam conjectis diſpiciemus, num hæc ita ſe habeant; ſed mirabimur, ratiocinia & calculum noſtrum immane quantum adhuc a quotidiana experientia abludere; utpote quæ teſtari ſolet, ferramenta non tantum 46 digitorum, ſed plurium perticarum, prodigioſæque longitudinis catenas trahi aut ſuſpendi, ſuſpenſaſve teneri multorum annorum decurſu poſſe, abſque ullo rupturæ periculo.

Concluditur, ipſum quoque Ætherem gravitare.

Fateor, nos primo ne cogitando quidem aſſecuturos, quæ unquam poſſit eſſe cauſa, quale cæmentum, qualeve gluten, quod has ingentis ponderis catenas a lapſu ſuſtentet; cum abſurdum ſit, effectum hunc proficiſci poſſe a tantillo pondere cylindri atmoſphærici toties minori. Sed quoniam ex ſuperioribus clare quoque percepiſſe nobis perſuademus, pertinacem hanc cohæſionem partium duri corporis nulli alii deberi cauſæ, ne quieti quidem ipſi, præterquam ſoli preſſioni corporis alicujus externi; concludere non dubitabimus, omnino neceſſum eſſe, ut ſuſpenſio & cohæſio partium baculi proficiſcatur quidem a pondere corporis alicujus externi, ſed a pondere longe majori, quam eſt pondus ſolius atmoſphæræ: unde in ſuſpicionem hanc incidemus, non ſolum aerem craſſiorem, ſed ætherem ipſum, omnemque materiam ſubtiliorem, longe ſupra atmoſphæræ limites diffuſam, aliqua quoque gravitate præditam eſſe, quæ, juncta cum gravitate atmoſphæræ, effectum producat, quem hæc ſola producere nequibat.

Ætherem gravitare probatur e natura & cauſis gravitatis.

Quanquam vero mera tantum hæc adhuc ſuſpicio ſit, mox tamen abibit in probabilem conjecturam, quando in memoriam nobis revocaverimus ea, quæ ſuperius dicta ſunt de Natura & Cauſis Gravitatis. Hæc enim cum conſiſtat in eo, quod particulæ materiæ Terræ circumfuſæ, atque in communem verticem actæ, conatum habeant a centro vorticis recedendi, aliaſque particulas minus agitationis habentes verſus Terram repellendi; manifeſtum eſt, hanc deorſum premendi vim competere debere non minus materiæ ſubtili, quam aeri craſſiori, quoniam idem motus vorticoſus eam implicans, eundem recedendi a centro, aliaque corpora verſus illud propellendi conatum ei imprimit.

Unde

Unde non minori jure Gravis dici meretur, quam aer atmoſphæricus, quem ita vocare aſſueti ſumus, non tam quod ipſe inviſibilis deſcendat, quam quod deſcendere faciat alia corpora viſibilia ſibi expoſita. Si qui vero aerem, hac de cauſa, levem potius quam gravem nuncupandum eſſe cenſent; illis nullam intentabo litem, cum ſufficiat mihi, ætheri talem aſſeruiſſe preſſionem, quæ ſit per omnia ſimilis illi, qua aer craſſior ſtatuitur efficere cohæſionem marmorum, deprimere in vaſculo mercurium, eumque in tubum ſurſum intrudere, aliaque ſimilia effecta præſtare: nam an iſta preſſio gravitatis aut gravitationis, an ponderoſitatis, an levitatis demum nomine venire debeat, parum refert; niſi forte præſtat, illorum modo loquendi ſeſe accommodare, quibus primo placuit virtutem hanc, quam habet atmoſphæra, connectendi marmora, deprimendique in vaſe liquorem, gravitatis, non levitatis titulo inſignire. Si tamen verborum delectus ſit habendus; putem, concinnius illa quæ deſcendunt, vocari gravia; quæ vero deſcendere faciunt, aut quoquo modo incumbunt premuntve ſuper alio corpore, rectius dici *gravitare*, aut *ponderare*. Sed adde etiam, quod difficulter concipi poteſt, qua ratione aer ætherve deprimant corpora gravia ſibi expoſita, niſi una deſcendant & ipſi, præſertim ubi noſter Gravitatem explicandi modus obtinet; id quod omnem ſcrupulum eximere poterit illis, qui hanc corpora deprimendi virtutem Levitatis nomine inſignire mallent. Atque probabiliter huic ipſi ætheris ſive gravitati, ſive gravitationi aſcribendum, quod aer craſſior, non per totum hunc verticem æqualiter diffuſus ſit, ſed in infimo ac terræ proximo ſubſederit loco, in quem ob languidiorem ſui agitationem, ab æthere detruſus forte fuit; ſicuti ob ſimilem cauſam fæces vini, a materia ſpirituoſiore ſeparatæ, ad dolii fundum ſubſidere ſolent. No. II.

Sed ut noſtra conjectura omnimodam induat certitudinem; cauſam, quæſo, expendamus, cur poſtquam recipiens aqua impleveris, obſtruxeris, atque embolum detraxeris, aqua non hæreat ſummitati recipientis affixa, verum prompte inſequatur embolum, atque in ſcapum concedat: quare etiam mercurius tubo longiori Item e deſcenſu liquorum in vaſis occluſis.

 29 dig.

No. II. 29 dig. incluſus deorſum labatur. Profecto non ſufficit dicere, hos liquores vi ſuæ gravitatis deſcendere; cum enim certum ſit, hanc gravitatem non promanare ab aliquo principio interno, ſed ab externi cujuſdam corporis impulſione, determinandum eſſet, quale ſit corpus iſtud, deſcenſum hunc in liquoribus efficiens; & cum non poſſit eſſe aer atmoſphæricus, cui aditus undique præcluſus eſt; erit ergo neceſſario pondus materiæ ſubtilis, recipiens ingreſſæ, ſtipatæque mole totius columnæ æthereæ incumbentis, quacum per poros vitri communicationem habet. Imo tantum abeſt ut, ſine hac ætheris gravitate, deſcendere poſſent liquores, ut violenter quoque detruſi cum impetu ſuperiora verſus reſilirent, ob recedendi a centro Terræ conatum ſibi impreſſum a motu vorticoſo, cui omnia hæc ſublunaria involuta ſunt. Neque huic noſtræ doctrinæ officit, quod aliqua diverſitas animadvertatur inter aquam recipienti incluſam, & inter aerem, in eo quod hic ſeſe in recipiens, æqualiter, non minus ſurſum atque deorſum, diffundat, non vero inſtar aquæ ſubſidat; uti quidem ſubſidere debere videretur, ſi materia ſubtilis aliquam ſuper illo exerceret gravitationem. Tenendum namque, materiam ſubtilem gravem eſſe, aeremque revera ſubtili graviorem, & hactenus in ſubtili ſubſidere debere: ſed quia exceſſus, quo gravitas terreſtris alicujus particulæ aeris ſuperat gravitatem æqualis particulæ materiæ ſubtilis, non tantus eſt, quantum ejuſdem particulæ terreſtris elaterium; hinc fieri neceſſum eſt, ut fortior elaterii vis effectum gravitatis impediens, aerem per totum recipiens, non minus ſurſum atque deorſum, diſpergat.

Aliud porro preſſionis ætheris argumentum eſt; quod nequeat concipi, quo pacto aeris particulæ ſuperiores premant gravitate ſua inferiores, ſiquidem ſingulæ a ſingulis (quæ fluidorum natura eſt), interſperſa materia ſubtili, ſeparatæ ſint; niſi concipiatur, ſuperiores premere ſubtilem, utramque vero, junctis viribus, inferiores.

Ætheream gravitatem in Philoſophia. Sed eo minus denique hæc ætheris gravitatio mira videri nobis debet, quod tota fere Philoſophia Carteſiana abſolvitur preſſione materiæ cæleſtis (quæ globulorum ſecundi elementi nomine

mine ipſi venit); non tantum tali, qua ſingulæ hujus materiæ particulæ peculiarem exercentes motum, multorum particularium effectorum cauſæ exiſtunt; ſed inſuper univerſali aliqua preſſione, qua dicti globuli, a rotatione corporis ſolaris, circum circa continua ſerie protruſi, in fundo oculorum noſtrorum fibras, ſeu capillamenta nervi optici concutiunt, atque ita luminis in nobis ſenſum efficiunt: nulla enim erit ratio, quare in reliquis corporibus, quibus incumbunt, hac ſua preſſione, non pari ratione effectum gravitatis producere poſſint; præſertim ob analogiam preſſionis horum globulorum ac gravitatis atmoſphæræ, quarum utraque ab alicujus vorticis, illa ſolaris, hæc terreni, gyratione derivatur. Notabimus ergo hac occaſione, quamvis illius tantum gravitatem materiæ demonſtraſſe mihi ſufficiat, quæ in hoc vortice ſublunari contenta, a motu ejus vorticoſo vim acquirit a centro recedendi, aliaque corpora verſus illud propellendi; me tamen ſubtilioribus ingeniis diſcutiendum adhuc relinquere, annon & omnis illa materia inter Lunam Solemque intercepta in cenſum corporum gravium referri poſſit, ob preſſionem, qua continuo, a Sole deorſum, Terram verſus, impellitur vibraturve; imo nunquid totius hujus, quam late patet, univerſi materia quodammodo gravis dici poſſit, ob arctiſſimam conſtipationem particularum ſuarum; qua fiat ut, omni vacuo inter eas excluſo, nulla poſſit a vorticis ſui rotatione impelli, quin ſubito premat infinitam aliarum ſeriem in longiſſima linea, ex uno vortice in alium, protenſam, atque ita ſubinde Terram quoque noſtram in occurſu feriat. Illud tantum hic concedi mihi velim, quod gravitas ætheris ſublunaris, (ſic voco materiam ſubtiliorem, quatenus contradiſtinguitur aeri craſſiori,) varias poſſit accipere modificationes a preſſione ætheris ſupralunaris, & vel augeri vel minui, prout, diverſis anni tempeſtatibus, ab illa fortius debiliuſve Terram verſus impellitur.

No. II. Carteſiana nullum myſterium.

Conceſſa itaque jam ætheris preſſione, ſeu gravitate; non arduum nobis erit rationem reddere, unde ſit quod partes catenæ, etiamſi longiſſimæ, tam firmiter cohæreant. Cum enim at-

Per Gravitatem Ætheris explica.

P 2 tra-

No. II. tur cohæſio partium baculi.

trahitur, vel ſuſpenditur ex alto talis catena; cogitandum eſt, per hanc attractionem vel ſuſpenſionem, retundi & ſufflaminari, ut ſic dicam, pondus cylindri aerio-atherei, ſummæ ſuperficici catenæ perpendiculariter incumbentis, ita ut nequeat amplius gravitare ſuper reliquas catenæ partes; quo fit, ut planum illud imaginarium, inferiorem catenæ ſuperficiem lambens, hac in parte, qua huic ſuperficiei ſubeſt, a ſolo catenæ pondere (vel rectius a nullo) prematur; cum in reliquis ſuis partibus ab incumbente mole aerio-ætherea longe majorem ſubeat preſſionem; unde, juxta Mechanicæ & Hydroſtaticæ leges, minore preſſione fortiori cedente, opus eſt, ut partes catenæ inferiores a pondere laterali ſubinde ſubleventur, ubi ſuſpenſa eſt catena; vel impellantur contra ſupremas, ubi attracta eſt: unde neceſſaria partium ſequi debet connexio & mutua quies. E quibus perſpicuum eſſe poterit, tantum abeſſe, ut quies ſit cohæſionis iſtius cauſa, ut potius & quies, & cohæſio, (utrinſque enim eundem tantum conceptum habeo,) compreſſionis externæ manifeſtiſſimus ſit effectus.

An poſſit dari baculus, cujus pondus ſuperet pondus ſimilis cylindri ætherei?

Quanquam autem ex iis, quæ modo diximus, concludere promptum ſit, lapſuram neceſſario catenam, parteſque a partibus ſeparatum iri, ubi pondus catenæ exceſſerit pondus ſimilis cylindri aerio-ætherei; non tamen ſperandum hujus conſectarii veritatem, unquam aliter quam in ſpeculationes demonſtrari poſſe: ut enim in praxi exhiberetur, tam prodigioſæ longitudinis requireretur baculus, iſque ex tanta altitudine ſuſpenſus, ut ab induſtria humana tale quid expectari prorſus nequeat. Quod ut cuivis pateat; ſupponamus, illam tantum ætheris gravitare portionem, quæ in minori iſto vortice Terram inter & Lunam expanſa eſt; ejuſque ſpecificam gravitatem centies minorem eſſe gravitate craſſioris, quem ſpiramus, aeris; ſumamuſque aurum omnium hactenus cognitorum corporum graviſſimum. Hoc, cum decies novies gravius ſit aqua, aqua fere millies acre, aer vero ex ſuppoſitione centies æthere; erit ipſum aurum 1900000ies in ſpecie gravius æthere; & conſequenter ætheris cylindrus æquiponderabit ſimili cylindro aureo 1900000 vicibus bre-

Digitized by Google

breviori. Quare, cum altitudo cylindri ætherei ſit 50 circiter ſemidiametrorum Terræ, id eſt, 43000 milliar. German. ſive 860000000 pedum Rhinlandicorum, (quanta videlicet eſt Lunæ a Terra diſtantia) erit altitudo cylindri aurei, æthereo æquiponderantis, pluſquam 452⅓ pedum; quibus addendi adhuc duo pedes, pro pondere atmoſphærico; ut habeantur 454⅓ pedes. Tanta videlicet deberet eſſe longitudo baculi ex metallo ponderoſiſſimo confecti, antequam ſuperet vim illam, qua ejus partes cohærent: unde liquet, quanta reliquorum metallorum, auro longe leviorum, cylindris debeatur longitudo, quæ ſufficiens ſit ad divellendas eorum partes, atque ad ſuperandum pondus æthereum, quo illæ cohærere ſolent. No. II.

Baculus attractus vel ſuſpenſus proprie nullum poſſidet pondus, adeoque a minima ætheris vi propelli poterit.

Atque ita quidem ratiocinandum fuit, ubi, facilioris intelligentiæ gratia, rem vulgari more hydroſtatico expedire placuit; ſupponendo in catena pondus quoddam, quod ætheris preſſioni contranitatur, eamque ſi ſatis magnum fuerit, ſuperare valeat: ſed, ſi rem attentius introſpiciamus, patebit, quantæcunque etiam fuerit longitudinis catena, impoſſibile eſſe, ut ejus partes inferiores a ſuperioribus ſeparentur; propterea quia, in ſuſpenſione vel attractione, nullum amplius poſſident pondus, quod illas ad lapſum invitet. Conſideremus primo catenam alicubi ſuſpenſam, & ſi vis, aliquot mille pedes longam, quare deciderent partes ejus inferiores? Fruſtra dicis, quia ſunt ponderoſæ: quid enim eſt pondus? haud dubie niſus aliquis & tendentia deorſum: unde vero iſte niſus? fateris non a principio quodam intrinſeco, ſed nec ab incumbentis ætheris preſſione, utpote quæ per ſuſpenſionem terminari ſupponitur in ſumma ſuperficie catenæ, nec pertingere ad partes ejus inferiores. Nullus ergo talis deſcendendi in ipſis eſt conatus: non ergo deſcendent, etiamſi nulla ſupponatur materia, quæ illas contra ſupremas catenæ partes impellat. Sed contemplemur etiam nunc catenam, altera ſui extremitate attractam, iterumque aſſignata menſura multo longiorem; & expendamus rationem, quare partes ejus ſequentes deberent non attractæ relinqui. Quia ſunt, inquis, ponderoſiores ſimili cylindro aerio-æthereo, a quo proinde nequerent

No. II. propelli : ſupponis ergo habere pondus ; ſed unde hoc , ſi non ab interno principio , nec ab externa ætheris incumbentia , quæ per attractionem irrita fit. Regeris, ipſam catenæ molem & quietem reſiſtere preſſioni ætheris lateralis , illam ſublevare conantis : atque in hac reſiſtentia conſiſtere ejus pondus. Tota ergo quæſtio huc rediret , an corpus aliquod quantumvis magnum in loco vacuo , id eſt, tali , ubi a nihilo adjuvaretur , vel impediretur , conſtitutum , ſola ſua mole , vel quiete , potentiæ moventi reſiſtere potis eſſet ? & quia puto concipi non poſſe , qualis ſit iſta in magnitudine vel quiete , qui modi ſunt pure paſſivi , reſiſtendi vis ; credendum , minimam potentiam motricem ſufficientem eſſe movendo maximo corpori quieſcenti in vacuo conſtituto , contra Reg. motus 4^{tam} Carteſianam. Unde quia , per attractionem catenæ , inter ſupremam ejus partem & ſequentes , conſtituitur (ſit venia dicto) vacuum quaſi *potentiale* , id eſt, talis locus , in quem inferiores , nullo impediente , protrudi poſſunt ; ſequitur minimam ambientis materiæ preſſionem capacem eſſe ſublevandæ toti catenæ , licet multoties longiori.

Cur ſuppoſita ætheris gravitate, liquores tamen non debeant ad infinitam altitudinem in tubis ſuſpenſi hærere?

Longe autem alia ratione hac in parte comparatum eſt cum ſuſpenſione liquorum in tubis ; quare diluendus eſt circa illam ſcrupulus , quem prævideo ad impugnandum ætheris pondus moveri poſſe : Exiſtimaret enim forte aliquis , ſi præter atmoſphæram gravitaret omnis illa materia ſubtilis ad orbem uſque Lunæ protenſa , fore , ut aqua incomparabiliter altius in tubum elevaretur , quam ad 34 tantum pedes ; ipſeque mercurius in multo majore quam 29 digitorum altitudine ſuſpenſus hæreret : quoniam enim gravitates aeris & aquæ ſunt , ut 1 ad 1000 , numero rotundo ; vel aeris & mercurii , ut 1 ad 14000 ; oportet, ut cylindrus fluidi externi , qui in æquilibrio aquam 34 pedum , aut mercurium 29 digitorum ſuſtinet , cylindrum aqueum non niſi millies , aut mercurialem 14000^{ies} ſuperet ; adeo ut altitudinem 34000 pedum vix excedere queat ; (quanta quoque fere eſſe poterit atmoſphæræ altitudo , ſiquidem uniformis ubique ſupponatur conſiſtentiæ ;) tantum abeſt , ut ad orbem uſque

que Lunæ pertingere, ac 43000 milliarium altitudinem exæquare poſſit. Conſiderandum itaque, latera tubi, quæ aeri craſſiori tranſitum negant, non perinde materiæ ſubtili impervia eſſe; quare cum hæc libere per poros iſtorum laterum, ut & duriſſimi cujuſque corporis, irruere poſſit; non eſt, quod dici queat materiam ſubtilem, imminentem vaſculo extra tubum, fortius impellere liquorem ſurſum, quam illa quæ liquori in tubo incumbit, eundem premit deorſum; cum utrique liquori, extra & intra tubum, æqualis altitudinis cylindrus æthereus incumbat: (exigua enim illa paucorum pedum differentia, qua cylindrus vaſculi altior eſt cylindro tubi, in tam immenſa cylindrorum altitudine nullius eſt momenti:) ſubductis ergo æqualibus iſtis viribus in contrarium tendentibus, ac ſe mutuo deſtruentibus, remanet ſolum aeris atmoſphærici pondus, præter materiam ſubtilem ſuper vaſculo gravitans, cui impulſio liquoris in tubum aſcribenda. No. II.

Idem quoque reſponderi tuto poterit, quotieſcunque animadvertimus, cylindrum aerio-æthereum non majus ſuſtentare vel elevare poſſe pondus, quam atmoſphærico æquivalens. Huc facere poterit *Exper.* 33. *Illuſtr.* BOYLII *in Libro ejus de Novis Experim.* ubi narrat, poſtquam evacuatum fuiſſet recipiens, detractum embolum, ſublata vi detrahente, tanto impetu in antliam veluti ſua ſponte reaſcendiſſe, ut etiam annexum ſibi pondus pluſquam centum librarum in altum ſuſtulerit. Quum enim hic maximi ponderis, quod ab embolo ſic ſurſum rapi poterat, mentionem factam eſſe mihi perſuaderem; explicando pondus pluſquam centum librarum de paucis ultra centum libris, cupido me inceſſit calculo explorandi, an ſolius atmoſphæræ preſſio iſti ponderi ſublevando ſufficiens eſſe potuerit. Quoniam autem conſtat, cylindrum atmoſphæricum æquiponderare ſimili cylindro aqueo 34 circiter pedum; ſuffecerit inveſtigare pondus talis cylindri aquei, cujus baſis inſuper obtinet diametrum 3 digitorum, quanta nempe eſt diameter ſcapi atque emboli, in machina Boyliana. Sumſi itaque, dum aliud vas regularius non erat ad manus, vulgarem urnam lymphaticam *a b c d*,

Cur Embolus evacuatæ antliæ non niſi centum plus minus libras ſuſtineat?

No. II. *a b c d*, coni truncati figuram præ ſe ferentem: Ejus ſumma
Fig. 19. baſis *a b* in diametro continebat unum pedem Anglicanum, ſeu mille ſcrupulos; ima *c d*, 792; profunditas perpendicularis *g e*, 750: hinc ſuperioris baſis area reperitur 785714, inferioris 492850, ſcrup. quadr. Et quia in conis truncatis, ut differentia diametri baſium eſt ad profunditatem, ita diameter baſis minoris ad altitudinem fruſti refecti; hinc erit, ut 208 ad 750, ita 792 ad rectam *e f*, 2856 ſcrupul. cujus tertia pars 952, ducta in aream 492850, mihi exhibuit ſoliditatem coni imaginarii *c f d*, nempe 469193200 ſcrupulorum cubicorum. Similiter area baſis majoris. 785714, ducta in 1202, tertiam videlicet partem aggregati profunditatis urnæ & altitudinis coni imaginarii, manifeſtavit ſoliditatem coni integri *a f b*, quæ eſt 944428228, ſcrup. cubic.; a qua ſubtracta ſoliditas coni imaginarii *c f d*, reliquit capacitatem quæſitam urnæ *a b c d*, nempe 475235028 ſcrup. cubic. Quo facto urnam in bilance appendi, primo vacuam, reperique pondus ejus 7 lib. 6. unc. eandemque poſtmodum aqua repletam, ponderabatque 35 lib. 6 unc. illo ergo ab hoc ſubducto, relinquebantur pro pondere ſolius aquæ 28 libræ; unde concluſi 475235028 ſcrupulos cubicos aqueos deprimere 28 libras, integrum vero pedem cubicum aquæ propemodum * 59. libr. Porro, quia circulus, cujus diameter eſt trium digitorum, ſive 250 ſcrupul. aream habet 49107 ſcrup. quadr. ſi ducatur hæc in 34 pedes, ſive 34000 ſcrupulos, prodibunt 1669638000 ſcrup. cub. pro ſoliditate cylindri. Quare dicendum: Si 475235028 ſcrup. cub. aquæ deprimunt 28 libras, quantum ponderabunt iſtorum ſcrupulorum 1669638000? *Facit* 94 libras, pro pondere cylindri aquei 34 pedes alti, & latitudinis tripollicaris, ſive ſimilis cylindri atmoſphærici, quantum quoque præterpropter fuit illud pondus, quod in Expe-

Pondus pedis cubici aquæ.

Pondus cylindri atmoſphærici latitudinis tripollicaris.

* Roholtus Phyſicæ ſuæ parte prima, cap. 9. §. 10. ponit pro pondere pedis cubici aquæ 71 libras; ſed pes Pariſienſis Anglicano major, ille 1055, hic tantum 968 eſt partium, quarum Rhinlandicus continet mille. Taceo, quæ in ponderibus intercedere poteſt, differentiam.

Experimento Boyliano embolo appenſum & ab illo ſublevatum fuit. No. II.

Exinde vero fruſtra quis putaret, convelli gravitatem ætheris, ſub prætextu, quod ſolum pondus atmoſphæricum huic effectui producendo capax fuerit, & quod, ſuppoſita ætheris preſſione, longe majus pondus embolo annexum ſuſtentari & elevari debuiſſet. Nam conſiderandum eſt, dum evacuatur aer, non pariter exhauriri poſſe ex antlia materiam ſubtilem, quin ſubinde liberum ſibi paret introitum in recipiens atque antliæ ſcapum per eorum poros, ibique non minori robore premat ſuper interiore emboli ſuperficie, quam exterior ætheris cylindrus premit ſuper exteriore; unde, æqualibus his abolitis viribus, remanet tantum illud cylindri atmoſphærici ſuperpondium efficax, quo exterior emboli preſſio interiorem ſuperat.

Diſparitas inter ſuſpenſionem baculi, & liquorum in tubis.

Atque hinc maxima elucet diſparitas, quæ hac in parte intercedit, inter ſuſpenſionem attractionemve baculi vel catenæ, & inter ſuſpenſionem liquorum in tubis, vel emboli in ſcapo recipientis: nam, quantum ad baculum ſuſpenſum vel attractum; is, toto ſuſpenſionis ſeu attractionis tempore, reapſe nullam poſſidet gravitatem, neque in actu ſecundo, neque in actu primo, id eſt, neque deſcendit, neque deſcendendi habet conatum, utpote liberatus a preſſione incumbentis ætheris, cujus tota vis terminatur in ſumma baculi ſuperficie, vel potius in manu attrahentis, aut unco, ex quo ſuſpenſus eſt: hinc enim fit, ut baculus, utut procerus, a minima ætheris vi ſuſtentari aut propelli debeat. Sed aliter ſentiendum de liquore in tubo, aut embolo cum annexo pondere in ſcapo recipientis; qui quamvis actu non deſcendant, retinent tamen omnem ſuam gravitationem & deſcendendi niſum, propterea quia efficaciam preſſionis materiæ ſubtilis, per tubum vel recipiens ingreſſæ, in omnibus ſuis partibus adhuc perſentiſcunt: neque enim ſane ut manibus ſuſtentati, vel ut clavis ad tubi ſcapique latera, inſtar baculorum, affixi concipi debent: unde ſequitur, non majorem ipſorum molem hac ratione ſuſtentari poſſe, quam cujus deſcendendi niſus debilior eſt vi externæ preſſionis atmoſphæricæ.

No. II. Interim tamen etiam recte exinde colligimus, ſi quo artificio materia ſubtilis ab ingreſſu tubi arceri queat, fore, ut liquor ad quamvis imaginabilem altitudinem in tubum elevari, vel in eo ſuſpenſus teneri debeat; quod ab omnibus Pleniſtis, præſertim ab iis, qui ad Fugam vacui confugere in hac materia ſolent, mihi conceſſum iri non dubito.

Cur Mercurius repurgatus in ſex pedum altitudine hæreat? Quanquam autem tale quid effectui dare impoſſibile forte videatur, ob improbum obſtaculum, quod nullus dari poſſit tubus, adeo ſolidus & compactus, qui ſit materiæ ſubtili impenetrabilis; non tacendum tamen eſt hanc in rem rarum quoddam experimentum, quod Nob. ROHOLTUS *Phiſic. part. prim. cap.* 12. §. 29. ex Anglia ſibi tranſmiſſum memorat, videlicet quod mercurius, in exhauſto recipienti aliquantum temporis aſſervatus, ad altitudinem ſex pedum citra lapſum in tubo ſuſpenſus hæreat: ubi obſervandum, mercurium, durante ſua in evacuato recipienti manſione, a magna copia materiæ peregrinæ, quæ antea in ejus poris latitaverat, repurgari; perque hujus materiæ exhalationem ejus poros reddi debere multo, quam fuerant, anguſtiores: quo conceſſo, facilem dabimus ex iis, quæ hactenus dicta fuere, phænomeni ſolutionem: Si ſupponamus enim, mercurium hoc pacto repurgatum ita ſeſe inſinuare & adaptare tubi poris, ut omnes eorum receſſus quam exactiſſime oppleat; conſequi videtur, materiam ſubtilem in illas tantum mercurii particulas agere poſſe, quæ poros vitri obſtruendo ejus preſſioni exponuntur; cæteras vero, quæ ſolidis tubi partibus, tanquam propugnaculo muniuntur, ab hac preſſione immunes præſtari debere, quod materia ſubtilis objectu priorum ab omnimoda in tubum irruptione prohibetur. Unde quia cylindrus mercurialis tubo incluſus, a perpendiculari columna ætherea parte ſui tantum aliqua (qua, ut ſic dicam, cylindrum refert perforatum) deorſum premitur; dum interea ab æthere laterali vaſculo incumbenti ſecundum ſe totum ſurſum impellitur; non poteſt non iſta impulſio priori multo prævalere, atque ita longe procerior mercurii cylindrus ſuſtentari, quam ſi, illo non repur-

repurgato, penetraſſet tubum æther, ſuperque totum ejus corpus æqualiter ſeſe diffudiſſet. No. II.

Obſervandum etiam hac occaſione, eſſe aliquos, qui exiſtimant, materiam ſubtilem in vulgari experimento Torricelliano non per vitrum, quod illi ſit impenetrabile, ſed per ipſius mercurii poros ſibi tranſitum parare; id quod per alterum experimentum, ſiquidem fidem mereatur, neceſſario inferri autumat Roholtus: nulla enim alia, inquit, phænomeni hujus dari poſſet ratio, quam quod clauſis, vel anguſtatis, mercurii repurgati poris, omnis materiæ ſubtili præcluſa foret via, qua pelli poſſet ab incluſo mercurio in locum, ad quem deferendum ipſe naturali ſua gravitate proclivis eſt. Veruntamen aliam phænomeni jam dedimus rationem, non recurrendo ad omnimodam vitri ſoliditatem: imo ne quidem neceſſaria eſſet allata reſponſio, ſuppoſita etiam tubi impenetrabilitate, & ſufficienti pororum mercurii anguſtia; ſimpliciter dicendum fuiſſet, mercurium repurgatum ideo in tanta altitudine hærere ſuſpenſum, quod omni exutus ſit gravitate; cur enim deſcenderet, ubi nulla eſt gravitas ſeu deſcendendi niſus? unde vero iſte deſcendendi niſus, ubi nulla eſt materia deorſum premens? unde tandem iſta materia, cui undequaque negatur ingreſſus? Verum tam altas egit in mentibus noſtris radices idea gravitatis, ceu qualitatis alicujus inhærentis, & a ſubjecto ſuo inſeparabilis; ut, omni etiam adhibito ſtudio, vix cavere poſſimus, quin crebro inveterati hujus conceptus indicia verbis incogitanter prodamus.

Cur preſſione Ætheris non concectantur, uti durorum, ita liquidorum particulæ?

Alia nunc ſuboritur nobis excutienda quæſtio, unde nempe fiat, quod tota hæc fluida materia, Terram quaquaverſum ambiens, ſiquidem gravitet, atque iſta gravitate cohæſionis partium cauſa exiſtat in corporibus duris, non poſſit idem efficere in corporibus liquidis, & ne quidem, tota hac ſua preſſione, duas ſolas guttulas aquæ ita connectere, quin, attracta vel ſuſpenſa una, altera protinus decidat atque ab illa ſeparetur; cum tamen liquida corpora non minus ejus preſſioni expoſita ſint, atque dura. Obſervo autem, hujus quæſtionis ſolutionem ex principiis noſtris reddi non poſſe, quin illa eadem opera nos deducat in

Digitized by Google

No. II. cognitionem naturæ corporum durorum & liquidorum, qualis ea concipitur a ſanioris Philoſophiæ Cultoribus, quod proinde ſententiam meam de Preſſione Ætheris, Cohæſionis corporum cauſa, non parum confirmabit: Supponamus itaque duo corpora A, & B, libero aeri expoſita, quorum ſuperius A, vel attractum, vel ſuſpenſum, vel quoquo modo fulcro innixum intelligatur; & conſideremus primo, quid circa corpus B, juxta principia noſtra, fieri debeat, ut affixum hæreat corpori A. Manifeſtum autem, quia ambo corpora fluido externo ambiuntur, nos poſſe concipere varias hujus fluidi columnas, quarum media C incumbat perpendiculariter corpori A, lateralium una D premat ſuperficiem ſuperiorem corporis B, altera E inferiorem; animadvertimuſque, quamdiu columna D æqualibus viribus infringit impetum columnæ E pellentis ſurſum, corpus B non poſſe jungi ſuperficiei corporis A, ſed neceſſario ab illo ſeparatum iri, & lapſurum vi tanti ponderis, quanto juvatur conatus deprimendi columnæ D a propria gravitate corporis B. Unde concludimus, ſi corpora A & B cohærere debeant, neceſſum eſſe, ut ſuperficies ſuperior corporis B a preſſione columnæ D immunis præſtetur; quod aliter fieri nequit, quam ſi ſuperficies contiguæ corporum A & B immediate ſeſe contingant; (ut videre eſt in *Fig.* 21.) ſic enim fiet, ut excluſa columna D, corpus B illa tantum preſſione afficiatur, quæ illud ſurſum impellit & agglutinat corpori A: neque enim exiſtimandum eſt, columnam C ullatenus in corpus B, quamvis immediate junctum corpori A, agere poſſe, illud deorſum impellendo; utpote cujus tota preſſio terminatur in corpus A, vel potius in manum illud elevantem, aut fulcrum illud ſuſtentans. Et ſic quidem cohærebunt corpora: unde intellectu non difficile eſt, cum contrariorum ſit contraria ratio, quid corpora reddat liquida: nihil enim aliud ad hoc requiri videtur, quam ut columnæ D hiatus ſive rima relinquatur aperta, qua poſſit irruere inter ſuperficies utriuſque corporis A & B; atque, hoc deorſum premendo, irritam reddere columnæ E preſſionem ſurſum; (uti in *Fig.* 20.) ſic namque fiet, ut corpus B neceſſario ſeparetur

Fig. 20. (margin, beside "pora A, & B")

Fig. 21. (margin, beside "ſuperficies contiguæ")

Fig. 20. (margin, beside "lumnæ D hiatus")

retur ab A, decidatque tanto impetu, quantus reſpondet exceſſui, quo pondus B ſuperat pondus æqualis voluminis materiæ ſurſum prementis. No. II.

E quibus tandem judicabimus, naturam *Liquidi* cujuſque corporis in eo conſiſtere, quod particulæ ejus ſingulæ a ſingulis ſeparatæ ſint atque diſcretæ, interjectis intervallis *iii*, alia materia peregrina repletis, quæ adeo non inepte comparari poterunt denſæ congeriei minutiſſimarum inſularum, in materia ſubtili tanquam oceano ſuo fluitantium; qualis repræſentatur *Fig.* 23. *Duri* vero natura in eo ſita eſt, quod ejus partes continuo ſibi omnes adhæreſcant filo, ſic ut nulla inter ſuperficieculas earum queat intercedere materia peregrina, quamvis interea infinitis poſſit patere poris *aaa*, per quos tanquam per canaliculos deferatur materia ſubtilis; quo ipſo non inconcinne refert tractum terræ continentis, cujus partes omnes longo iſthmo protenſæ, communicationem habent invicem, & quamvis hinc inde interlabente amne interſtinctæ, ponte tamen iterum connexæ ſunt; qualis figura adumbrata eſt num. 24. Quæ ſit natura liquidi & duri? *Fig.* 23. *Fig.* 24.

Sed quia hic peculiaris aliqua circumſtantia, & difficultas non contemnenda circa naturam Liquidorum ſeſe offert, ſpeciali aliquo exemplo rem illuſtrare conabor: Sit ergo tubus in aere pendulus, & repletus aqua, cujus duæ ſolummodo conſiderentur guttulæ A, & B, (quia reliquarum par eſt ratio) annihiletur per Dei potentiam tubus, ſuſpenſaque concipiatur in aere guttula ſuperior, quid fiet de reliqua? decidet, inquis, & ſeparabitur ab altera; aere enim undique allabente, erit columna quidem una E, quæ ad aſcenſum ſollicitabit guttulam B, alia vero D, quæ eandem æqualibus viribus conabitur premere deorſum; & quia huic poſteriori preſſioni auctarium accedit a proprio pondere guttulæ, ſequitur illam priori prævalituram, & ſic detruſum iri guttulam. Sed ecce nodum! ſupponis, columnas ambas prementes æqualium eſſe virium; dum non attendis, illam, quæ premit ſuper ſuperficie inferiore corporis B, ex æthcrea & atmoſphærica eſſe compoſitam, illam vero, quæ ſuperficiei ejuſdem ſuperiori incumbit, pure eſſe æthercam; propterea *Fig.* 20.

 quia

No. II. quia rimula illa, inter utramque guttulam interjecta, ob anguſtiam ſuam, nullam aliam materiam præterquam ſubtilem admittit; (conſtat enim liquores, aut nihil, aut ſane perparum, in ſe continere aeris craſſioris, intervallis inter particulas eorum ſoli ſubtili patentibus;) unde plane ſequeretur contrarium, videlicet preſſionem guttulæ ſurſum, factam a columna aerio-ætherea E, fore tanto validiorem preſſione ejuſdem deorſum, profecta a columna ætherea D, quanto columnæ E acceſſerit a cylindro atmoſphærico ſuperpondium; & proinde guttulam iſtam perpetuo adhæſuram ſuperiori.

Pori liquorum non ſola materia ſubtili repleti.

Quare ut hæc evaneſcat difficultas; ſciendum probabile eſſe, liquorum poros non ſoli materiæ ſubtili patere, ſed ſubinde ſatis laxos eſſe, qui imperceptibiles quaſdam aeris particulas, vel aliquid aeri analogum hinc inde diffuſum hoſpitentur. Id enim videntur ſuadere exiguæ illæ bullulæ, quæ e quovis liquore recipienti incluſo per exhauſtionem elici conſpiciuntur, quippe quæ (inclinante in hanc ſententiam Illuſtriſſ. Boylio) aeris ibi deliteſcentis, atque ſeſe jam expandentis potius, quam elaterii cujuſdam ipſius liquoris, ſunt effectus; cum ſimiles bullulæ in argento vivo, liquore adeo ponderoſo & denſo, nullumque haud dubie poſſidente elaterium, deprehendantur; vid. *Lib. de Nov. Experim. num.* 22.

Cur liquori effuſo ſeſe confeſtim inſinuet aer?

Verum alia ſupereſt reſpondendi via, etiamſi intervalla liquorum nulla alia quam ſubtili materia repleta eſſe ſupponamus; hoc enim admiſſo, verum quidem eſſet, quamdiu nihil aeris atmoſphærici ſubintraverit rimulam duarum guttularum, ſuperque inferiorem guttulam preſſerit, eam minime lapſuram eſſe; ſed verum etiam foret, guttas ſic diu hærere non poſſe, quin ſtatim ſeſe rimulæ inſinuet aer: conſiderandum enim, quantulumcunque materiæ ſubtilis illud eſt, quod guttulam a guttula diſterminat, hiatum tamen & rimam ſemper aliquam inter utramque relictum iri, minutiſſimam quamvis, rimam tamen; huic rimæ particulæ aeris anguloſæ columnæ D neceſſario ſeſe intrudunt, & cum ſtipatæ ſint mole totius columnæ aeriæ D, non minori niſu hanc rimam ſtudebunt ſervare apertam atque laxare,

laxare, quam eandem rimam anguſtare vel claudere conatur columna E; cum vero conatus columnæ D adjuvetur proprio pondere guttulæ, quo impeditur preſſio columnæ E, prior neceſſario ſuperior evadet, atque laxata rima ſuper ſuperficie guttulæ preſſionem exercens, eam deorſum impellet. Quodque hic dictum de duabus guttulis, pari ratione de integra mole aquea, alteriuſve liquoris, in aerem effuſa intelligendum: quoniam enim infinitis iſtiuſmodi patet rimulis *iii*, (*fig.* 23.) per quas aer, cunei inſtar, deſuper & a latere magno impetu ſeſe intrudit; non poſſunt non laxiores reddi, guttulæque ab aere intromiſſo deprimi; quod & ex ipſo aquæ deſcenſu liquere poteſt; quo diutius enim hæc continuavit cadere, eo magis magiſque ab aere irruente diſſipatas videmus guttulas. No. II. *Fig.* 23.

Contrario plane modo philoſophandum eſt de Corporibus Firmis ſeu Duris, v. g. de baculo, cujus nulla pars ab alia ſeparatur, quamvis ſub dio ſuſpenſus, atque libero aeri expoſitus ſit; cujus ratio eſt, quod ejus particulæ a provida Matre Natura ita firmiter ſibi ſint coaptatæ, ut ne minima quidem inter ſuperficiecularum commiſſuras relicta ſit rima, quæ acceſſum præbeat materiæ peregrinæ: nam quanquam per illos canaliculorum mæandros *a a a*, (*fig.* 24) irrumpere poſſit non tantum ſubtilis, ſed & ipſe quandoque aer craſſior, atque ita diſterminare ſeriem unam particularum *b b*, ab altera *c c*; cogitandum tamen, has ſeries ſubinde innumeris ramis tranſverſis *b c*, *b c*, ſibi connexas eſſe, atque adeo ſingulis particulis cum ſingulis perpetuum, ſive immediate, ſive per intermedias, eſſe commercium. Ergo dum attrahitur, vel ſuſpenditur baculus; impeditur per hanc ſuſpenſionem, vel attractionem, columna inſiſtens ſupremis baculi partibus, pariterque, per arctam connexionem particularum, reliquæ omnes columnæ laterales, ne gravitare poſſint ſuper ſummas ſuperficies partium inferiorum; quæ cum deſuper non premantur, obſecundabunt preſſioni ex imo ſurſum, atque ita perpetuo cohærebunt. Cur preſſione Ætheris connectantur Durorum particulæ? *Fig.* 24.

Non arduum etiam erit, his intellectis, cognoſcere naturam *Corporum mollium* & *Liquorum craſſiorum*, quæ cum minus pertina- In quo conſiſtat mollities & lentor?

Digitized by Google

No. II. tinaciter cohæreant, quam perfecte dura, ægrius quoque tamen ſeparantur perfecte fluidis. Cum enim particulæ ex parte cohærent, ex parte divulſæ ſunt, hinc oritur *mollities*; & cum rimulæ inter partium ſuperficiecula interjectæ ſunt anguſtiores, quas minus facile, nec niſi cum aliqua mora penetrare poſſit aer, hinc ille *lentor*.

Cur liquidorum particulæ ſint rotundiores, durorum oblongiores? Quem philoſophandi ordinem ſi ulterius vellemus proſequi; varias adhuc detegeremus corporum durorum & liquidorum proprietates, quarum una eſt, quod Liquidorum particulæ debeant, non dico, exacte rotundæ eſſe, ſed magis ad figuram ſphæricam accedere, quam Durorum; quia illæ a materia ſubtili totæ ambitæ, undique fere premi æqualiter, hæ vero, propter aliarum accreſcentiam, longorum ramorum figuram nanciſci debent.

Cur illæ moveantur, hæ quieſcant? Maxime vero inſignes Duri & Liquidi proprietates, quæ præcipuum eorum conſtituunt diſcrimen, atque ex principio noſtro ſponte quaſi fluunt, hæ ſunt; quod Fluidorum particulæ in continua ſint agitatione & motu, utpote ſingulæ a ſingulis ſeparatæ; Durorum vero univerſæ juxta ſe quieſcere debeant, quippe ſingulæ ab aliis ſibi connexis impeditæ. Simile cape, craſſum forte magis quam ineptum: Duæ Beſtiæ ſolutæ in omnes partes prompte diſcurrere, ſeſeque in orbem vertere poſſunt; & dum una ad ſiniſtram, altera eodem momento ad dextram ſe inflectere poterit: ſed vinculo ſibi illigatæ ubi fuerint, neutra poterit aliquorſum tendere, quin altera nolens volens in eandem plagam rapiatur; imo dum ſic, reſpectu partium conclavis, locum varie mutare poſſunt, reſpectu ſui tamen, quieſcere dicentur; quandoquidem altera in alterius vicinia perpetuo hæret: Ita putandum eſt, preſſionem duarum columnarum aerio-æthererum eſſe vinculum illud, quod partes duri corporis inter ſe connectit, atque ad motum ineptas reddit. Qua occaſione præſertim notari velim, ſicuti ridiculum foret, beſtiarum connexionem, quæ debetur vinculo, aſcribere earum quieti, cum hæc contra fluat ex illa; ita non magis excuſari poſſe, ſi dicatur, cauſam cohæſionis partium duri corporis deberi ipſarum quieti; cum

cum utraque, & quies, & cohæſio, (utriuſque enim eundem habeo conceptum) debeat eſſe manifeſtum conſequens & effectum illius preſſionis, ſeu actionis, qua partes invicem connectuntur. No. II.

Illud tamen etiam prætereundum mihi non eſt; quod quamvis particulæ duri corporis ita connexæ, a preſſione columnarum aerio-æthererarum impediantur in illo motu, quo promiſcue, atque celerrime, in omnes partes ferri alias potuiſſent; non tamen neceſſum ſit, ipſis omnem prorſus adimere motum; relinqui enim illis poterit motus languidior in orbem talis, qui fit ſuper axiculis ad partium connexarum ſuperficieculas perpendicularibus; quo motu fiet, ut ſuperficies ſibi mutuo, ſecundum ſe totas quidem, junctæ maneant, partes tamen earum ſucceſſive aliæ aliis diverſimode reſpondeant. Confirmatur ex eo, quod etiam in adamante, & corpore quovis duriſſimo, ſucceſſu temporis alterationes obſerventur, quæ de inteſtino particularum motu, licet lentiſſimo, ſatis utique teſtantur. Conſule Tractatum Celeb. BOYLII de *abſoluta Quiete in corporibus.* Durorum particulas abſolute quieſcere, non eſt neceſſe.

Alia proprietas Durorum & Liquidorum eſt, quod hæc facile cedant tactui, illa difficulter: Cujus cauſam CARTESIUS iterum rejicit in motum & quietem partium, *Part. ſecund. Princip.* §. 56. 57. Sed nequicquam: an enim digitus meus impellens plus invenit reſiſtentiæ in particulis ferri omnino quieſcentibus, quam in particulis aqueis, forſan in adverſam digiti mei partem motis? id vero refutatur ex ipſius Regulis motuum, ſecunda & quinta, invicem collatis; quoniam, juxta hanc, ad movendum corpus quieſcens, ſufficit, ut ab alio majori quantumvis tarde moto impellatur: ad movendum autem corpus in adverſam antea partem motum, requiritur, juxta illam, ut impellens ad minimum æque velociter moveatur, atque corpus impulſum: unde manifeſte colligitur, cæteris paribus majore cum facilitate loco propelli illa, quæ plane quieſcunt, quam quæ in contrarium moventur. Et quamvis, cum fluidi particulæ promiſcue in omnes partes ferantur, contingere poſſit, ut nonnullæ earum in eandem cum digito partem conſpirantes, ei facilio- Cur Liquida facile cedant tactui, Dura difficulter: & an quies ejus rei cauſa ſit?

No. II. liorem parent tranſitum; cogitandum tamen ſubinde, totidem viciſſim eſſe alias, quæ in contrariam partem motæ digiti conatum tantundem impediunt, quantum reliquæ adjuvant; unde quantum ad hoc, digitus non majorem debet ſentire, vel reſiſtentiam, vel facilitatem in dividenda aqua, quam ſi omnes ejus particulæ prorſus quieſcerent. CARTESIUS hanc difficultatem prævidens nobis perſuadere vult, particulas jam actu motas propterea facilius cedere tactui, quam quieſcentes, quod digitus illas impellens non novum iis imprimat motum, (id quod citra difficultatem fieri nequiret) ſed hoc tantum præſtet, ut determinetur ille motus, quem jam habent, in eam partem, verſus quas fertur ipſe digitus. Veruntamen quia magnus ſemper, uti dictum, particularum numerus in adverſam digiti partem feruntur; cogitur ſtatuere *Philoſophus*, facilius eſſe, ut digitus corpus ita ſibi obvians determinet in contrariam partem, quam ut ad motum concitet aliud corpus omnino quieſcens; ſed, hac ratione, quid fiet de Regulis ejus ſecunda & quinta, quæ plus requirunt virium ad repellendum corpus in adverſam partem motum, (ſive hæc repulſio fiat per communicationem motus, ſive per determinationem ſaltem) quam ad impellendum corpus quieſcens? Quæ quidem invicem adeo manifeſte pugnant, ut certiſſimus ſim, CARTESIUM circa hanc materiam ſibi ipſi nequaquam ſatisfeciſſe, ſi vel minimum attenderit ad ea, quæ ipſemet ſtabilivit.

Atque ut palpabili exemplo manifeſtum fiat, cauſam facilitatis aut difficultatis, quam ſentimus in ſeparandis his vel illis corporibus, non eſſe motum quietemve partium; conſideremus arenæ quendam acervum, qui cum non difficulter cedat tactui, Liquidi quodammodo ſpeciem præ ſe fert; quamvis ejus grana, nec circa propria centra volvantur, nec motum ullum circularem obeant, qualem *Philoſophus* ad conſtituendam Liquidi naturam ibidem requirit; ſed ſingula juxta ſe perfecte quieſcant: notemuſque, hanc arenam firmi corporis naturam tum demum induere, cum mediante frigore, vel cæmento, vel alio quovis modo plura ejus grana in unam maſſam coaluerint.

Vera

Vera ergo ratio, quare Liquidorum partes facile cedant tactui, hæc eſt; quod cum ſingulæ a ſingulis per intervallula ſeparatæ ſint, illæ duntaxat impellantur, quas tangis, quæque, materia ſubtili ex intervallis expulſa, locum facile invenire poſſunt, quo ſe recipiant. Quod vero Durorum partes tactui reſiſtant, inde eſt, quoniam ſibi mutuo immediate connexæ cum ſint, loco dimoveri ſola nulla poteſt, quin uno ſenſu, aut penetrentur reliquæ, aut impellantur omnes: vel alio ſenſu, ſi una ſeparanda ſit ab altera, ſuperetur illa vis, qua connectuntur: unde facilius eſt, integrum corpus durum movere, quam partium ejus ſitum inter ſe mutare; quod adeo verum eſt, ut in ipſis quoque liquidis, quæ tanta facilitate dividere putamus, non tam partem a parte ſeparemus, quam plura integra corpuſcula dura ſolidave impellamus; talia enim neceſſario concipi debent minimæ liquorum particulæ, ubi ſingulæ per ſe ſolæ ſpectantur. No. II.

Pariter intellectu non difficile eſt ex hypotheſi noſtra, quare clavus ferreus, aut aliud corpus valde durum, ſola manuum noſtrarum vi frangi nequeat: Ut enim duæ corporis duri partes ab invicem ſeparentur, requiritur, ut vis illa connexionis, quæ omnibus ejus particulis in tranſverſum ſitis accedit a totidem columnulis aerio-æthereis, ſuperetur ab alia vi majore: cum ergo manuum vis illa ſit inferior, non mirum, quod ſolæ manus frangendo clavo impares ſint. Sed quare, inquis, nullo labore rumpitur bacillus ligneus, cujus partes a columnis æthereis non minus premuntur, arcteque conglutinantur, quam partes clavi? Reſpondeo, quia in ligno, ceu corpore valde poroſo, non tot ſuperficieculæ ſeparandæ, atque in ferro: unde vis, quæ par eſt ſeparandis ligni particulis, non confeſtim ferro frangendo ſufficiens eſt. Adde, quod poſſunt dari gradus Firmitatis in cohæſione particularum hujus vel illius corporis; aliis arcte ſibi junctis, aliis non niſi leviter cohærentibus & ſemiapertis, ſic ut minima vis aeri primo ſubtiliori, dein craſſiori ingreſſum parare poſſit: ſeparatio enim partium ut ſequatur, ſufficit, ut apertura fiat inter juncturas particularum, per quas irruere poſſit aer,

Quare manus lignum frangere poſſit, non ferrum? Conf. ſup. pag. 69.

 atque

No. II. atque preſſione ſua irritam reddere vim, qua partes ab aliis antea columnis comprimebantur: hinc eſt, quod enſe, ſecuri, vel alterius ferri acumine, longe facilius finditur lignum, quam ſi malleo, etſi multo majoribus adhibitis viribus, idem tentes; utpote qui ob figuram ſuam obtuſam hebetemque ad penetrandas particularum commiſſuras minus aptus eſt.

Cur manus facile clavum attrahat, ægre frangat? Conf. ſupr. p. 70.

Supra jam indigitavimus, CARTESIUM difficulter per quietem ſuam explicaturum, unde fiat, quod manus nullo labore attrahat clavum, ægre eundem frangat ſeu inflectat: cum enim, & per attractionem, & per inflexionem, hæc clavi pars, quam manu conſtringo, diſponatur ad deferendam alteram ſibi adhærentem; cur non hæc altera quiete ſua utrobique æquali niſu vim manus cohibet, & ſicut inflexionem, ita attractionem ſtudet impedire? Videbor quidem multis haud dubie nodum in ſcirpo quærere, ſcrupuloſque fingere, ubi plana eſt via: quid enim, inquient, evidentius, quam ideo nullam in attrahendo ſentiri difficultatem, quia nihil eſt, quod impedit, quo minus altera clavi pars manui obſecundet, partemque attractam libere inſequatur ad ſeparationem mutuam præcavendam? Verum ſi Carteſiani animo non præoccupato rem perpendant, animadvertent, ex ſuis placitis non adeo dictu facile eſſe, quid alteri huic parti vires inſequendi tribuat: ſi dicant, nullis opus eſſe viribus ad quieſcendum in vicinia alterius; reſpondeo, viribus tamen opus eſſe ad mutandum locum reſpectu aeris ambientis: ſi regerant, per attractionem nullum accedere motum novum parti inſequenti, nec ipſius etiam aeris reſpectu; hujus enim reſpectu jam ante attractionem poſſediſſe motum: eſto, ſed accedit ſaltem nova illius motus determinatio; unde vero hæc determinatio? non profecto ab ipſa parte clavi manum inſequente; uti enim omnis motus, ſic omnis ejus determinatio aliunde eſt; nec aeri ambienti ullæ ab iis hic conceduntur partes. Ergo ipſi manui attrahenti aſcribenda hæc determinatio: explicent vero illi, qui non niſi clara proferunt, qua occulta virtute manus determinare queat motum partis hujus, citra immediatum ejus contactum. Sed in hypotheſi noſtra res omni caret difficultate: Elevo e terra

terra baculum, reſiſtit elevanti columna ætheris, huic quam contrecto extremitati incumbens; ſed & alia eſt columna, quæ oppoſitam poſt manum extremitatem propellendo, tantundem fere conatum manus meæ adjuvat, quantum altera columna impedit; atque ita omnem, quæ abſque hac propulſione ſentiretur, difficultatem tollit, excepta tantum illa, quæ a proprio pondere baculi, minuente in tantum vires columnæ manum adjuvantis, procedere poteſt. Iterum, arrepto utraque manu clavo, inflectere illum, partemque a parte ſeparare nitor: quid contingit? ſunt columnæ, quæ extremitatibus imminentes, oppoſitis ſuis viribus utramque clavi partem comprimunt, manibuſque ſeparaturis omni niſu reluctantur; & quia propter immediatum partium contactum nulla ſeſe poteſt inter illas intrudere columna, quæ faveat earum ſeparationi, unam pellendo in hanc, alteram in illam partem; hinc ille conatus ſæpe irritus, & difficultas, quam experimur in inflectendis vel frangendis corporibus valde duris. No. II.

Et quamvis difficultas iſta in ligno tanta non ſit, quin baculus ligneus inflecti & rumpi certo ſenſu facile poſſit; conatu nimirum frangendi facto juxta lineam *a b*, perpendicularem baculo *d e*; eadem tamen difficultas alio ſenſu humanis viribus omnino fit inſuperabilis, conatu adhibito in directum juxta lineam *e f*, Quod ob eandem rationem fieri puto, ob quam duo marmora complanata ſibi impoſita facile quidem ſeparantur, cum juxta ſuperficierum ſuarum mutuum contactum ita trahuntur, ut unum quaſi repere videatur ſuper altero; difficulter vero, ubi alterutrum in directum ab alterius ſuperficie avellere tentaveris. Cauſa utrobique hæc eſt, quod preſſio columnæ incumbentis marmori, extremitative baculi (ſcilicet columnæ *f e*, qua cohæſio partium baculi efficitur) non opponitur directe motui ad latus, ex *a* in *b*, ſed motui duntaxat illi, qui fit ex imo ſurſum, ex *e* in *f*, unde multo efficacius conatui frangendi ſecundum hanc, quam ſecundum illam lineam adhibito reſiſtat, neceſſe eſt. Obſervandum autem, quamvis alia ſit columna *b a*, quæ latus baculi premens directe etiam opponitur conatui meo ex *a* in *b*,

Cur lignum uno ſenſu facile, alio difficillime rumpatur? Conf. ſupr. pag. 70. *Fig.* 11.

 non

No. II. non tamen hanc eſſe, quæ mediocrem, quam ſentio, difficultatem efficit; quandoquidem omnem ejus reſiſtentiam, quæ ex adverſo eſt columna *c a* contrariis viribus abolet, conatumque meum tantundem juvat, atque impedit altera *a b*. Omnis ergo difficultas, quam perſentiſco in ſeparanda quoquomodo parte baculi *a e* a parte *a d*, (quam ſuppono forcipe vel unco firmatam) proficiſcitur a columna *f e*; quæ cum nullam habeat e regione aliam columnam oppoſitam, quæ pellendo partem *a e* verſus *f*, ſuas vires deſtruat, ſemper conatui frangendi neceſſario reſiſtit, licet nonnunquam fortius, nonnunquam debilius, prout ejus preſſio, nunc magis, nunc minus directe conatui noſtro opponitur.

Quomodo preſſiones columnarum nos juvent, impediantve impulſione corporum? Atque ut diſtinctiſſime omnibus ſatisfaciamus ſcrupulis, qui ex non plene intellectis Mechanices Staticeſve legibus, circa hanc materiam, ſuboriri cui poterunt; ſupponamus, in corpore quantumvis magno nullas per ſe vires eſſe ad reſiſtendum; omnia autem corpora, in ſingulis ſuis ſuperficiebus ambientibus ſeu hedris, premi a totidem columnis aerio-æthereis; videamuſque, quo pacto diverſæ hæ preſſiones nos juvent, impediantve in iis impellendis.

Nova quædam Mechanicæ principia. *Fig. 22.* Hunc in finem conſideremus cubum A, quieſcentem in plano horizontali *f g*, expoſitumque preſſioni quatuor columnarum B, C, D, E, in quatuor hedris *b*, *c*, *d*, *e*; hac tamen cum differentia, ut columnæ quidem D & C in oppoſita latera cubi *d*, *c*, æquali impetu arietent, columna vero B, quæ ſummæ ſuperficiei incumbit, cubum tantillo efficacius deorſum premat, quam eundem ſurſum impellit columna E baſin cubi ſuffulciens; propterea quod ipſum cubi pondus aliquas vires addit illi, dum huic eaſdem aufert.

Quid fiat, ubi corpus elevatur perpendiculariter? I. Elevanti e terra perpendiculariter cubum, reſiſtit columna B, favet columna E, & quia magis impeditur, quam adjuvatur, ſentiet difficultatem reſpondentem exceſſui virium, quo prior columna ſuperat alteram, ſcil. tantam, quanta proficiſci poteſt a proprio cubi pondere.

Cur majus corpus II. Cubo exiſtente majore vel minore, augebitur vel minuetur

No. II. majorem pariat elevanti difficultatem?

tur elevantis difficultas; non quod pro ratione molis major vel minor ſit reſiſtentia, ſed quod pro ratione tum craſſitiei columnarum B, & E, tum ponderis ipſius cubi, augetur vel minuitur exceſſus virium, quo illa ſuperat hanc.

Cur corpus facilius ad latus impellatur, quam elevetur ſurſum?

III. Impulſa hedra laterali dextra *c*, debet ſentiri aliqua difficultas, non quidem proficiſcens a columna D, premente hedram lateralem oppoſitam *d*, (hanc enim marius impellens, æquali robore columnæ C armata, facile eludit) ſed ab ipſa columna perpendiculari B, quæ cum fortius affigat humi cubum, quam eundem humo ſublevat columna E, conſequens eſt, ut cubus non ſine aliquo labore poſſit revelli a parte ſuperficiei *e*, cui incumbit; iſteque labor, ob eandem rationem §. 2. citatam, cum majore, vel minore cubi mole, creſcere minuive debet; ſed nunquam tantus erit, quantus proficiſci poſſet a toto cubi pondere; propterea quia columna B, motui in tranſverſum, ex *c* in *d*, non diametraliter & ſecundum totum exceſſum virium ſupra columnam E reluctatur.

Quid fiat, ubi duo corpora complanata ſunt revellenda?

IV. Si baſis cubi & ſuperficies plani, in quo quieſcit, ita ſint lævigatæ, ut propius coeuntes omnem excludant aerem atmoſphæricum, admiſſa tantum inter commiſſuras ſuas materia ſubtili; tum elevando ad perpendiculum cubo eæ impendendæ vires, quæ præter pondus ipſius cubi ſuperare valeant integrum pondus columnæ alicujus atmoſphæricæ, pro baſi habentis ſummam cubi ſuperficiem: iſto enim ſuperpondio columna aerio-ætherea B columnam pure æthercam E excedit. Hinc, quo amplior cubi ſuperficies, eo difficilior ejus elevatio; quia craſſior tum columna atmoſphærica, cui ſuccumbit. Quæ requiruntur autem vires ad propellendum cubum lateraliter, non adeo magnæ ſint oportet; quoniam columna perpendicularis B, motui laterali, ex *c* in *d*, non valde inſigniter reſiſtit.

V. Si baſis cubi & ſuperficies plani, cui inſiſtit, ita arcte ſeſe excipiant, ut omnem quoque materiæ ſubtili columnæ E præcludant aditum, tum avulſio cubi erit molitionis difficillimæ, imo elevatio ejus perpendicularis humanis viribus omnino impoſſibilis: propterea quia columna B, jam nihil habens e regione,

Digitized by Google

longe inſignius reſiſtit, quam motui ad latus; unde multo major difficultas comitari debet cubi, quam ſphæræ impulſionem. No. II.

Cur corpora æquilibrata moveantur facillime?

VII. Corpus quodcunque, ſi concipiatur aeri undique expoſitum, omnique pondere ſuo exutum, minima vi in quamcunque partem impelli poterit: cum enim hoc pacto, columnæ omnes, quibus ambitur corpus, ad æquilibrium quaſi ſint redactæ, ſic ut nulla altera fortius premat; ſequitur, ſi minima vis accedat uni columnarum, hanc prævalituram alteri ſibi oppoſitæ, atque ita corpus propulſuram. Hinc eſt, quod pila eburnea, e filo perpendiculariter ſuſpenſa, atque ita quodammodo gravitate ſua privata, ab alia multo minore ad motum concitatur. Hinc etiam, quod navis, in aquis quieſcens, ſolius manus impulſui obtemperat. Hinc iterum eſt, quod bilanx, in æquilibrio conſtituta, licet multis onerata centumpondiis, minimo tamen impulſu quaquaverſum moveri poteſt. Huc facit illud ſtupendæ molis ſaxum (quod, ſi bene memini, Lugduni Gallorum oſtenditur) ita libratum, ut unius digiti impulſu motum & agitationem concipiat. Omnia enim hæc corpora gravitate ſua quaſi orbata ſunt, dum columnæ, quæ premunt ſummam & imam eorum ſuperficiem, ad æqualitatem virium redactæ ſunt; in nave quidem ope aquæ lateralis, quæ fundum navis ſublevans, ejus deſcendendi conatum oppoſitis viribus abolet; in bilance vero & ſaxo, utralibet lanx vel ſaxi medietas alterius lancis vel ſaxi medietatis pondus contrario pondere deſtruit. Nullo ergo hæc corpora impelli debent negotio: ſed tamen navis impulſu duntaxat laterali, non perpendiculari; quia non poſſet vel tantillo profundius demergi, quin altior fieret columna aquæ lateralis, atque ita navi præponderans, turbaret columnarum æquilibrium: in ſaxo vero & bilance, res indifferens eſt, & eadem facilitate in quamcunque partem impelluntur.

Cur tamen minus facilius majori?

Illud tamen præcipue hic obſervatu dignum eſt, quod animadvertere ſolemus, iſtam facilitatem in impellendis tam vaſtæ molis corporibus, licet æquilibratis, tantam non eſſe, quanta ſentitur in minorum corporum impulſione: perſuadebit autem forte ſibi aliquis, id fieri non poſſe, niſi corpus per ſe aliquas ha-

No. II. haberet reſiſtendi vires, eaſque, pro diverſa molis quantitate; nunc majores, nunc minores. Verum ut aliam reddamus diſcriminis hujus in impellendis diverſæ molis corporibus rationem, nullas ſtatuendo in ipſis corporibus reſiſtendi vires; ſupponamus, eandem ſemper in Univerſo conſervari motus quantitatem, & proinde corpus impellens tantam motus ſui perdere debere partem, quantam communicaverit corpori impulſo; communicare vero debere partem talem, ut ambo corpora poſt impulſum æquali celeritate ferantur, (quamvis harum regularum, præciſe & in rigore ſumtarum, veritatem nunc non examino:) ſuppoſitis autem iſtis, ratio diſcriminis eſt manifeſta. Impellat digitus corpus aliquod 999ies ſe majus; transferet ergo illi, juxta regulam, $\frac{999}{1000}$ partes ſui motus, milleſima tantum parte pro ſe retenta; quia illi nongenti nonaginta novem gradus motus corpus, toties digito majus, non celerius movent, quam reſiduus in digito gradus movet ipſum digitum. Sed digitus amiſſis 999 motus ſui partibus, non poterit amplius ea celeritate ferri, qua ferebatur antea; & ſi, exempli cauſa, emenſus eſt in aere uno pulſu arteriæ unam perticam, poſt impulſum corporis 999ies ſe majoris, eodem tempore milleſimam tantum perticæ partem perrepet; atque ita, quo majus eſt impulſum corpus, eo majus quoque debet eſſe decrementum motus in digito, & conſequenter incrementum tarditatis ejus. Hinc igitur eſt, quod inter duo corpora, licet æquilibrata, illud promotius & liberius moveri poſſit, quod minus eſt; ægrius vero & lentius, quod majus. Sed tædet me prolixitatis, quia ſpero attentum Lectorem, intellectis noſtris hypotheſibus, omnibus aliis circa hanc materiam oborientibus dubiis non difficulter ſatisfacturum.

Examen aliquot Experimentorum juxta Doctrinam de Gravitate ætheris.

Antequam tamen vela contrahamus, conſultum erit, ut examinemus poſtliminio inſigniora quædam experimenta, quæ vel ad confirmationem noſtræ de ætheris gravitate doctrinæ facere, vel per eandem explicari commode poterunt; cum eorum alias ſolutio, illa ignorata aut inſuper habita, vel obſcura, vel difficilis, vel inſufficiens merito habenda ſit.

De Tubo inverſo

Illud quidem in rem meam vertere hic nolo, quod Exc. BOY-

Digitized by Google

BOYLIO alio fine objecit LINUS, *Tract. de corporum inſeparabilitate, pag.* 124. *coll. cum pag.* 31, de inverſo ſcilicet Tubo, digito tam pertinaciter adhærente, ut ipſe, cum incluſo toto 29½ digitorum argento, ac notabili præterea pondere adjuncto, poſſit ſublevari, atque in aere pendulus a digito teneri: ubi dictus Auctor ſibi perſuadet, longe majus pondus hac ratione ſuſpendi, quam externus aer atmoſphæricus per ſuam gravitatem ſuſtentare poſſit. Quod quidem ſi verum eſſet, neſcio, annon potiori jure ætheris inde gravitatem elicerem, quam LINUS fabricatur funiculum ſuum. Sed, ut fatear quod res eſt, non exiſtimandum, cylindrum atmoſphæricum, quo ſuſtentatur aggregatum ex vitro, pondere & mercurio, eſſe ſolum illum, qui reſpondet in latitudine cylindro mercuriali incluſo; iſto enim tanto craſſior eſt concipiendus, quanto vitri craſſities latitudinem cylindri mercurialis auxerit. Et quia vitrum mercurio in ſpecie longe levius, nil mirum, ſi iſte cylindri atmoſphærici exceſſus, qui craſſitie ſua reſpondet craſſitiei vitri, ſufficiens ſit ſuſtentando tubo 29½ digitis multo altiori, & notabili præterea ponderi. Quamvis interim non dubitandum ſit, ſi pulpa digiti ſupremo tubi margini ita firmiter adaptari poſſet, ut materia ſubtili, vel omni, vel pleraque expulſa, digitus vitri marginem in tota illius ſuperficie, aut magna ſaltem ejus parte, immediate contingeret, quod tum haud dubie longe majus a digito ſublevandum foret pondus, quam a ſolo cylindro atmoſphærico, aggregato vitri & mercurii reſpondente, ſuſtentari poſſet.

No. II. digito adhærente.

Primum autem, quod favere noſtræ videtur doctrinæ, experimentum eſt illud de duobus marmoribus, quæ ſi exacte polita ſeu complanata ſint, ſibique ſuperimpoſita, adeo pertinaciter ſibi mutuo cohærere ſolent, ut (quantum e Tentamine Boyliano colligere poſſum) a pondere etiam multo majori, quam eſt ſimilis columnæ atmoſphæricæ pondus, divelli quandoque nequiverint. Narrat Illuſtris BOYLIUS *in Tractatu contra* LINUM *ad experim.* 31, ſibi marmorum fuiſſe par, quorum ſuperius elevaverit inferius, gravatum aliquando pluſquam 430 unciis; (confer *Hiſtoriam Firmitatis* §. 16.) idemque marmor in-

I. Experim. de duobus marmoribus in aere cohærentibus.

No. II. ſerius, tum recipienti incluſum, una cum quatuor unciis ſibi appenſis, non omnino exæquaſſe pondus ſimilis cylindri mercurialis longitudinis unius digiti. Quamvis autem ad calculum rite incundum optandum foret, ut Auctor adjeciſſet pondus exactum; ita tamen conjecturare nobis licebit: Pondus marmoris inferioris duas vix excedere potuit uncias, adjice illis quatuor uncias appenſas; eritque aggregatum lapidis & appenſi ponderis ſex unciarum, quæ non omnino exæquare debent pondus ſimilis cylindri mercurialis altitudinis pollicaris: ponamus autem, majoris evidentiæ gratia, illas ſemipollicari tantum mercurii cylindro æquiponderare; unde pollicaris mercurii cylindrus deprimet uncias 12, cylindruſque mercurialis integer $29\frac{1}{2}$ digitorum, ſive ei ſimilis cylindrus atmoſphæricus æquiponderabit unciis tantum 354; quare 430 unciæ marmori appenſæ longe majus ſunt pondus, quam quod ſola atmoſphæra ſuſtentare potuiſſet: & cum nequeat concipi, qua ratione iſtud ſuperpondium 76 unciarum a lapſu aliter præſervari potuerit, præterquam ab aliqua materia ambiente; jure concludimus, hunc fuiſſe gravitatis ipſius ætheris ſeu materiæ ſubtilis effectum.

II. Experim. de duobus marmoribus in evacuato recipienti cohærentibus.

Alterum experimentum nobis ſuppeditabunt eadem duo marmora, incluſa nunc recipienti. Vid. Experim. 31, *Libri de novis experimentis*, ejuſdemque defenſionem in *Tractatu contra* L I N U M. Poſtquam Celeb. Auctor profeſſus eſſet, cauſam cohæſionis marmorum in aere non aliam eſſe, quam quod inferior lapis ſuſtentaretur ab aeris, ſeu gravitate, ſeu elaterio; recte concluſit, ſi fieret ergo experimentum in occluſo recipienti, fore ut, ejecta maxima per exhauſtionem quantitate aeris & debilitato ejus elaterio, inferior lapis neceſſario delaberetur. Sed re tentata, ſpem fruſtravit eventus: nam ſuſpenſa ibidem hæc duo marmora tam firmiter cohæſere, ut nulla aeris exhauſtione inferius a ſuperiori revelli potuerit, licet ad hoc efficiendum lapidi inferiori quatuor unciarum pondus fuerit appenſum. Quo ſane experimento ætheris ſeu materiæ ſubtilis preſſio clariſſime evincitur: quid enim, aere exhauſto atque excluſo, connectet, quæſo, marmora, niſi materiæ ſubtilis, cui ſoli per poros vitri patet

patet acceſſus, ad marmora appulſio? Non ſine cauſa quidem No. II.
Exc. BOYLIUS (qui aliam, quam aeris atmoſphærici gravitatem hactenus videtur vel ignoraſſe, vel ſaltem non agnoviſſe) aliam potius commodam reſponſionem amplectendam ſibi duxit, ut ſatisfaceret phænomeno, quam ſententiam ſuam tam leviter deſerendam. Primo itaque confugit ad imperfectionem recipientis, qua fieri potuerit, ut per minimam fiſſuram in eo latitantem aer externus irrumperet: poſtmodum vero, in vindicatione ſua contra LINUM, aliam, cui præcipue inſiſtit, reſponſionem adjicit, putatque, aerem illum, qui poſt exhauſtionem neceſſario ſemper in recipiente relinquitur, licet ejus elaterium per magnam expanſionem admodum fuerit debilitatum, ſufficientem tamen adhuc fuiſſe ſuſtentando tantillo ponderi, quale eſt exiguum marmor cum 4 unciis.

Quicquid ſit de conjectura iſta Cl. Viri; illud certum eſt, per pauciſſimas emboli depreſſiones aerem mirum in modum rarefieri poſſe, ejuſque vires debilitari, præſertim ubi ſcapus amplior, recipienſque anguſtius fuerit. Imo non tantum conjecturare, ad quantum rarefactionis gradum aer ſingulis depreſſionibus reducatur, ſed & ſcientifice illud noſſe licebit, comparatis invicem ſcapi & recipientis cavitatibus: nam ſi ſcapus fuerit duplo recipiente amplior; poſt primam emboli depreſſionem, aer triplo fiet rarior, quia per ſcapum atque recipiens æqualiter ſe expandens, triplo majorem quam antea occupabit locum; poſt ſecundam emboli detruſionem, nuncuplo; poſt tertiam, 27plo. poſt quartam, 81plo. Adeo ut ſi ſupponamus, ſcapi ad recipientis cavitatem, in Antlia Boyliana, in dicta ratione dupla ſe habuiſſe; ſequeretur, poſt quartam jam emboli detruſionem aerem eouſque fuiſſe diſtentum, ut, vel ex ipſa Cl. BOYLII hypotheſi, non amplius par eſſe potuerit ſuſtentando marmori cum 4 unciarum pondere: quamvis enim hoc aggregatum, referente illo, non ſuperarit tricеſimam partem ponderis ſimilis cylindri mercurialis 29½ digitorum, imo etiamſi ne ſexageſimam partem ſuperaſſet; tale tamen fuiſſet ejus pondus, quod aer, pluſquam ſexagecuplo aere naturali rarior, ſuſtentare non potuiſſet; eo

No. II. quod, juxta Boylianam pariter atque noſtram hypotheſin, pondera ab aere ſuſtentabilia ſint in ratione reciproca graduum rarefactionis illius.

Verum, quia non conſtat de amplitudine recipientis in dicto experimento Boyliano adhibiti, nec quouſque aer ex illo exhauſtus fuerit; fruſtra ſane eſſem, ſi conjecturæ Cl. Viri plura reponerem. Medium tantum hic exponam, quo pacto idem experimentum effectui dandum ſit, ut nullus a parte aeris ſuſpicioni relinquatur locus. Aqua primum imple totum recipiens, ejuſque claude orificium, imponendo operculum cum appenſis marmoribus, illudque firmiſſime agglutinando, ne quid aeris irrepere poſſit: poſtmodum agitato embolo, exhaurito e recipiente aquam, uſque dum emergant marmora, quæ antea ſub illa delituerant; quo facto nulla, quæ marmora comprimat, in ſuprema recipientis parte, præter ſubtilem, remanebit materia. Aer enim, ſi quis inter exhauriendum ex aqua per bullulas emergit, tam exigui momenti eſt, ſi comparetur cum tota recipientis cavitate, per quam ſe expandit, ut per hanc immenſam rarefactionem non poſſit non omnem ſenſibilem vim elaſticam perdere: ut tamen hac ex parte eo tutior ſis, poteris adhibere in experimentum aquam ab aere probe repurgatam. Sed ne ullum quoque periculum ſit ab imperfectione recipientis; ſume fiſtulam altera extremitate clauſam, eamque aqua pariter impletam inverte, immergeque recipienti ante occluſum ejus orificium; tandem evacuetur maximam partem recipiens, uſque dum aqua, uti dictum, ſubſederit infra marmora; quo facto, ſi aquam in fiſtula pariter deſcendiſſe obſervabis, adeo ut ejus ſuperficies cum ſuperficie aquæ extra fiſtulam, in eodem horizontali reperiatur plano; infallibili indicio concludes, nihil irrepſiſſe aeris, quod ſuſtentare poſſet marmor; cum ſi, vel minimum irrepſiſſet, illud potiori jure aquam leviorem deberet in fiſtulam impellere. Ubi vero contigerit aliquando, ut ſuperficies liquoris in fiſtula, altius hæreat ſuperficie aquæ extra fiſtulam; continuabis tam diu exercere embolum, donec utraque ſit in eadem proxime altitudine.

Ad-

Adminiſtrato ſic rite experimento, conjicio, imo cauſæ meæ fiducia fretus audacter aſſevero, fore ut, omni licet aere manifeſte hic excluſo, marmora non ſecus cohærere pergant, atque tum, cum aere adhuc undique cincta erant, dummodo ita exquiſite ſint complanata, ut contactus eorum immediatus fiat, non in uno aut altero tantum puncto, ſed quoad ſat magnam ſuperficierum partem. Eo vehementius autem hujus experimenti ſucceſſum videre exopto, quo evidentius inde ſequuturum prævideo infallibile argumentum Gravitatis ætheris: ubi noſtra ſententia hoc inſuper, præ negativa, gaudet privilegio, quod utcunque ſors tulerit, vel ceciderit eventus, nihil erit quo aperte refelli, ſed multa quibus indubie aſtrui poterit: ſive enim ceciderint marmora, ſuſpicio erit, ea non exactiſſime fuiſſe complanata, nec proin ſeſe immediate tetigiſſe: ſin vero per momentum cohæſerint, certiſſimum habebimus preſſionis materiæ ſubtilis argumentum. Utque plene in hac ſententia confirmemur, ſuſpendamus in recipienti, loco duorum marmorum, ſimplex fruſtum metalli alicujus ponderoſi; cum enim certum nobis ſit & indubitatum, hujus metalli partes cohærere, non aliter ac marmora, vi preſſionis fluidi externi ambientis; hinc facile experiemur, an preſſio hæc proficiſcatur a ſolo aere, an ſimul etiam a materia ſubtili: nam ſi a ſolo aere, poſt unam vel alteram emboli depreſſionem, metallum in fruſta collabetur: hunc autem eventum quis expectet? No. II.

Tertium experimentum, quod crucem hactenus fixit Scriptoribus Hydroſtaticorum, & cui ex principiis noſtris lucem afferre tentabimus, nobis rurſum ſuppeditatur ab Illuſtriſſimo Boylio, in Libro ejus *de novis experimentis*, eſtque ordine decimum octavum, cujus ſumma hæc eſt: Collocavit Auctor, tempore hyemali, in quadam feneſtra, tubum in quo ad conſuetam uſque ſtationem deſcenderat mercurius, factaque deinde, per aliquot hebdomadas, quotidiana obſervatione, deprehendit argentum, (licet aliquando languido motu imitaretur aſcenſum & deſcenſum aquæ in thermoſcopio, nempe aſcendendo aliquantulum tempore frigido, & deſcendendo calidiori,) ſubinde tamen

III. Experim. de anomalia aſcenſus & deſcenſus Barometri.

Cali-

No. II. contrarium plane feciſſe, ita ut, frigidiſſima aura, notabiliter magis deſcenderet, quam alio tempore longe mitiori. Ad quod ſane experimentum non poſſunt non obmuteſcere, quicunque aeris atmoſphærici gravitatem unicam ſuſpenſionis liquorum cauſam profitentur: quid enim dicerent? eſſe forte aerem hyeme leviorem factum, hinc deſcendere mercurium: ſed quare non ſemper, aura exiſtente frigidiuſcula, deſcenderet? ſi vero aer tempore hyemali gravior & denſior ſit, oportet ut mercurium tum altius impellat in tubum: cur ergo, frigidiſſimo tempore, ſubſidit humilius? Quem nodum ipſe Cl. Boylius, cum ſolvere non poſſet, ſecare maluit, atque occultis aeris mutationibus, cum apertis non liceret, hanc varietatem aſcripſit. Notandumque, omnes jam Philoſophos aeris Gravitatem & Levitatem non ſpectare, ut qualitates dependentes ab ejus Denſitate vel Raritate; ſed ut qualitates aliis principiis adhuc incognitis ortum debentes: unde rogati, quando aer ſit graviſſimus, reſpondebunt, non præciſe tum, quando frigore maxime eſt condenſatus, ſed quando pluribus vaporibus & exhalationibus, (quarum magna ſubinde, nobis non animadvertentibus, e terra aſſurgat copia,) aer noſter abundat, quando venti ſolito fortius aera commovent, & alia id genus. Hæc vero an ita ſe habeant, necne, non inquiro; illud tantum exiſtimo, quod quamdiu ex notis philoſophari poſſumus, ad ignotas & occultas aeris mutationes non ſit recurrendum. Videntur autem talia quædam in hypotheſi noſtra occurrere veſtigia, quibus ratio manifeſta redditur irregularis iſtius aſcenſus & deſcenſus mercurii in barometro: unde, repudiatis occultis aeris alterationibus, merito noſtris tam diu acquieſcimus hac de re cogitatis, donec vel experientia ea falſitatis convincat, vel quid melius adinveniatur.

Conſiderandum itaque primo, denſitatem vel raritatem atmoſphæræ nullam, vel exiguam mutationem inducere poſſe in ejus pondus: quantum enim ponderis incrementum ei accedit hyeme per denſitatem, tantundem fere patitur decrementi ab ejus humilitate, & quanto æſtate redditur a raritate levior, tanto viciſſim, altitudine raritatem compenſante, evadit ponderoſior:

Digitized by Google

ſior: perinde uti lana, vel ſpongia, compreſſa non plus ponderat, quam eadem diſtenta & dilatata, propterea quod eadem materiæ quantitas, ibi quidem ſub minori, hic ſub majori volumine continetur. No. II.

Ut aliquid tamen largiamur; ſupponamus, atmoſphæram tantillo ponderoſiorem reddi hyeme, quam æſtate; & nobis porro in memoriam revocemus, quæ ſuperius dicta ſunt de preſſione materiæ ſubtilis, quæ diverſimode diverſis anni tèmpeſtatibus afficiatur, atque æſtate vehementius agitetur & vibretur verſus Terram, quam hyeme; conſequenter fortius tum premat ſuper argento in vaſe, atque decrementum gravitatis atmoſphæricæ aliquo modo compenſet. Quamvis autem hæc materia ſubtilis, omni tempore tubum penetrans, non minus premere debere videatur ſuper mercurium in tubo ſuſpenſum, quam ſuper reſtagnantem in vaſculo; unde fieret, ut una preſſio alteram plane tolleret, & aboleret: cogitandum tamen, illam materiam ſubtilem, quæ incumbit argento reſtagnanti, ſubinde illud nonnihil fortius ſurſum impellere in tubum, quam materia, incumbens argento in tubo, illud deorſum premit; hancque differentiam majorem eſſe tempore calidiori, quando globuli tubum ingredientes, ob vehementiſſimam ſui agitationem ad ejus latera allidunt, multumque de ſuo motu perdunt, quam frigidiori, ubi propter motum languidiorem directius per vitri poros tendunt, & intra fere ac extra æqualibus viribus mercurium premunt. En ergo duo pugnantia principia, e quibus irregularis illa barometri mutatio ortum ſuum, me judice, habet. Tempore frigidiori, mercurius in tubum aſſurgere debebit altius, propter majus atmoſphæræ pondus; idem tamen etiam debebit ſubſidere humilius, quod materia ſubtilis directius intrans tubum, minus perdat de motu ſuo, adeoque fortius mercurium premat deorſum: utrum ergo aſſurgat vel ſubſidat, hoc dependet a ſola prævalentia alterutrius preſſionis; nempe tum aſcendet mercurius, quando incrementum ponderis atmoſphærici, (quo mercurius pellitur ſurſum,) ſuperat incrementum preſſionis materiæ ſubtilis in tubo (qua premitur argentum deorſum); & viciſſim tum deſcendet,

 cum

No. II. cum incrementum prius exceditur a poſteriori; quod non niſi fit maximo ingruente frigore, ubi globuli directius, quam alio tempore tepidiori, tubum ingredientes, omnem fere ſuum motum & vim deprimendi retinent.

An eadem anomalia locum etiam habeat in Thermometro?

Sed objicis, quare in Thermoſcopio, * nunquam id obſervatur, ut tempore calidiori aſcendat liquor, frigidiori deſcendat; cum materia ſubtilis eodem modo debeat affici penetrando iſtos tubos, quo afficitur penetrando tubos barometrorum. Reſp. Imo etiam anomaliæ hæ deprehenduntur quandoque in thermometris: Hinc monet ROHOLTUS, *Tractat. Phyſica, part. prim. cap.* 23. §. 41, nos poſſe decipi, ſi ex ſola inſpectione thermometri vellemus ſemper judicare de calore aeris; poſſe enim fieri, ut accedente majori aeri gravitate, liquor impellatur in tubum altius, atque ita majus præſagiat frigus, quamvis interea idem poſſit in aere manere caloris gradus. Ita quoque mihi retulit Cl. VOLDERUS, ſibi obſervatum aliquando fuiſſe circa duo thermoſcopia, quorum unum utrinque ſigillatum erat, alterum infima ſua extremitate cum aere externo correſpondebat, quod videlicet eodem die æſtivo liquor in utroque thermoſcopio aſcenderet; notum autem eſt, ſolius thermoſcopii utrinque ſigillati genium eſſe, ut liquor in eo æſtate aſcendat, reliqui vero naturam eſſe, ut liquor in eo æſtate deprimatur. Cauſam ergo anomaliæ iſtius adjecit hanc fuiſſe, quod gravitas aeris externi ſolito fuerit major, adeoque aeri ſuperius incluſo impedimento fuerit, ne per calorem ſeſe dilatando, liquorem deprimeret. Secundum nos vero reſpondendum eſſet, ideo aſcendiſſe liquorem, quia materia ſubtilis, ſolito concitatior, non potuerit tubum penetrare, citra magnum virium ſuarum in tubo decrementum; cum vero materia ſubtilis externa, omni ſua agitatione, citra obſtaculum, liquorem in tubum intruderet, interna vero non niſi languide deprimeret, non poterat non ad aſcenſum cogi liquor.

Cæterum etiamſi nullæ obſervarentur in thermometris ejuſmodi irregularitates, id minime mirum nobis videri deberet; cum plane alia ſit cauſa aſcenſus & deſcenſus liquoris in thermometro, quam

* nimirum *Drebbeliano.*

quam mercurii in barometro: nec enim credendum eſt, quando in illo, tempore calidiori, ſpiritus vini deſcendit, id inde eſſe, quod pondus liquoris incluſi jam evaſerit majus pondere atmoſphæræ magnopere per calorem rarefactæ; cum quantumcunque rarefactus fuerit aer atmoſphæricus, ſufficiens tamen adhuc ſit, non ſolum ſuſtentando tantillo cylindro liquoris, ſed illi etiam ad ſummitatem vitri intrudendo, niſi id impediret aer incluſus reſiſtentia ſua paſſiva. Immediata ergo deſcenſus liquoris cauſa eſt, quod, rarefacto per æſtatis calorem aere externo, internus, juxta leges elaterii ſuperius ſtatuminatas, ſubinde quoque dilatari debeat, donec cum externo eandem circiter acquirat laxitatem ſeu conſiſtentiam; quod fieri nequit, niſi majorem occupando locum, liquorem deprimat: uti e converſo, condenſato hyeme aere externo, aer incluſus neceſſario quoque condenſandus eſt ad eum uſque denſitatis gradum, qui reſiſtendo par ſit externæ preſſioni; quod cum fieri nequeat, niſi minorem occupando locum, conſequens eſt, ut liquor ab aere externo ſurſum trudi debeat in locum, quem deſeruit aer incluſus, nequicquam obſtante exiguo augmento virium, quod materiæ ſubtili forte acceſſit ad deprimendum liquorem, per liberiorem in tubum ingreſſum. Adde quod quamvis differentia preſſionis materiæ ſubtilis impeditæ in tubo, & non impeditæ extra tubum, in mercurio alicujus ſit momenti; illa tamen in ſpiritu vini minus debet eſſe ſenſibilis, ob amplitudinem pororum, qua fit ut pleraque materia ſubtilis perfluat, minima ejus parte in ſuperficie liquoris premente. Quanquam autem hæ duæ rationes ſufficientes forte eſſe poſſent abolendæ differentiæ preſſionis materiæ ſubtilis, atque eximendo thermometra inde natæ irregularitati apparenti; eſt tamen tertia adhuc conſideranda circumſtantia, quæ viciſſim hanc anomaliam maximopere iterum promovere videtur, videlicet inſignis ſpiritus vini in thermometris adhiberi ſoliti levitas, reſpectu mercurii in barometris adhibiti; qua fit, ut minima variatio preſſionis materiæ ſubtilis aliam & aliam, in liquore thermometri, altitudinem debeat conſpicuam reddere; quæ interea differentia in liquore adeo ponde- No. II.

No. II. roſo barometri omnino foret inſenſibilis. Sed de his plus quam ſatis.

IV. Experim. de duobus hemiſphæriis evacuatis, firmiſſime ſibi cohærentibus.

Ut denique manifeſtum fiat, quouſque, in noſtra hypotheſi, progredi poſſimus in explicandis feliciter rerum cauſis; pro quarto & ultimo ſpecimine examinabimus celebre Experimentum Conſulis illius Magdeburgenſis de duobus Hemiſphæriis, quæ ſibi invicem impoſita, atque interjecta cera conglutinata, facili quidem negotio dirimuntur, dum aere adhuc plena ſunt; ſed, educto ex ſua cavitate aere, tanta vi ſibi invicem cohærere deprehenduntur, ut, pro varia eorundem latitudine, notabilis quantitas equorum, vel appenſorum ponderum, requiratur ad ea avellenda.

Hujus phænomeni cauſa, ut melius percipiatur ex mente Auctorum, qui de illo ſcripſere; concipiamus ſuperius hemiſphærium ex unco ſuſpenſum, atque cavitatem hemiſphæriorum primo aere vacuam; non difficulter quidem intelligemus, qua ratione inferius ſuperiori debeat firmiſſime agglutinari; quandoquidem externa ejus ſuperficies expoſita eſt toti columnæ atmoſphæricæ laterali, a qua ſurſum impellitur contra ſuperius hemiſphærium; dum interim interna ſuperficies nulla preſſione contraria afficitur, neque a columna imminente ſuperiori hemiſphærio, utpote cujus tota vis terminatur in illud hemiſphærium, ſeu in uncum illud ſuſtentant; neque ab aliqua materia intra ſphæram, quæ, educto aere, nulla eſt niſi ſubtilis. Sed ſi porro aer hemiſphæriis reſtituatur; quare adeo facile divelluntur a ſe mutuo? nunquid eandem omnino ſuſtinet preſſionem externa inferioris hemiſphærii ſuperficies, dum interior libera quoque manet a preſſione columnæ perpendicularis? Ergo dum hæc pari modo ſe habent, ut antea, evidens quidem eſſe putabimus, avulſionis facilitatem proficiſci a ſolo aere hemiſphæriis incluſo; id quod aliter fieri nequit, quam ſi concedatur, hunc aerem incluſum vim aeris externi, comprimentis hemiſphæria, æquali vi & conatu reprimere, atque inferius hemiſphærium tantundem deorſum trudere, quantum idem a columna laterali ſurſum impellitur: Huic enim conſequens eſt, hoc in rerum ſtatu, ad ſepa-

paraticnem efficiendam nihil aliud requiri, quam ut parvula ea, quæ per ceram eſt, connexionis vis & efficacia, ſuperetur vincaturve. No. II.

Veruntamen, præterquam quod non explicant, in quo conſiſtat hæc in cera connectendi vis & efficacia; planum quoque facere deberent, quomodo concipienda ſit iſta tantilli aeris incluſi vis, quæ paria facere poſſit cum gravitate & mole immenſa aeris externi; quod dum facere conantur, fateor me, qua ſum ingenii tarditate, illorum mentem vel non ſatis aſſequi, vel ſane ipſos valde obſcuros, circa hanc rem, foviſſe hactenus conceptus. Aliorum explicatio inſufficiens.

Reſpondent enim aliqui, illam vim deprimendi hemiſphærium proficiſci ab aeris incluſi elaterio, quod æquipolleat gravitati totius atmoſphæræ: Sed quid intelligunt obſecro per hoc elaterium? anne vim illam, quam habet aer incluſus, ad majus ſpatium ſeſe dilatandi, atque ita repellendi a ſe hemiſphærium? ſi ſic; quid manifeſtius, quam ſublatum iri hanc ſeparandi hemiſphæria facilitatem, non tantum evacuatis omnino hemiſphæriis, ſed ſubſtituto ſolummodo in aeris locum alio corpore, nulla tali ſeſe dilatandi vi prædito? Agedum ergo, repleantur hemiſphæria aqua, vel alio quodam liquore, quem omni elaterio deſtitutum eſſe in confeſſo eſt apud omnes: eritne qui dubitet illa, eadem adhuc prorſus facilitate, ſi non majore, avulſum iri? ego quidem nullus dubito.

Alii exiſtimant, ſatis ſeſe mentem ſuam explicuiſſe dicendo, aerem, ex arcta ſui inter hemiſphæria compreſſione, tantam nanciſci vim; quia hæc ſit naturæ lex, ut quo quid arctiori loco conſtrictum & conſtipatum eſt, eo intenſiorem & violentiorem adhibeat erumpendi & enitendi conatum. Verum, confundunt iſti perpetuo Incluſionem cum Compreſſione; quaſi vero aer propterea evadat compreſſior, quia exigua ejus moles ſphæræ huic incluſa eſt: equidem ſi major aeriarum particularum numerus ſphæræ iſti intruſus foret, quam ſolet contineri ſub æquali ſpatio extra ſphæram; tum non dubitarem, aerem incluſum compreſſum dicere; ſed quia non major aeris quantitas huic ca-

No. II. vitati ſphæricæ incluſa eſt, quam ſolet contineri ſub æquali volumine ſub dio (quod nemo, ut opinor, inficiabitur) ; nulla ratio eſt, cur hic aer incluſus externo aere compreſſior dicatur: perinde ut triginta homines in conclavi, cujus pavimenti area eſt triginta pedum quadratorum, non magis ſeſe compreſſos ſentiunt, quam ſeſe ſentirent in latiſſimo campo, in turba aliquot millenorum, quorum unuſquiſque non niſi unius pedis quadrati ſpatium occuparet. Sed etiamſi tandem concederetur, duplo, triplo plus aeris infartum eſſe ſphæræ, quam poſſit contineri in æquali ſpatio ſub dio; ſequeretur, ſi vires premendi æſtimandæ ſint e gradibus compreſſionis, vires aeris incluſi ad ſummum viribus duplæ vel triplæ molis aereæ pares eſſe poſſe; tantum abeſſet, ut tantilla quantitas immenſam atmoſphæræ molem exæquaret. Imo, ſi rem quis examinet, putaret potius, externum aerem incluſo compreſſiorem dici debere, quod ille undique ſuſtineat preſſionem totius atmoſphæræ, a qua tamen alter lateribus ſphæræ immunis redditur; ad minimum ea parte, qua contiguus eſt hemiſphærio ſuſpenſo, utpote quod in ſe terminat omnem columnæ ſibi incumbentis preſſionem.

Nonnulli denique mentem ſuam ita explicant, ut putent, non neceſſum quidem eſſe, ut aer magis ſit compreſſus intra, quam extra ſphæram; ſed ſufficere, ut æqualis utrobique ſit compreſſionis. Exiſtimant enim, proprie loquendo, nullam partem aeris agere in ſphæram, niſi quæ eam tangit proxime; hanc tamen eo agere efficacius, quo a mole incumbentis aeris validius comprimitur: unde ſequatur, ſi parvula aeris quantitas aliunde, abſque pondere incumbente, æque poſſit compreſſa reddi; atque reddi alias ſolet per hoc atmoſphæræ pondus; hunc aerem, licet in minori copia, quia tamen æque compreſſus ſupponitur per incluſionem in ſphæram, ac ſi omne totius atmoſphæræ pondus ſuſtineret, æquali vi acturum in ipſam ſphæram. Verum, perpetua involutam adhuc ſentio homonymia vocem Compreſſionis: Si enim hæc vox talem tantum in nobis formet conceptum, ut illa dici debeant æque, duplo, triplo compreſſiora, quorum æquales maſſæ, æquale, duplo, triplo minus ſpa-

ſpatium occupant, (alium autem clarum conceptum hujus vocis non habeo); tum falſiſſimum eſt, efficaciam alicujus corporis in aliud, quod immediate tangit, æſtimandam eſſe ex ſolo gradu compreſſionis illius, nulla habita ratione illius ponderis, quod ipſum adjuvat. Sume enim in manum libram ferri, ferroque ſuperimpone aliam libram plumbi: ſi ſolum ferrum, quod manum immediate ferit, in eam agere cenſendum eſſet; ſequeretur, per hanc plumbi impoſitionem jam duplo magis compreſſum iri ferrum, id eſt, ad duplo minus volumen redactum, quod manus jam duplo majorem preſſionem perſentiſcat; aut certe, ſi ferrum eandem ſervat extenſionis quantitatem, manum non majore preſſione nunc debere affici, quam afficiebatur antea, cum ſolum ferrum ei incumbebat. Nec tantum in duris, ſed & in liquidis ita concludere liceret, fore nimirum, ut pes cubicus aquæ duplo magis comprimatur per alium ſibi ſuperimpoſitum, quod jam duplo magis ponderet; vel certe, ut ambo pedes ſimul ſumti non plus ponderent uno ſolo, eo quod inferior pes per ſuperioris incumbentiam, fatentibus omnibus, ſenſibiliter non magis comprimatur; quorum tamen utrumque perabſurdum. Imo, ſi efficacia preſſionis alicujus corporis, non ex incumbente pondere æſtimanda ſit, ſed ex illius compreſſione tantum; ſequitur, ſi, loco aeris incluſi, hemiſphæria aqua impleantur (qui liquor aere multo denſior & compreſſior eſt, utpote multo majorem terreſtris materiæ copiam ſub æquali volumine complectens), hemiſphæria, a ſola aqua, longe majore violentia ſeparatum iri, quam ab aere ambiente connectuntur; qui effectus contrarius plane foret illius, qui, juxta illa quæ ſupra dicta ſunt, futurus eſſet, ſi res per elaterium conficeretur. Si vero tandem velint hi Auctores, gradus diverſos compreſſionis alicujus corporis non æſtimandos eſſe ex amplitudine majoris vel minoris ſpatii, quod ab illo occupatur; aliunde ſane æſtimari non poterunt, quam ex majori vel minori pondere illi incumbente; unde ſi quis exiſtimaret aerem, abſque ullo pondere incumbente, aliunde poſſe comprimi, ille plane contradictoria & ἀσύστατα conciperet. No. II.

Im

No. II. In hoc denique omnes deceptos eſſe animadverto, quod ſolum aerem hemiſphæriorum cavitati incluſum conſiderarint, tanquam unicam facilis divulſionis, uti ejus exhauſtionem firmæ connexionis cauſam; quam tamen non niſi ut neceſſarium ejus antecedens, ſive cauſam ſine qua non, reſpicio; exiſtimans, præcipuum utriuſque phænomeni momentum ſitum eſſe in illo, quod contingit circa hemiſphæriorum oras vel margines, quibus connexa ſibi ſunt, non circa cavitatem, qua jam ſeparata ſunt a ſe invicem.

Genuina Phænomeni cauſa evolvitur. *Fig.* 25. Ut ergo hujus experimenti genuinam cauſam diſtinctè cognoſcamus; conſiderabimus, quid in toto ejus decurſu circa hemiſphæria contingat. Sumuntur duo hemiſphæria, aere primo plena, A & B, quorum ſuperius ita imponitur inferiori, ut oris ſuis, ſeu marginibus, cera ſi vis illitis, ſibi mutuo reſpondeant; ubi, qui vel leviter animum adverterit, facile perſpiciet fieri plane non poſſe, ut ita arctè ſe excipiant, quin neceſſario magna copia aeris, latitudine limborum *a b*, circumcirca intercepta relinquatur. Quamvis enim hemiſphæria poſtea manu validiſſime comprimantur; imo etiamſi, remota manu, tota cylindri atmoſphærici C preſſio in hemiſphærium A jam ſeſe reapſe effundat; tota tamen hac preſſione nequit effici ut, pauxillo illo aeris *a b* extruſo, arctius coeant hemiſphæria: quo enim concederet hæc aeris portio? extra, vel intra ſphæram? ſed illinc ſtipata eſt alia columna atmoſphærica D, a qua non minori vi repellitur, quam extruditur a columna C; hinc vero impedita ab ipſo aere ſphæræ incluſo A & B, qui cum ſit æqualis conſiſtentiæ cum exteriori, & ſuffultus lateribus hemiſphæriorum, per reſiſtentiam ſuam paſſivam totius columnæ C preſſionem eludit, cavens hoc pacto ne, per ingreſſum hujus aeris, arctioremque hemiſphæriorum concluſionem, ad majorem quam exterior denſitatem redigi poſſit, juxta leges reſiſtentiæ paſſivæ aeris initio ſtabilitas.

Jam vero hemiſphæriorum commiſſuras cera probe ſupponamus obturatas, hemiſphæriumque ſuperius A, ſuſpenſum ex unco *c*; quid fiet? erit quidem columna lateralis E, quæ ſurſum im-

impellet hemiſphærium B; ſed portionem aeris interceptam inter juncturas *a b*, ob reſiſtentiam ejus paſſivam, non magis expellere potis erit, quam antea columna C deprimens hemiſphærium ſuperius: interea tamen cohærebunt hemiſphæria, eo quod, obſtante cera, nihil ſit quod deprimat inferius; quamvis enim aer columnæ D omni niſu ſeſe intrudere conetur per poros ceræ, nihil tamen efficiet, quamdiu iidem pori ab æquivalente preſſione columnæ E anguſtantur: interim evidens eſt, hoc in rerum ſtatu, ad avellenda hemiſphæria nihil aliud requiri, quam ut, appenſo tantillo pondere inferiori hemiſphærio, debilitetur preſſio columnæ E; hoc enim facto, columna D, quæ jam alteri E prævalet, nullo negotio dilatabit ceræ poros, ſatis alias per ſe laxos, atque ita tranſitum per eos ſibi parabit: iſta autem perrupta macerie, ſtatim acquirit communicationem cum aere intra ſphæræ commiſſuras cavitatemque latitante, cum quo, junctis viribus, in inferius hemiſphærium agit, illudque deprimit facile. Unde liquet, ejus avulſionem minime proficiſci, ut vulgo creditur, ab aere cavitati ſphæræ incluſo, in quantum per ſe ſolus ſpectatur, ſed quatenus tota atmoſphæræ mole ſtipatus eſt. No. II.

Fingamus jam, antlia applicata, evacuari e cavitate hemiſphæriorum aerem; quid fiet? illæ particulæ aeris, quæ hactenus latitarant intra eorum commiſſuras, cum, ea parte qua cavitatem ſphæræ reſpiciunt, a nulla jam ſuffultæ ſint materia, non amplius reſiſtendo erunt preſſioni columnæ E; quare iis in cavitatem compulſis (in quam inſuper vi elaterii ſui ſponte ſe expandunt, per regulam noſtram nonam) propius coire hemiſphæria, atque arctius ſibi jungi neceſſe eſt; nulla, inter eorum commiſſuras *a b*, mediante amplius particula aeris: (ut videre licet in *fig.* 26.) quod & ſenſuum teſtimonio cuivis patere poteſt; quotieſcunque e recipiente, aut alio vaſe, exhauritur aer, videmus ceram, inter partes vaſis qua ſibi committuntur, magna copia, extra oras veluti ebullire, atque partes vaſis propius coire; uti ſolent, cum duo aſſeres, interjecto corpore aliquo molli, admodum valide comprimuntur; quod manifeſtum præ- *Fig.* 26.

 bet

Digitized by Google

No. II. bet indicium, latitaſſe aliquid antea inter partium vaſis juncturas; quod earum arctiorem compreſſionem impediebat, ſiquidem columnæ aeriæ non minorem ſuper partes vaſis preſſionem exercebant antea, quam poſtmodum cum evacuari cœptum eſt. Ex-
Fig. 16. hauſto itaque aere, ſuperius hemiſphærium ex unco *c* ſuſpenſum fingamus; erit columna E, quæ ſurſum premet hemiſphærium inferius, & quia nulli alii columnæ patet acceſſus ad ſuperficies interiores hemiſphæriorum, ob immediatum eorum contactum; adeo valide ſibi conglutinabuntur, ut ad ea divellenda tantum ponderis inferiori appendendum ſit, quantum æquivaleat preſſioni columnæ comprimentis E. Experientia autem conſtat, ad ſexcentas vel ſeptingentas libras ei citra lapſum appendi poſſe, diametro hemiſphæriorum exiſtente vix octo digitorum. Cæterum, quamvis iſti ponderi ſuſtentando ſufficiens forte poſſit eſſe columna ſimilis atmoſphærica E, uti ſupputanti conſtabit; non tamen inferendum, ætheri in columna E contento nullas hic eſſe connectendi partes; ſed hoc tantum, ſuperficies limborum, ſeu marginum in hemiſphæriis, nunquam adeo exquiſite poſſe lævigari, quin in iis plurimæ hinc inde relinquantur aſperitates & cavitates, quibus fiat, ut hemiſphæria ſibi impoſita neceſſario plurimis dehiſcant rimulis *i, i, i*; per quas dum aer craſſior columnæ D irrumpere nequit, æther tamen illi permixtus facile irrepere, ætheriſque preſſionem in columna E irritam reddere poſſit. Ubi enim hæ rimulæ tolluntur, quod fiet, ſi vel ferruminentur hemiſphæria, vel hermetice claudantur, id eſt, ſi loco utriuſque hemiſphærii fiat una ſphæra cava, ſine comparatione majora ferent pondera; quod nemo, ut opinor, inficiabitur.

Ex iis demum, quæ dicta ſunt, liquet, evacuationem aeris e cavitate hemiſphæriorum non eſſe proximam cauſam connexionis eorum; eandem tamen requiri, ut antecedens neceſſarium, ad eliciendas particulas aeris ex illorum commiſſuris, inter quas latuerant; inque hoc conſiſtere præcipuum connexionis nervum: unde exiſtimo, ſi poſt exhauſtionem reintromittatur aer, ſatis valide cohæſura adhuc hemiſphæria, ſi non tanta pertinacia quanta

Digitized by Google

ta cohærerent omnino vacua, longe tamen majore, quam ſi nunquam evacuata fuiſſent; ea videlicet quæ effici poteſt a preſſione cylindri atmoſphærici excavati, cujus orbis latitudo reſpondet latitudini ſuperficiei orbicularis, qua hemiſphæria ſibi connexa ſunt: uti ſi plurima marmora complanata, quorum bina ſibi impoſita, in orbem ita diſponantur, ut locus medius concedatur aeri; non minus ſibi cohærebunt, quam ſi locus intermedius ſupponeretur omnino aere vacuus. No. II.

Antequam Diſſertationi finem imponam, placet hic, quæ inter ſcribendum incidit, ſubnectere explicationem phænomeni alicujus hydroſtatici; quod quamvis ab inſtituto noſtro alienum, ob materiæ tamen affinitatem non difficulter hic tolerabit Lector; vel eo quoque nomine ſibi gratum futurum, quod ejus ſolutio non facile occurrit apud Hydroſtaticorum Scriptores, qui de eo diſſerendi occaſionem ſubinde declinare ſolent. Eſt autem tale: *Obſervatur in Fiſtulis gracilioribus utrinque patulis, unaque ſua extremitate perpendiculariter ſub aquam demerſis, ſuperficiem aquæ intra fiſtulam ſemper nonnihil altiorem eſſe ea, quæ eſt extra fiſtulam; deprehenditurque, hanc altitudinum differentiam cum fiſtulæ gracilitate augeri. Quæritur, quæ ſit hujus rei ratio?* Nob. ROHOLTUS *Phyſic. Part. prim. cap.* 22. § 85, conjicit, aeris particulas in tubis gracilioribus difficulter ſeſe hinc inde convolvere & commovere (*détourner*), impeditaſque non ſat exercere poſſe virium ad deprimendum ſufficienter liquorem. Sed commodum eſt, ita ex quolibet quidlibet ſtruere, aeriſque motum & agitationem pro lubitu intendere & remittere. Nuper, quo arctiori incarceratus erat aer loco, eo majores, juxta hunc Philoſophum, exercere conveniebat vires ad detrudendum mercurium; nunc vero, dum gracili fiſtulæ incluſus eſt, ſibi ipſe debet eſſe impedimento; ibi in anguſtia vires aſſumpſit, hic propter anguſtiam vires perdit, languet, torpet: ubinam vero nunc aeris elater? an ærugine confectus? quidni domicilii ſui anguſtia pertæſus intenſiùs nunc furit, humiliuſque deprimit aquam, ut nuper mercurium? Cæterum non opus etiam eſt, ut aeris particulæ in tubis gracilioribus libertatem habeant ſeſe con-

Quare in fiſtulis gracilioribus liquor internus ſemper ſit nonnihil altior externo?

Digitized by Google

No. II. volvendi in quaſcunque partes, ad deprimendam ſolummodo aquam; ſufficit ut motum ſuum gravitatis, qui fit ſecundum lineam perpendicularem, ſervent illibatum, is autem motus in tubis etiam gracillimis non impeditur: Nulla ergo ROHOLTI reſponſio. Quæ aliorum ſit de hoc Phænomeno ſententia, neſcio; meam pando.

Certum autem eſſe puto, rationem, cur ſumma ſuperficies cujusque liquoris ad horizontem parallela ſit, nullibi altior, nullibi depreſſior, hanc eſſe, quod in omnibus ſuis partibus a pondere incumbentis atmoſphæræ prematur æqualiter; utpote quæ ſupponitur eſſe ſubſtantiæ homogeneæ quoad gravitatem, omnibuſque dictæ ſuperficiei partibus æquali ubique altitudine incumbere. Quotieſcunque ergo contingit, ut una partium ſuperficiei altera exiſtat altior, humiliorve, ſtatim cogitabimus, earum preſſioni mutationem aliquam inductam eſſe; illamque majus ſibi incumbens habere pondus, quæ depreſſior exiſtit reliquis; minore vero preſſione affici, quæ cæteris altior extat. Unde, quoniam ſubinde animadverti ſolet, liquorem intra fiſtulam nonnihil altiorem eſſe liquore extra fiſtulam; concludemus, alterutro in loco mutationem contigiſſe, preſſionemque vel extra tubum adauctam, vel intra illum imminutam fuiſſe. Quoniam vero ſuperficies aquæ externæ non videtur ullum preſſionis augmentum pati poſſe ab interpoſitione fiſtulæ; relinquitur, ut omnis mutatio contingat circa eam ſuperficiei partem, quæ fiſtulæ lateribus incluſa, partem preſſionis amittere, atque onere allevata ſuo altius aſſurgere debet; quod ſic concipio. Sit *a b c d*, Fiſtula cylindrica immerſa ſuperficiei aquæ ſtagnantis *e d*, cui inſiſtit alius præterea cylindrus ſimilis atmoſphæricus *e f g h*. Fingamus autem, utriuſque diametrum in ſe recipere certum numerum particularum aeriarum, v. g. ſeptem, ita ut ſeptem tales particulæ (quas ſphæricas nunc eſſe ſuppono) in directum poſitæ exhauriant cylindrorum latitudinem; notabimuſque, rariſſimum eſſe contingens, ſi globuli iſti ita ſint diſpoſiti, ut extremi præciſe radant tubi latera, atque omnes ſeptem ſine obſtaculo in ejus cavitatem admittantur (uti fit in ſerie globulorum *i l*;) plerunque enim,

Fig. 27.

Digitized by Google

enim, imo ſemper continget, ut ſummi cylindrorum margines utrinque primum & octavum excipientes, non niſi ſex intermediis tranſitum præbeant. Quod & intelligendum de quavis alia aſſignabili ſerie globulorum, quorum perpetuo bini extremi in cylindrorum margines incidere ſubſumi debent. Hinc etenim fiet, ut totus ille globulorum orbis, qui circumferentiam ſupremi orificii fiſtulæ occupat, cum tota globulorum catena perpendiculariter ſibi imminente *a m*, *b n*, omnem ſuam preſſionem terminet in ſummitate laterum fiſtulæ, neque poſſit pertingere ad liquorem ſubjectum *q r*, qui proinde ea tantum preſſione afficitur, quæ proficiſci poteſt a cylindro aerio, diametrum *o p*, ſex duntaxat globulorum, obtinente. Aliter vero ſe res habet in cylindro aerio *e f g h*, extra fiſtulam aſſumto in alia quadam parte ſuperficiei ſtagnantis aquæ; ubi extremi globuli ab ejus lateribus *g e*, & *h f*, quæ pure ſunt imaginaria, non impediuntur, quin libere defluant, & tota ſua latitudine ſuper liquore ſubjecto gravitent. Cui conſequens eſt, ut liquor extra fiſtulam tanto majore preſſione afficiatur, quam qui intra fiſtulæ latera concluſus eſt, quanto numerus globulorum illi incumbentium excedit numerum globulorum ſuper hoc prementium: unde liquor, ab externa preſſione prævalente, ſemper nonnihil altius impellendus in tubum. Notabimus autem, hanc differentiam inſenſibilem eſſe debere in tubis laxioris diametri, propter extremam exiguitatem particularum aeriarum; & contra, quo ſtrictiores ſunt fiſtulæ, eo notabiliorem debere conſpici diverſitatem; eo quod portio aeris a marginibus tubi impedita, ad reliquam, cujus preſſio ſuper liquorem non impeditur, majorem habet rationem in anguſtioribus, quam in latioribus; id quod docebit calculus. Sit igitur primo cylindrus aerius externus, ſive fiſtula diametri (ut ita dicam) *ſeptemglobularis*, cylindruſque internus, dempto uno, qui a vitri margine intercipitur, æſtimetur *ſex globulorum* in diametro: capiet proinde illius baſis $38\frac{1}{2}$ hujus $28\frac{2}{7}$ globulos quadratos (ſit venia dicto;) totidem enim, non plures, recipiunt ob ſpatia triangularia inter globulos neceſſario relinquenda, quot reciperent quadrata, quorum ſingula latera No. II.

No. II. tera æqualia forent globuli diametro. Erit itaque differentia utriuſque $10\frac{3}{14}$ globulorum, quos baſis cylindri externi plus recipit, quam baſis interni; adeo ut ille pluſquam quarta ſui parte fortius premat iſto: Sit vero jam cylindrus externus, uti & fiſtula, duplo latior, nempe 14 globulorum; internus autem, uno globulo in diametro ſua diminutus, 13 globulorum: illius baſis area erit 154, hujus $132\frac{11}{14}$ differentia $21\frac{3}{14}$ globul. quadr. adeo ut preſſio illius (quæ æſtimatur ex numero globulorum) vix octava ſui parte fortior nunc ſit preſſione hujus: unde patet, quod jam dictum fuit, differentiam preſſionis, adeoque & altitudinis liquorum intra & extra fiſtulam, longe minorem debere eſſe in fiſtulis latioribus, majorem autem in ſtrictioribus. Taceo nunc, quod ex eodem fundamento ſequatur, cæteris paribus, liquores leviores gravioribus altius debere attolli, ea proportione, quæ eſt inter ſpecificas ipſorum levitates. Cur vero argenti vivi ſuperficies, in fiſtulis etiam gracillimis, non tantum non elevatior ſit, ſed & depreſſior ſuperficie argenti extra fiſtulam, mox diſquirendi dabitur occaſio.

Vana ſpes motus perpetui.

Prætereundum hic non eſt, multos fuiſſe, qui aquæ aſcenſum in gracilioribus fiſtulis obſervantes, ſeſe vana ſpe lactarunt motus alicujus perpetui, ob non comprehenſam veram phænomeni rationem. Videtur equidem, prima fronte, ſi fiſtula gracilior altitudinis tantillo minoris, quam eſt illa, ad quam aqua in fiſtula aſſurgere poſſet, aquæ ſit immerſa; tum aquam in illa aſcenſuram uſque ad ſummum fiſtulæ orificium, ibique ſeſe exoneraturam in vaſculum, indeque reaſcenſuram in fiſtulam, & ſic motum perpetuum producturam. Sed qui phænomeni noſtri cauſam perceperit, facile hujus conjecturæ vanitatem deteget: obſervabit enim, poſtquam aqua ad ſummum fiſtulæ orificium pervenerit, illam offendere globulos aerios margini fiſtulæ circumfuſos, a quorum antea preſſione immunis erat; atque ita nunc toti latitudini cylindri aerii expoſitam, tantundem ab illo repelli, & ab exitu e fiſtula coerceri debere, quantum a cylindro externo ſurſum impellitur, atque ad aſcenſum ſollicitatur.

Diffi-

Difficultas interim non contemnenda ſeſe offert circa allegatam phænomeni noſtri rationem: Quamvis enim, ſic cogitaret aliquis, cylindrus aerius *g h e f*, ſecundum totam ſui latitudinem, ſubjectum liquorem *e f* premat; iſta tamen preſſio non tota derivatur in tubum, ſed quoad partem infringitur; quia globuli aquei *s t* non poterunt ita accurate in tubum defluere, quin extremi illorum, *s* & *t*, marginibus tubi implicentur, eorumque proinde preſſio ob eandem rationem inefficax reddatur, ob quam globulorum aeriorum, *a* & *b*, preſſio intercepta fuit; quodque, de una ſerie globulorum aqueorum *s t* hic dictum, pariter de omnibus aliis intelligendum. Videtur ergo, cum preſſio deſuper, & preſſio ex imo ſurſum, parte aliqua incruſtatæ & debilitatæ ſint, nullam adhuc rationem eſſe, cur hæc illi prævaleat, liquoremque altius in tubum impellat. No. II. *Fig. 27.*

Cui objectioni ut ſatisfiat; ratio tantum adinvenienda eſt, quare preſſio globulorum aqueorum ad tubum allidentium nullum debeat pati detrimentum. Ratio autem iſta poterit eſſe, quod particulæ aqueæ ſint volubiliores, flexibiliores, atque magis lubricæ ipſis particulis aeris; quo fiat, ut difficillime marginibus tubi detineantur, ſed prompte intra ejus latera gliſcant, atque ita totam tubi cavitatem preſſione ſua adimpleant: ſi contra aeris particulæ ſupponantur rigidiores, quæ non ita facile gliſcere poſſint juxta fiſtulæ latera; evidens eſt, illarum ſummo tubi margini ſemel implicatarum preſſionem perpetuo manere inefficacem. Poſſem quoque adjicere, particulas aqueas eſſe ſubtiliores & exiliores ipſis particulis aeriis; hinc fieri, ut quamvis duæ extremæ particulæ aqueæ, *s* & *t*, a margine fiſtulæ intercipiantur, non tanta preſſionis ex imo ſurſum profectæ pars inefficax reddatur, quantam perdit preſſio deſuper, propter impeditas groſſiores aeris particulas. Id vero neminem offendat, quod corpuſcula aquea pono volubiliora & exiliora ipſis corpuſculis aeriis; poſtquam Cl. BOYLIUS variis demonſtravit experimentis, aquam penetrare poros & foraminula, ipſi aeri omnino impervia, vid. *Experim. 36. Libri de nov. experim.*

In-

No. II. Cur viciſſim in fiſtulis gracilioribus ſuperficies mercurii ſemper depreſſior ſit ſuperficie ejus extra fiſtulam?

Intellectis iſtis, facile divinare licet rationem, quare ſuperficies mercurii in fiſtulis gracilioribus ſit viciſſim ſemper depreſſior ſuperficie ejus extra fiſtulas: nam cum contrariorum ſit contraria ratio, ſufficit ſupponere, particulas mercurii eſſe groſſiores particulis aeris; hinc enim fiet, ut extremis, *s* & *t*, tubi margini implicatis, plus patiatur decrementi preſſio mercurii ex imo ſurſum, quam preſſio aeris deſuper; unde ab hac prævalente neceſſario detrudetur humilius.

Fig. 28. Cur ſuperficies aquæ in fiſtulis ſit concava, mercurii convexa?

Evidens quoque ratio eſt, quare ſuperficies aquæ, in fiſtula *q r*, debeat eſſe concava, id eſt, depreſſior in medio, altior circa latera; nimirum quia medium tantum hujus ſuperficiei preſſioni aeris deſuper exponitur, dum latera ob impeditas in margine tubi aeris particulas ab hac preſſione liberantur. Ob ſimilem rationem ſuperficies mercurii, in fiſtula *q r*, debebit eſſe convexa, id eſt, altior in medio, depreſſior circa latera; quoniam corpuſculorum mercurialium *s t* ſola intermedia libere mercurium ſurſum premere poſſunt; dum extrema quælibet, a tubi margine impedita, nullam in illum preſſionem exercent: hinc ſuperficies *q r* neceſſario tumidior erit in medio, quam circa latera. Non neſcio, alias adhuc dari ſolere horum phænomenorum rationes; ſed fieri poteſt, ut una alteram non tam deſtruat, quam adjuvet.

Fig. 27. *Fig.* 28.

Artificium menſurandi particulas aeris.

Magis autem forſan quis mirabitur, ſi artificium hic detexero, quo pacto particularum aeriarum magnitudo, juxta hypotheſin noſtram, inveſtigari poſſit, ex cognita ſola fiſtulæ latitudine, & altitudine incluſæ aquæ, qua ſupra aquam ſtagnantem eminet. Reperti ſunt, qui muſcis pedicas injecerunt, qui acari nervos fibraſve in numerato habere putant; ſed elephantes ſunt hæc animalcula, ſi comparentur cum corpuſculis, quorum menſuram, quis credat, ad decempedam hic exhibere tentabimus. Si ſuppono in calculo omnimodam flexibilitatem particularum aquæ, qua preſſio earum a margine inferioris orificii fiſtulæ nullatenus impediatur: ſi ſuppono item, a margine ſuperioris orificii in quibuslibet fiſtulis unius præciſe globuli aerii preſſionem intercipi; fateor hæc incerta eſſe, ſed talia, quæ a mente humana

Digitized by Google

humana ſciri prorſus nequeunt; unde ſufficit in hac incertitudine progredi, quouſque licet, cæteraque cogitandum: No. II.

Eſſe aliquid prodire tenus, ſi non datur ultra.

Ponamus itaque pro *diametro fiſtulæ* . . . . a.

Pro *altitudine aquæ in fiſtula, ſupra ſuperficiem aquæ reſtagnantis in vaſe* . . . . b.

Pro *altitudine ſimilis cylindri aquei, æquiponderantis toti cylindro atmoſphærico* . . . . c.

Pro *incognita diametro globuli aerii* . . . . x.

Erit, demto uno globulo, *diameter cylindri prementis ſuper liquorem in fiſtula* . . . . $a - x$.

Area totius orificii fiſtulæ . . . . $\frac{11}{14}aa$.

Area baſis cylindri prementis in fiſtula. $\frac{11}{14}aa - \frac{22}{14}ax + \frac{11}{14}xx$

Hac ab illa ſubducta, remanet pro *orbiculari illa portione aeris, cujus preſſio per appulſum ad tubi latera inefficax reddita fuit* . . . . $\frac{22}{14}ax - \frac{11}{14}xx$

Jam, cum cylindrus totus atmoſphæricus, reſpondens cylindro fiſtulæ, ad cylindrum illum orbicularem atmoſphæricum inefficacem (pro quibus, quia ſunt ejuſdem altitudinis, eorum tantum baſes aſſumemus) eandem debet habere rationem, quam habet cylindrus totus aqueus, ad parvum cylindrum aquæ in fiſtula ſuſpenſum, (pro quibus, ob ſimilitudinem itidem, tantum altitudines aſſumimus) ut attendenti conſtabit, erit, Ut $\frac{11}{14}aa$ ad $\frac{22}{14}ax - \frac{11}{14}xx$ ita c ad b: & proportione reducta ad æqualitatem, $\frac{11}{14}aab = \frac{22}{14}axc - \frac{11}{14}xxc$, ſive $aab = 2axc - xxc$, translatiſque in alteram partem ſub contrario ſigno quantitatibus xxc, & aab; erit $xxc = 2axc - aab$: factaque diviſione per c, fiet $xx = 2ax - aab : c$ & $x = a - \surd(aa - aab : c)$ Unde regula talis:

Si parallelepipedum contentum ſub quadrato diametri fiſtulæ, & altitudine aquæ in illa, dividatur per altitudinem integri cylindri aquei; quotienſque ſubtrahatur a quadrato diametri fiſtulæ; reſidui vero latus quadratum ab ipſa diametro fiſtulæ: indigitabit reliquum diametrum globuli unius aerii.

Digitized by Google

No. II. Magnitudo particulæ aeriæ.

Quare ſi pollice diviſo in 100000 partes, ſeu ſcrupulos, orificium fiſtulæ in diametro ſupponatur continere octavam pollicis partem, id eſt, 12500 ſcrupulos; altitudo vero cylindri aquei in illa ſuſpenſi deprehenſa fuerit dimidii pollicis, ſeu 50000 ſcrupul. altitudo vero integri cylindri aquei ſit 33 pedum, i. e. pollicum 396, aut numero rotundo 400, ſive ſcrupulorum 40000000, reperietur globuli aerei diameter quam proxime 8 ſcrupulorum, adeo ut conſtituat $\frac{1}{12500}$ partem unius digiti. Non omittendum mihi autem eſt, in calculo ſupponi, globulos immediate ſe tangere; ſed quia veroſimile eſt, particulas aerias omnes eſſe a ſe invicem diſcretas, interſperſa magna adhuc inter illas copia materiæ ſubtilis; hinc credendum eſt, repertam illam magnitudinem non tam metiri diametrum unius globuli, quam vero diſtantiam a centro unius globuli ad centrum globuli proximi, in qua diſtantia etiam materia ſubtilior comprehenſa; unde ipſæ aeris particulæ aſſignata diſtantia longe adhuc minores concipiendæ: quantæ autem præciſe ſint, cognoſcemus, ſi rationem quantitatis aeris ad quantitatem materiæ ſubtilis compertam habeamus; recordor autem, nos illam jam in ſuperioribus, occaſione data, detexiſſe, deprehendiſſeque, inter duo quævis corpuſcula aeria quatuor æquales materiæ ſubtilis portiones eſſe interjectas; unde, hac ratione, globulus aerius aſſignata magnitudine quinquies evadet minor, conſtituetque non niſi $\frac{1}{62500}$ pollicis unius partem.

Supra pag. 95.

Velim quoque obſervari, etiamſi particulæ aeriæ alterius forte ſupponantur figuræ, hac ſuppoſitione nihil detractum iri noſtro calculo: ſi concipiantur enim per modum exiguorum cylindrorum, qui axiculis ſuis ad perpendiculum erectis ad fiſtulam appellant (qualis cylindrus depictus in *fig.* 27, lit. *u*,); tum quod modo dictum de globulis, nunc intelligendum tantum erit de craſſitie cylindri, ſeu de diſtantia inter axiculos duorum proximorum cylindrorum. Et ſi cylindri iſti quacunque inclinatione, imo tranſverſis etiam axiculis fiſtulæ occurrant, (ut in *fig.* 29. & 30), ſalvum tamen manebit ex hypotheſi noſtra phænomenum, nempe aquam altius impulſum iri in ſtrictioribus quam latioribus fiſtulis; eo quod multo majorem

Fig. 27.

Fig. 29. & 30.

ta-

talium cylindrorum numerum reſpectivè ab illarum, quam harum lateribus intercipi neceſſe eſt. Repræſentent enim circuli duo A, & B, ſuprema orificia fiſtularum inæqualis diametri; applicentur in utroque circumcirca iſti cylindri tranſverſis ſuis axiculis *a b*, ita ut repræſentent chordas arcuum, quæ determinabunt limites, quouſque cylindri aerii impune premere poſſunt; illorum enim tantum preſſio efficax eſſe poteſt, qui intra figuram polygonam circulo mediantibus chordis inſcriptam includuntur, dum illi, qui circuli ſegmentis intercepti ſunt, lateribus fiſtularum incumbunt, atque inutiles redduntur: horum autem numerus longe major eſt in ſtrictiore, quam ampliore fiſtula; quia multo majora ſegmenta abſcinduntur in minori circulo per quaſcunque chordas, quam per æquales chordas in majori; quod vel ex oculari figurarum inſpectione abſque ulteriori calculo pateſcit. **No. II.**

Recapitulatio. Atque iſta ſunt, quæ impræſentiarum de inſtituto noſtro dicta ſufficiant: Examinavimus primo varias attractionis ſpecies; eas per pulſionem explicando, notavimus, in attractione baculi, connexionem partium illius non ſufficienter explicari per uncinulos, vel quietem, ſed recurrendum eſſe neceſſario ad preſſionem alicujus materiæ externæ ambientis baculum; hinc parallelismum inſtituimus inter cohæſionem particularum duri corporis, & ſuſpenſionem liquorum in tubis, gravitatem aeris utriuſque cauſam aſſerentes. Qua occaſione, in prolixam excurrimus digreſſionem, exponendo quæ ſit natura & cauſa gravitatis, quid aeris elaterium, quid ejus item reſiſtentia paſſiva, atque utriuſque leges ſtatuminando, per quas experimentorum aeris gravitatem apparenter impugnantium rationes reddere conati fuimus. Cum vero obſervaremus, aerem atmoſphæricum non ſufficiens habere pondus ad connectendas ſeu ſuſtentandas partes longiſſimarum catenarum; exinde in cogitationem hanc incidimus, ætherem quoque ipſum ſua præditum eſſe gravitate; quod paradoxum porro ex natura ipſius gravitatis fluere, atque per deſcenſum aquæ in occluſo recipiente manifeſte demonſtrari monuimus. Stabilita ſic ætheris gravitate, plures enodavimus quæſtiones;

X 2 pau-

N°. II. pauciſque regulis novæ cujuſdam & abſolutioris Mechanicæ fundamenta jecimus; tandemque fecimus periculum, hac noſtra methodo & hypotheſi, ſolvendi maxime inſignia experimenta, quorum rationes hactenus non uſque adeo in propatulo fuerunt.

Atque hanc Ætheris ſive Gravitatem, ſive Preſſionem, ſive arctam Compactionem aut Conſtipationem mavis, qua omni vacuo excluſo partes ejus intime ſibi junctæ hærent, incumbunt, & incumbendo premunt, exiſtimo, non tantum Mechanicæ legibus optime convenire, ſed & cum mirabili hujus Univerſi ſtructura, neceſſario plane nexu, illigatam eſſe; ſine qua ſi eſſet mundus, ſolidiſſima quæque corpora diſſipata conſpicerentur, brachia nobis deciderent ex humeris, manus a brachiis; digiti a manibus, articuli e digitis &c. omniaque denique corpora ſcopæ forent, ut loquuntur, diſſolutæ.

Si in Experimentis hinc inde a me examinatis aliquando ſuppoſitiones feci, vel dubitanter loquutus ſum; ſciat Lector Benevolus, ea ab aliis accepta, nec mihi ipſi tentata eſſe, qui ſatis doleo, quod alienis tantum hic cernere cogor oculis, dum peregrinanti, nec locus, nec occaſio, nec vires illa propriis ſubjiciendi oculis ſuppetunt. Si in ratiocinationum, qua uſus ſum, ſerie, præter ſpem meam, hallucinationem deprehendat; rogatur enixe, ut paralogiſmos, vel ore, vel ſcripto oſtendat, & meliora erudiri cupientem inſtruere non dedignetur, nec invidus ſibi ſoli ſapiat. Inveniet me non præfractum, non contumacem; ſed docilem, ſed ingenuum, ſed gratum. Veritatem in Antiquis & Modernis veneror; nullius authoritate moveor; errores aliorum modeſte indicandi licentiam mihi ſumo, quia ita mecum agi deſidero. Hæc ſola veræ ſapientiæ via eſt, ad quam ſectandam, ad quam ſcrutandam homines facti ſumus.

IN Syſtemate meo Cometarum nuper impreſſo, annexa fuere ad calcem duo Problemata: Animadverto autem, in priori nonnullos offendiſſe, quod in ejus conſtructione ſuppoſuerim Tri-

Digitized by Google

Triſectionem anguli; & quod pro datis & quæſitis, angulos, non lineas rectas, contra morem Analyſtarum, aſſumſerim; quare ut me explicem, ſequentia hic adjungere neceſſum duxi: *I°*. Si ſuppoſui triſectionem arcus, nihil ſuppoſui, cujus conſtructio non ſit inventa, ſi non per lineas rectas & circulos, ſaltem per ſectiones conicas; qualis, omnium conſenſu, non minus geometrica cenſenda, quam illa quæ fit per lineas ſimpliciores. *II°*. Etiamſi non eſſet inventa, maneret tamen ſua demonſtrationi veritas & evidentia; alias e numero demonſtrationum rejicienda quoque eſſet illa, quæ probat, rectangulum ſub ſemidiametro & ſemiperipheria æquale eſſe circulo; quod tale rectangulum conſtrui nequeat: ſic quæ ARCHIMEDES demonſtravit de tangente ſpiralis, & in univerſum pleræque illæ, quibus de curvis proprietates demonſtrantur, e demonſtrationum cenſu eſſent arcendæ; quia talia ſupponunt, quæ conſtrui nequeunt. Itaque *III°*. in demonſtrationibus, non conſtructionis, ſed ratiocinii ἀκρίβεια, & unius ex altero evidens deductio ſpectanda; & ſi quando in problematis conſtructione occurrat aliquid factu impoſſibile, illud ad minimum per modum theorematis enunciari & demonſtrari tuto poterit. *IV°*. Quod pro quantitatibus, tum notis, tum ignotis, angulos, non lineas rectas, aſſumſerim; id inde factum, quia integrum eſſe duxi, viam quamlibet eligere, qua in quæſiti cognitionem compendioſiſſime devenitur; id quod hic præſtitum: nam cognitis, in triangulo *mci*, latere *ci*, & angulis *c*, & *i*; non poteſt non dari *mi*, ejuſque punctum *m*. Ratio autem, cur Geometræ in ſolvendis problematis lineas rectas, quam angulos, in uſum adhibere maluerint, eſt quod perſuaſi fuerint, angulos non poſſe pro æquationis tenore in quaſcunque partes geometrice dividi inſtar linearum rectarum; unde illorum conſtructio redderetur impoſſibilis: nam alias ſi in problemate ſolvendo præſcirem fore, ut inciderem in biſectionem vel quadriſectionem anguli; qualis tum foret neceſſitas, ut per lineas rectas rem conficerem, ubi idem longe commodius per angulos obtineri poteſt? cum ergo angulos, noſtro ſeculo, non tantum bifariam & quadrifariam,

No. II.

Vide Fig. 4. *Tab. II.* No. II.

 ſed

No. II. ſed & trifariam, imo quintufariam ſecare didicerimus, idque conſtructione vere geometrica; nullam video neceſſitatem, quæ nos in reſolutione problematum perpetuo ad lineas rectas aſtringat. VZ. Sed ut ſine ulterioribus ambagibus rem totam adaperiam, non me latere poterat, in tribus illis problematis, quæ Auctor loco ibi citato proponit, arcus triſectionem & inventionem duarum continue proportionalium inter duas datas involvi; nullum tamen alium in finem rem per angulos hic expedire malui, quam ut, per inventam æquationem, quod Auctor diſſimulavit tacite in apricum producerem; ſignificaremque quæ ſit hujus problematis cum triſectione anguli affinitas; & quod nemo illius conſtructionem per circulos & lineas rectas unquam feliciter expedire poſſit, quin eadem opera triſectionem anguli invenerit, quamvis forte ipſe primo neſciat, ſibi hujus inventionis laudem deberi. Nam ſi trifariam dividendus eſſet arcus *h g*, ita id conſtrueretur: Ducta diametro *g c*, biſecetur arcus *h c*, in *o*; ductaque diametro *o e*, trajiciatur per illam (ducendo non niſi rectas lineas & circulos, ſi poſſibile ſit) recta *c r*, ita ut pars *r m* ſit æqualis radio: dico, rectam *c r* abſcindere *h r*, tertiam partem arcus *h g*: cujus demonſtratio per eadem veſtigia, ſed retrogrado ordine, incedit.

Alterum Problema fuit Aſtronomicum, cujus analyſin, quæ ob anguſtiam ſpatii illinc reſecanda erat, hic ſubnectere conſultum duximus:

Inſpecto ſchemate ibi depicto *Fig. 5. Tab. II.* inque illo Triangulis *a b c*, & *c d e*, ponamus

Pro *Sinu Toto* . . . . *a*.
Pro *Sinu* a b, ſeu *altitudinis Solis* . . . . *b*.
Pro *Sinu* c d, ſeu *elapſi temporis a momento obſervationis ad occaſum Solis*. . . . . *c*.
Pro *Sinu* a c, ſeu *declinationis Solis quæſitæ* . . . . . *x*.

Et quoniam, ſubtracto quadrato ſinus cujuſcunque a quadrato ſinus totius, relinquitur quadratum ſinus complementi, qui eſt ad ipſum ſinum rectum arcus, ut radius ad illius arcus tangentem, invenietur hoc beneficio

Tan.

Tangens a c, ſeu *declinationis Solis* . . . $xa : \sqrt{(aa - xx)}$ No. II.

Jam vero in Triangulo abc, Ut ſinus declinationis Solis x, eſt ad ſin. tot. a, ita ſinus altitudinis Solis b, eſt ad ſinum ang. acb, ſeu elevationis poli, qui proinde erit . . . . . . $ab : x$.

Iterum in altero Triangulo cde, Ut ſinus elapſi temporis a momento obſervationis ad occaſum Solis c, eſt ad ſin. tot. a, ita tangens declinationis Solis $xa : \sqrt{(aa - xx)}$ eſt ad tangentem ang. dce, ſeu complem. elev. poli, quæ proinde erit . . . . $xaa : \sqrt{(aacc - xxcc)}$

Nunc, ut ad æquationem deveniamus; obſervandum, nos reperiſſe diverſis operationibus *Sinum Elevationis poli*, & *Tangentem complementi ejus*; quare ſupereſt tantum, ut unum quoque eliciatur ex altero, hoc fine, ut alterutra harum quantitatum duobus modis poſſit exprimi, in quo conſiſtit æquatio: Itaque cum ſinus elevationis poli repertus ſit $ab : x$, invenietur ſinus complementi ejus $\sqrt{(aa - aabb : xx)}$: tangens vero complementi $\sqrt{(aaxx - aabb :)}\, b$. Quæ cum, alia modo via, reperta fuerit $xaa : \sqrt{(aacc - xxcc)}$; habebimus igitur æquationem inter $xaa : \sqrt{(aacc - xxcc)}$ & $\sqrt{(aaxx - aabb)} : b$; ad quam reducendam fiat multiplicatio per crucem, ut ſit $aabx = (\sqrt{a^4ccxx - aaccx^4 - a^4bbcc + aabbccxx})$; deinde ad tollendum ſignum radicale, multiplicetur utrumque membrum æquationis quadrate, eritque

$$a^4bbxx = a^4ccxx - aaccx^4 - a^4bbcc + aabbccxx.$$

Quantitates $aaccx^4$ & a^4bbxx, tranſponantur ſub contrario ſigno, ut quantitas incognita plurimarum dimenſionum ab una parte extet ſola, fietque

$$aaccx^4 = a^4ccxx + aabbccxx - a^4bbxx - a^4bbcc;$$

Facta denique utrinque diviſione per $aacc$, habebitur

$x^4 = aaxx + bbxx - aabbxx : cc - aabb$. Ubi patet, etiamſi quantitas ignota ad quatuor dimenſiones aſcendat, problema tamen tantummodo eſſe planum, propter defectum cubi quantitatis incognitæ, adeoque ſolvendum eſſe more problematum duarum tantum dimenſionum. Unde Radix æquationis erit

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{2}bb - \tfrac{1}{2}aabb : cc + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 + \tfrac{1}{4}b^4 - \tfrac{1}{2}aabb - \tfrac{1}{2}a^4bb : cc - \tfrac{1}{2}aab^4 : cc^4 + \tfrac{1}{4}a^4b^4 : c^4)}}.$$

Ut

No. II. Ut tandem calculum applicemus ad ſpeciale exemplum nobis poſitum, aſſumamus Sinum totum a, partium . 10000
eritque Sinus altitudinis Solis b, quæ ponitur 12 graduum 2079
Sinus elapſi temporis inter obſervationem & Solis occaſum, c, horæ ſcil. unius, & 12 minut. quæ in æquatore gradus faciunt 18 3090

Quibus poſitis calculo deprehendemus porro pro

$\frac{1}{4}a^4$	=	2500000000000000
$\frac{1}{4}b^4$	=	46704418155520
$\frac{1}{4}a^4b^4 : c^4$	=	512299637176985
ſumma ſign. +.	=	3016970078992505
$\frac{1}{2}aabb$	=	216112050000000
$\frac{1}{2}a^4bb : cc$	=	2263403713827882
$\frac{1}{2}aab^4 : cc$	=	97829763314592
ſumma ſign. —	=	2577345527142474

Summa ſignorum minus ſubtracta a ſumma ſignorum plus relinquit 439624551850031
cujus Rad. quadr. 20967226

Iterum $\frac{1}{2}aa$	=	50000000
$\frac{1}{2}bb$	=	2161120
ſumma.	=	52161120
ſubtr. $aabb : cc$	=	22634037
reſid.	=	29527083

Nunc quoniam Æquatio noſtra duas admittit radices, huic reſiduo radix nuper extracta ſemel addatur, ſemel ab illo ſubtrahatur.

Add.	Subtr.
29527083	29527083
20967226	20967226
50494309	8559857
Radix :	Radix :
x $7105\frac{13284}{14211}$	$x = 2925\frac{4232}{5851}$

In-

Invenimus ergo pro x, ſeu Sinu declinationis Solis quæſitæ, duos numeros 7105, & 2925: illius arcus in canone reperitur 45 gr. 16½ min. hujus 17 gr. 1 min. ubi notandum, priorem radicem ex accidenti falſam eſſe, eo quod maxima Solis declinatio 23½ gradus nunquam excedat; ſola igitur altera (quæ eſt 17 gr. 1 min.) quæſtioni ſatisfacit: hac autem data, uti & altitudine Solis in Triang. abc, vulgari Trigonometria innoteſcet angulus elevationis poli acb; ſi fiat, Ut ſinus declinat. Solis (17 gr. 1 min.) ad ſinum totum, ita ſinus altitudinis Solis (12 grad.) ad ſinum elevat. poli, quæ reperietur 45 gr. 16½ min. Ubi notatu dignum, elevationem poli & declinationem Solis reciproce ſe hic habere; adeo ut ad ſatisfaciendum problemati gemino modo reſponderi poſſet, nimirum obſervationem inſtitutam eſſe, vel ſub latitudine 45 gr. 16½ min. Sole declinationem obtinente 17 gr. 1 min. vel etiam ſub latitudine 17 gr. 1 min. Solis declinatione viciſſim exiſtente 45 gr. 16½ min. ſi modo poſſibile eſſet, ut unquam tanta exiſteret. No. II.

Digitized by Google

Digitized by Google

No. III.

NOUVELLE MACHINE
POUR RESPIRER SOUS L'EAU,
Tirée du Livre récemment venu d'Italie, De Motu Animalium, *compoſé par*
J. ALPHONSE BORELLI.

Journal des Sçavans 1682. 18e. Journal, du 6. Juill. p. 215. Edit. de Paris, & pag. 255. Edit. de Holl.

L'Art de reſpirer ſous l'eau étant d'une néceſſité abſolue pour découvrir ce que la nature produit de ſingulier dans le ſein de la Mer, & pour retirer de ſes abimes ce que les écueils & les tempêtes y ont fait perdre, c'eſt donner au Public un ſecours très conſidérable que de trouver une invention ſi importante. Pluſieurs perſonnes y ont travaillé; & nous avons expliqué au long, dans deux de nos Journaux de l'Année 1678, l'invention de la cloche, dont on s'eſt ſouvent ſervi pour ce ſujet avec ſuccès. Celle-ci eſt encore mieux imaginée, & des perſonnes intelligentes qui l'ont examinée mûrement, prétendent même qu'il ſera bien difficile d'en trouver à l'avenir de plus parfaite. C'eſt au ſavant Jean Alphonse Borelli que nous ſommes redevables de cette découverte. Comme ſon érudition & ſes Ecrits lui ont acquis un rang glorieux entre les Savans, ce ſeroit dérober quelque choſe de ſa gloire, de lui refuſer dans le Journal l'Eloge qu'il mérite; mais comme la deſcription de cette machine nous méne aſſez loin dans celui-ci, nous le réſervons pour un de nos premiers Journaux.

Cette Machine conſiſte en un vaiſſeau de cuivre en forme de veſſie de deux piés de diamétre, comme B M H C, dans lequel un homme puiſſe loger ſa tête A par l'ouverture B C. Ce vaiſſeau doit être affermi ſur les épaules par un collier de cuivre B C, ſur lequel on lie, par les tours redoublés d'une petite corde bien tiſſue, le collet d'un Pantalon de peau impénétrable à l'eau & à l'air, qui puiſſe couvrir exactement toutes les parties du corps qui ne ſont pas couvertes par le vaiſ-

No. III. ſeau, ou caſque, qui ne ſert qu'à la tête. Un homme ainſi revêtu; étant plongé dans l'eau, y pourra vivre pendant pluſieurs heures, reſpirant l'air contenu dans la veſſie B M H C, pourvû qu'il ait ſoin de le renouveller de tems en tems, comme nous dirons enſuite.

Il faut avoir pour cette machine un tuyau de cuivre I Q K L, long de trois piés, & courbé, avec une bourſe de cuir capable de tenir près de chopine, telle que le point K la repréſente, attachée à la partie baſſe de la courbure. Sa matiére doit avoir les mêmes conditions que le Pantalon, & une communication avec le tuyau, de telle maniére que l'air, y étant une fois entré, en puiſſe librement ſortir pour ſe rendre dans le caſque par L. Il faut que l'autre bout I ſoit aſſez long, & recourbé, pour le pouvoir mettre à la bouche, afin de rejetter par là l'air qu'on a attiré dans ſes poulmons par le nez. Cet air, paſſant par ce tuyau, perd la chaleur qu'il avoit acquiſe dans les poulmons, & ſe refroidit enſuite; parce que pour reſpirer, l'on attire l'air par le nez, & qu'en le rejettant par la bouche dans le tuyau I Q K L, il arrive que le même air n'entre que long-tems après dans les poulmons, & ſe refroidiſſant en paſſant par le tuyau, les vapeurs qui le ſuivent ſe condenſent, & ſe réſolvent en liqueur dans la bourſe K; & ainſi cet air rentre dans le caſque, non ſeulement refroidi, mais encore purifié de l'infection qu'il avoit contractée dans les poulmons.

Pour pouvoir renouveller l'air contenu dans le caſque, il faut faire le tuyau O M P, recourbé en P, avec un robinet en O, comme l'on en voit un en N: Ce tuyau doit être ſoudé en M au Caſque, ainſi qu'à l'égard du tuyau N. Celui qui ſe ſervira de cette invention, ſentant que l'air du caſque a beſoin d'être renouvellé, s'élévera au deſſus de l'eau, juſques à ce que le caſque ſe trouve dans l'air. Pour lors ouvrant les deux robinets O & N, il attirera l'air autant qu'il lui ſera poſſible, & le rejettera par le tuyau P M O; & dans ce moment l'air, par une circulation naturelle, entrera par N, pour occuper dans le caſque la place que l'autre air vient de quitter. Ces fortes reſpirations étant réitérées, & l'air reſpiré étant pouſſé hors de ce caſque par le tuyau P M O, (dont la partie recourbée P doit être miſe à la bouche à chaque fois) dans très peu de tems cet air ſe trouvera propre à la reſpiration: après quoi l'on fermera les robinets O, N, pour retourner au fond de l'eau, ce qui ſe fait de la maniére ſuivante.

Il faut avoir une ſeringue de cuivre Z R S, dont la concavité ſoit égale à un pié cubique. Elle doit être entiérement fermée par le bout S, & ouverte en Z R, afin que le piſton T V y puiſſe entrer librement. A l'axe du piſton doit être le cric V X, dont le pignon Z, avec ſa manivelle Y, ſoit à l'extrémité de la ſeringue, qu'on attachera au ceinturon D, de la maniére qu'on porte les épées. La longueur & le diamétre de la ſe-

ſeringue peuvent être à diſcrétion, pourvû que ſa concavité puiſſe contenir un pié cubique d'air. No. III.

Toutes choſes étant ainſi préparées; ſuppoſons qu'un homme avec tout cet appareil ait moins de peſanteur ſpécifique qu'un égal volume d'eau, de telle maniére que, lorsqu'il s'y eſt plongé, on voye encore au dehors une partie du caſque M G; ſi on lui ajoute quelques piéces de plomb, on pourra rendre ſa peſantur ſpécifique égale à celle d'un ſemblable volume d'eau, & faire enſorte que l'on ne voie que le ſommet du caſque G. Pour lors cet homme tournant la Manivelle Y, d'Y en Z, le Piſton T V comprimera l'air Ω, & s'approchera du fond S. Dans ce moment l'eau venant à occuper ſa place, le volume de la ſeringue & du piſton ſera moindre qu'auparavant; c'eſt pourquoi toute la maſſe de l'homme & de ſes machines, occupera un moindre eſpace dans l'eau qu'au commencement, ce qui augmentera la peſanteur ſpécifique. Que ſi l'on continue à tourner la manivelle Y, le piſton T s'aprochera encore plus de S, & l'homme devenant plus peſant en eſpéce que l'eau, il deſcendra lentement au fond; d'où il remontera à la ſurface de l'eau, en tirant le piſton T vers Z R, par des raiſons contraires.

Mais il faut ſe ſouvenir de laiſſer une ouverture au devant du caſque pour y mettre une forte glace, dont les bords ſeront collés avec de la chaux vive & du blanc d'œuf, pour empêcher que l'eau n'entre par les jointures, & par ce moyen on pourra voir clair au fond & au milieu de l'eau. Cette glace eſt exprimée dans la figure en P 123. On pourroit auſſi ajouter aux piés des nageoires comme celles des canards, afin de ſe conduire plus aiſément, comme on peut le voir dans la figure.

Digitized by Google

N°. IV.

EXAMEN DE LA MACHINE POUR RESPIRER SOUS L'EAU, DU Sr. BORELLI,

Propoſée dans le Journal du 6. Juillet de l'année derniére 1682, tiré d'une Lettre du Sr. Bernoulli *écrite de* Bâle *à l'Auteur du Journal, & conçue à peu près en ces termes.*

Journal des Sçavans. 1683. 21. Journal du 16. Aouſt. p. 250. Ed. de Paris & p. 278. Ed. de Holl. *Acta Erud. Lipſ.* 1683. Dec. p. 553.

Les perſonnes intelligentes qui ont jugé qu'il étoit difficile de trouver une machine plus parfaite, ne l'ont pas examinée aſſez mûrement. En voici les raiſons.'

L'homme qui plonge dans l'eau armé d'un caſque, comme il paroit dans la figure, étant en cet état à une profondeur un peu conſidérable ſous l'eau, y ſouffriroit la plus grande torture du monde, à cauſe que ſa tête ne ſoutiendroit que la preſſion élaſtique de l'air naturel renfermé dans le caſque, pendant que le reſte de ſon corps ſeroit expoſé non ſeulement à une preſſion équivalente de l'Atmoſphére, mais auſſi à la peſanteur d'une colomne d'eau d'autant plus haute que la profondeur ſeroit plus grande; ce qui feroit ſortir avec violence le ſang de tout le corps par les narines, les oreilles, & la bouche, & enfler horriblement la tête beaucoup plus que la chair ne s'enfle dans les ventouſes. Je ſoutiens même, que lors que le caſque ſera à la profondeur de 31 piés, laquelle eſt requiſe pour faire que la preſſion du corps ſoit double de celle de la tête, la douleur ſera tout à fait inſuportable.

Mais ce n'eſt pas ſeulement la douleur qui fait ici toute la peine: il y a encore d'autres tourmens, C'eſt que pour faire enfoncer l'homme avec un caſque de deux piés de diamétre, il fau-

faudroit lui attacher un poids de 200 livres : Et bien qu'en cet état l'homme demeureroit ſuſpendu entre deux eaux, n'ayant ni plus ni moins de peſanteur ſpécifique qu'un égal volume d'eau ; ſi eſt-ce que le caſque tendroit toûjours à monter avec une force de 200 livres, pendant que le plomb, qui fait le contrepoids, le traineroit vers le fond avec pareille force : ce qui lui déchireroit les membres & l'étrangleroit miſérablement. Il eſt vrai qu'on pourroit prévenir en partie cet inconvénient, en attachant le contrepoids au caſque même, au lieu de l'attacher à l'homme. Mais on ne ſauroit l'éviter tout à fait, puiſque l'homme ſeroit toûjours trainé en bas ou en haut, à meſure qu'il avanceroit ou retireroit le piſton de la ſeringue. No. IV.

Ce n'eſt pas encore le ſeul embarras. Je ne parle pas de celui que cauſeroit une ſeringue, dont la concavité contient un pié cubique ; car ſa longueur étant de deux piés, le diamétre aura 9½ pouces ; & celle-là étant priſe de 3 piés, la largeur aura près de 8 pouces. Je laiſſe à juger ſi le piſton ſauroit boucher une ſeringue d'une telle largeur auſſi exactement qu'il le faut pour empêcher l'eau d'y entrer peu à peu. Je dis encore que ſi la bourſe K étoit de cuir, comme la fait Mr. BORELLI, la preſſion prédominante de dehors ne trouvant pas aſſez de réſiſtance au dedans de la bourſe, en chaſſeroit tout l'air dans le caſque, & le comprimeroit de telle ſorte qu'il n'y pourroit plus paſſer le moindre atome d'air.

Mais je veux qu'on puiſſe remédier à tous ces défauts, la principale difficulté que j'ai touchée, & qui concerne l'inégalité des preſſions dedans & dehors le caſque, demeure toûjours. Car enfin je puis faire en général un tel raiſonnement. Pour reſpirer ſous l'eau, il faut, ou que tout le corps humain ſoit enfermé dans un vaſe & environné d'air, ou qu'une partie ſoit dedans & l'autre dehors. Tout le corps n'y peut pas être renfermé, à cauſe qu'il ſeroit inutile au fond de la mer, ne pouvant obtenir la fin pour laquelle on s'y plonge : ſi donc il y a une partie du corps qui ſoit hors du vaſe, il faudra néceſſairement, pour éviter la douleur qui accompagne l'inégale preſſion,

ou

No. IV. ou qu'il y ait quelque choſe qui défende cette partie, qui ſort hors du vaſe, du ſurplus de la preſſion de dehors (par exemple une eſpéce de cuiraſſe qui couvre entiérement cette partie, & qui non ſeulement ait aſſez de dureté pour réſiſter au poids de l'eau, malgré ſa figure irréguliére, mais qui ſoit en même tems aſſez ſouple & flexible, pour donner moyen par là au moins de manier le piſton à travers, & de travailler au fond de la mer; ce qui eſt une choſe abſolument impoſſible): ou bien il faudra qu'on s'aviſe d'un moyen de renforcer la preſſion de dedans, ce qui ne ſe peut faire que par la condenſation de l'air, en faiſant faire le vaſe, au lieu de cuivre, d'un cuir mol & tendre, qui puiſſe ſe ſerrer, & céder à la preſſion du dehors; car par ce moyen l'air qui eſt dedans, ſe réduiſant peu à peu en un moindre volume, prendroit d'autant plus de force que le vaſe deſcendroit plus bas. Le mal en ceci eſt que la ſeringue ne pourroit plus ſervir alors, pour hauſſer & baiſſer ſelon le beſoin, à cauſe que le vaſe, aiant perdu par ſa contraction, à la profondeur d'environ 30 piés, plus de deux piés cubiques de ſon volume, le plongeur auroit beau retirer le piſton juſqu'au ſommet de la ſeringue, & regagner un pié; il demeureroit entiérement enſeveli ſous l'eau.

Outre tout cela, cette machine n'auroit point d'avantage par deſſus la cloche, étant aſſujettie à la même difficulté qui accompagne la reſpiration dans l'air condenſé; & d'ailleurs on peut adapter le tuyau L, & la bourſe K, auſſi bien à la cloche qu'à ce caſque: de ſorte qu'après tout, il faut toûjours en revenir là. D'où je conclus que la machine ne vaut abſolument rien.

N°. V.

Digitized by Google

N°. V.

MACHINE
POUR ELEVER LES EAUX;
De l'Invention de Mr. L. C. D. O.

CEtte Machine, qui eſt une eſpéce de Balance, comme l'on voit aſſez par la figure, eſt fort ſimple. L'on peut par ſon moyen élever l'eau à quelque hauteur que ce puiſſe être, parce que l'on n'aura toûjours que le ſeul poids de l'eau à élever, & cela ſe fera toûjours ſans frottement.

Journal des Sçavan 1682. 9e Journal du 30. Mars p. 107. Ed. de Paris, p. 131. Edit. de Holl.

A, eſt une piéce de charpente élevée perpendiculairement, de 20 piés de hauteur, ou plus, ſelon le beſoin; elle eſt retennë dans cet état, & fortifiée par des arboutans qu'on ne repréſente pas ici, parce que cela n'eſt pas de la machine. Dans les points D D d'enhaut & d'enbas ſont ſuſpendus en équilibre deux balanciers, où les chaſſis B, & C, ſont attachés en égale diſtance des points D, D, pour les tenir en équilibre. Aux chaſſis B & C, ſont attachés de deux en deux piés des baquets en forme d'échelle, comme il paroit aux nombres 1, 2, 3, 4, &c. A chaque extrémité des bras du balancier ſupérieur, qui ſont plus longs que ceux d'enbas, eſt attachée une tringle de fer en charniére, avec laquelle, en faiſant baiſſer alternativement de chaque côté les bras du balancier, on fait jouer toute la machine de cette ſorte.

Lorſqu'en tirant la tringle E, l'on fait baiſſer le chaſſis B, le baquet inférieur puiſe dans l'eau, & ſe remplit. Tirant enſuite la tringle F, on fait baiſſer le chaſſis C, & hauſſer le chaſſis B; & en même tems que le baquet 20 puiſe dans l'eau, & s'en remplit, le baquet 1 ſe décharge de la ſienne dans le baquet 19, & ainſi conſécutivement; de ſorte que ſi en abaiſſant la verge E, l'on fait remplir d'eau pour la deuxiéme fois le baquet 1, pour lors le chaſſis C s'élevant fait verſer le baquet 20 dans le baquet 2, & le bacquet 19 dans le baquet 3. Enfin tous les baquets de la machine s'empliſſent de cette ſorte, ſi bien qu'il y a toûjours un chaſſis qui puiſe par le bas, & un autre qui jette par enhaut l'eau d'un de ces baquets dans le réſervoir.

Les 4 petites croix qui ſe voient au bas de la figure ſont les limites du

No. V. du mouvement alternatif qu'ont les chaſſis, & en marquent toute l'étendue, c'eſt-à-dire que les balanciers ne lévent jamais plus haut, & ne baiſſent pas plus bas, que d'une croix à l'autre; & c'eſt dans ce moument que les deux chaſſis s'aprochent, les baquets ſe rempliſſent, ou ſe déchargent de leur eau, les uns dans les autres.

Comme la nouveauté de cette machine, & les grands avantages qu'on prétend que le Public en peut recevoir, lui ont attiré ſelon la coutume, avec l'applaudiſſement de pluſieurs perſonnes, la cenſure de quelques Critiques; l'Auteur a écrit un petit Livre, dans lequel il prouve qu'elle a toutes les perfections eſſentielles pour l'élévation des eaux; comme la ſolidité, la durée, l'avantage de fournir une grande abondance d'eau, & de l'élever à quelle hauteur on veut; enfin une extrême facilité, puis qu'elle n'a que le ſeul poids de l'eau à élever, ſans danger d'aucun frottement étranger: ce qui manque dans les pompes, chaînes ſans fin, chapelets, & autres inventions uſitées.

No. VI.

DOUTES DU Sr. BERNOULLI, SUR LA MACHINE HYDRAULIQUE,

Dont il a été parlé dans le IX. Journal de l'année derniére.

Journal des Sçavan. 1683. 22 Journal du 29 Nov. p. 311 Ed. de Paris & pag. 360. Ed. de Hol.

LA ſituation des baquets, dont cette Machine eſt compoſée, fait le principal doute de cet Auteur: car s'ils doivent être attachés à angles droits, & immobiles à l'égard des chaſſis B & C, il ne voit pas qu'ils ſe puiſſent décharger les uns dans les autres; ſoit que leurs côtés fuſſent tous d'une même hauteur, ſoit que ceux qui ſont tournés vers la piéce de charpente DD,

Digitized by Google

D, D, fuſſent plus bas que les autres: puiſqu'en ce dernier cas, les baquets 1, & 20, ſe déchargeroient en l'air, avant que les balanciers fuſſent derechef de niveau; au lieu que dans le premier, ces baquets ne ſe déchargeroient point du tout, ayant toûjours leurs ſurfaces d'enhaut horizontales. No. VI.

Outre cela la facilité d'élever l'eau de cette maniére, ne lui paroit pas ſi grande, que l'on pourroit penſer; puiſque tous les baquets d'un côté ſont remplis, pendant que tous ceux de l'autre ſont vuides, & qu'il y a toûjours beaucoup de frottement aux axes D, D.

Google

Digitized by Google

N°. VII.

CENTUM
POSITIONUM PHILOSOPHICARUM
CENTO,

Quem

Ad diem XV Januarii M. DC. LXXXIV.

Speciminis loco excutiendum

offert

JACOBUS BERNOULLI, L. A. M.

Editum primo

BASILEÆ

1684.

Digitized by Google

Digitized by Google

CENTUM
POSITIONUM PHILOSOPHICARUM
CENTO.

THESES LOGICÆ.

I.

QUOD figura, ſitus, motus eſt corpori, illud Ideæ ſunt animæ. No. VII.

II.

Et ut corpus non poteſt ſe determinare ad certam figuram, niſi occaſione alterius corporis; ita nec mens ſponte in ſe excitat ideas; ſed eæ in mente ſucceſſive eliciuntur objectu corporum (ſaltem ideæ rerum corporalium).

III.

Atque hactenus nihil eſt in intellectu, quod non prius fuerit in ſenſu.

IV. Cum

Digitized by Google

No. VII.

IV.

Cum autem Univerſalia a parte rei neque exiſtant, neque ſenſus feriant, ſed ſola ſingularia; ſequitur mentem primario percipere ſingularia.

V.

Objectum ſingulare corporeum ita perceptum vocatur *Imago*; ipſa perceptio *Imaginatio*.

VI.

Hæc autem imago eo diſtinctior eſt, quo pauciores in objecto partes, ſeu reſpectus, ſeorſim intueor; adeoque punctum imaginor diſtinctiſſime, lineam diſtinctius ſuperficie, hanc corpore, lineam rectam circulari, triangulum polygono, circulum parabola, &c. Quo vero magis compoſita eſt idea alicujus rei, id eſt, quo plures includit reſpectus, eo confuſius & difficilius rem imaginor; donec multitudine rerum comprehendendarum ita obruatur imaginatio, ut vacillet primo, tandem omnino labet. Sic octogonum, octaedrum difficulter, chiliogonum, icoſaedrum nullo modo imaginari poſſumus.

VII.

Univerſalia non imaginamur immediate: non enim imaginor figuram planam, rectilineam, triangulum, iſopleuron; ſed iſopleuron, cujus latus tot vel tot pedum &c.

VIII.

Cum Univerſalia apprehendere putamus conceptu puro; vel ſola eorum nomina concipimus, vel ſingularia imaginamur, abſtrahendo.

IX.

Item ſingularium valde compoſitorum, vel nuda nomina concipimus, vel imaginamur eorum partem, multiplicando.

X.

Conceptus ergo Univerſalium eſt imaginatio cum abſtractione: Singularium compoſitorum, imaginatio cum multiplicatione.

XI. De-

Digitized by Google

X I.

Demonſtrationes affectionum fiunt tantum circa ſingularia, ſed redduntur univerſales, in quantum mens abſtrahit ab illo, quod ſpecificat, vel individuat objectum.

X I I.

Quo quid magis compoſitum eſt, eo minus habet extenſionis.

X I I I.

Itur, ſtatur &c. ſunt themata complexa.

X I V.

Si ab idea alicujus objecti, id, per quod in ultimo ſuo eſſe conſtituitur, abſtraho; quod reliquum eſt, dicitur prioris ideæ *Genus*; quod abſtractum eſt, *Differentia*: ſi quæ attributa alia deprehenduntur neceſſario nexu cum differentia cohærere, illa vocantur *Propria*; reliqua quæ non neceſſario cohærent, *Accidentia*.

X V.

Ergo Propria ſecundi, & quarti modi hujus tantum loci ſunt; reliqua pertinent ad Accidentia.

X V I.

Exemplo res illuſtrabitur: *Circulus* per æqualitatem radiorum in eſſe ſuo completo conſtituitur; quare hæc æqualitas eſt ejus *differentia*: qua abſtracta, remanet pro *genere* Figura plana curvilinea: quod vero ordinatim applicata ſit media proportionalis inter diametri ſegmenta, eſt proprium quarti modi: quod quadrata ordinatim applicatarum ſint in ratione rectangulorum ſub ſegmentis diametri contentorum, eſt proprium ſecundi modi; cum & competat Ellipſi.

X V I I.

Homo non eſt ſpecies ſpecialiſſima; nec circuli omnes ſunt ejuſdem ſpeciei.

X V I I I.

Cum mens, in re confuſius concepta, diſtincte conſiderat id, quod commune habet cum aliis, & id, per quod ab iiſdem diſcrepat, definit rem.

No. VII.

XIX.

Si rei diſtinctè conceptæ nomen imponit, dicitur *Nomenclatio*; ſi nomini ſignificationem tribuit, eſt *Definitio nominis*.

X X.

In omni Definitione nominis, genus ſubintelligitur, & quod expreſſum eſt, meram continet differentiam: plerumque enim toto genere differunt Definitum & Definitio.

XXI.

Omnis Definitio rei fit per genus ſummum, & differentias ſubalternas.

XXII.

Ad Propoſitionem univerſalem parum refert, ſive ſubjectum ad multa, ſive ad pauca ſe extendat; modo de omnibus ſub ſe contentis ſumatur: Hinc ſingularis habetur pro univerſali, quia eo ipſo quo ſubjectum ſingulare eſt, ſumitur in tota ſua latitudine.

XXIII.

Univerſalitas propoſitionum eſt, vel *metaphyſica*; eaque vel abſolute talis, ut, *Omnis homo vivit*, vel cum exceptione, ut, *Omnis homo eſt bipes*; quia, præter naturæ curſum, dari poteſt homo quadrupes: vel *moralis*, ut, *Omnes quæ ſua ſunt quærunt*; quia plerique hoc faciunt. Quædam propoſitiones ſunt *univerſales generice* tantum, cum ſubjectum diſtribuitur duntaxat in genera ſingulorum; ut; *Omne animal fuit in Arca Noe*, &c. Quædam ſunt *univerſales reſtrictive*, catenus ſaltem, quatenus ſubjectum reſtrictum eſt per partem attributi, ut, *Omnes* (ſc. qui vivificabuntur) *in Chriſto vivificabuntur*, I. Cor. XV. 22. Utrobique ſufficere poteſt *univerſalitas quædam moralis*, ut ibi: *Chriſtus in ſe ſuſcepit omnes languores*, id eſt, non præciſe ſingula, ſed præcipua morborum genera: hic: *Helvetii ſunt boni milites*, ſenſus eſt, Helvetii qui ſunt milites, plerunque ſunt boni milites, &c.

XXIV.

Propoſitiones indefinitæ, ſive in materia neceſſaria, ſive contingente, reſpondent univerſalibus. In materia enim contingente, propoſitio eſt, vel moraliter univerſalis, ut; *Matres amant liberos ſuos*, vel metaphyſice univerſalis; ſed falſa, ut, *Homines ſunt nigri*, *corvi albi*, &c.

XXV. Ne-

Digitized by Google

XXV.

Nomina collectiva in ſubjecto faciunt propoſitionem ſingularem.

XXVI.

Præter propoſitiones compoſitas, in quibus plura ſunt ſubjecta, vel attributa, aliæ dantur enunciationes *complexa*, quæ proprie unum tantum habent ſubjectum & prædicatum, ſed quorum alterutrum, vel utrumque, eſt terminus complexus cui aliæ propoſitiones includuntur, quas vocamus *incidentes*.

XXVII.

Inter has, & principales, hæc differentia: quod hæ primario intendantur, illæ ut propoſitiones jam antea factæ, ſed conceptæ ut ſimplices ideæ.

XXVIII.

Si additiones, quæ terminum faciunt complexum, reſtrictiones ſunt; nolim inde facere propoſitionem incidentem; ſed ſaltem quando ſunt explicationes: cum enim reſtringunt ſubjectum, non poſſunt de illo, qua tali, vere prædicari.

XXIX.

Non omnes enunciationes copulativæ ſunt affirmativæ, nec omnes disjunctivæ negativæ.

XXX.

Quæritur quodnam ſit ſubjectum in his & ſimilibus propoſitionibus? *Non dantur ubique homines albi, corvi nigri, Leones, Rhinocerotes*, &c.

XXXI.

Tres propoſitiones in Syllogiſmo, quoad quantitatem & qualitatem, non niſi decies variare poſſunt; quod ſic demonſtratur. Combinandi ars docet, quatuor vocalium A, E, I, O, ternas, ſexagies quater diſponi poſſe diverſimode: vel enim ſingulæ ponuntur ter, unde exurgunt 4 primæ mutationes, A A A. &c: vel ſingulæ bis, cum una reliquarum; id eſt, cum præter illam quæ bis ponitur, tres ſint, illarum autem quæ bis poni poſſunt, ſint quatuor, poterunt omnes quatuor, ter quater, id eſt, duodecies diverſimode jungi; cumque tertia vocali bis repetitæ ita poſſit adjungi, ut vel ultimum, vel medium, vel primum loca obti-

No. VII. neat, ut : AAE. AEA. EAA. &c. prodibunt in univerſum ter duodecim, id eſt, 36 diverſi diſponendi modi: vel denique ſingulæ ſemel tantum accipiuntur una cum binis reliquarum, quo pacto non niſi quater combinari queunt, nempe AEI, AEO, AIO, EIO, ſed in ſingulis harum combinationum vocales ſexies locum mutare poſſunt, veluti in prima, AEI, AIE, EAI, EIA, IAE, IEA; adeoque in omnibus 4 combinationibus vicies quater: qui modi, cum prioribus 4, & 36 juncti producunt ſummam 64. (*Vid. ſeq. Tabellam.*)

			41. *AEI* —	
			42. *aie* *	
			43. *eai* —	
	5. *AAE* *	23. *IIA* +	44. *eia* —	
	6. *aea* —	24. *iai*	45. *iae* *	
	7. *eaa* —	25. *aii*	46. *iea* —	
	8. *AAI*	26. *IIE* +	47. *AEO* (	
	9. *aia* —	27. *iei* —	48. *aoe* —	1. *AAA*
	10. *iaa* —	28. *eii* —	49. *eao*	2. *AAI*
	11. *AAO* *	29. *IIO* +	50. *eoa* +	3. *EAE*
1. *AAA*	12. *aoa* —	30. *ioi* +	51. *oae* —	4. *AEE*
2. *EEE* +	13. *oae* —	31. *oii* +	52. *oea* —	5. *IAI*
3. *III* +	14. *EEA* +	32. *OOA* +	53. *AIO* *	6. *A I*
4. *OOO* +	15. *eae*	33. *oao*	54. *aoi* —	7. *OAO*
	16. *aee*	34. *aoo*	55. *iao* *	8. *AOIO*
	17. *EEI* +	35. *OOE* +	56. *ioa* +	9. *EAO*
	18. *eie* —	36. *oeo* +	57. *oai* —	10. *EIO*
	19. *iee* —	37. *eoo* +	58. *oia* *	
	20. *EEO* +	38. *OOI* +	59. *EIO*	
	21. *eoe* +	39. *oio* +	60. *eoi* +	
	22. *oee* +	40. *ioo* +	61. *ieo* §	
			62. *ioe* +	
			63. *oei* +	
			64. *oie* +	

XXXII. Ho-

XXXII.

No. VII.

Horum modorum excluduntur 28, hoc ſigno ⊹ notati, per quintam & ſextam legem generalem ſyllog. *Ex duabus negantibus vel particularibus nihil concluditur* : 6, hoc ſigno ✻ conſpicui, quod *ex duabus affirmantibus non poſſit concludi negative :* 18, tranſverſa virgula inſigniti, per 7^{am}. legem generalem ſyllogiſmorum, *Concluſio debet ſequi partem debiliorem :* Unus, videlicet I E O, ſigno ʃ affectus, propterea quod, *concluſione exiſtente negata, major nunquam poteſt eſſe particularis affirmans.* Unus denique nempe A E O, hoc charactere (conſpicuus, ideo *quia A, E, ſemper concludere poſſunt generaliter.* Summa ergo modorum inutilium eſt 54, qua ſubſtracta de 64, remanent pro utilibus non niſi 10. Q E D. (*Vid. columnam 5 Tabellæ.*)

XXXIII.

Horum decem modorum quintus & ſeptimus e prima figura excluduntur, per primam legem ſpecialem; quartus & octavus per ſecundam; ſecundus & nonus per hanc legem generalem, quod minor terminus ſemper eſt in concluſione, ſicut in præmiſſis: Reſtant ergo hi ſoli quatuor, A A A, E A E, A I I, E I O. E ſecunda figura exulant iterum quintus & ſeptimus per primam legem ſpecialem; primus, ſecundus, & ſextus, per ſecundam legem ſpecialem; nonus, ob candem rationem, ob quam excluditur e prima: Remanent igitur ſoli hi quatuor EAE, AEE, AOO, EIO. E tertia rejiciuntur quartus & octavus per primam legem ſpecialem; primus, & tertius per ſecundam legem ſpecialem; unde relinquuntur ſoli iſti ſex, AAI, IAI, AII, OAO, EAO EIO, Q. E. D.

XXXIV.

Modi indirecti primæ figuræ in *Fapeſmo, Friſeſmo*, ſunt quartæ figuræ in *Feſpamo & Freſiſon.*

Digitized by Google

No. VII.

THESES ORATORIÆ.

XXXV.

Si Rhetorica ab Oratoria ſeparanda, quidni & Logica docens ab utente, & Matheſis abſtracta a concreta? pertinet enim Matheſis abſtracta non minus ad Philoſophiam Organicam, ac Rhetorica & Logica docens.

XXXVI.

Profeſſor Oratoriæ Orator eſſe nequit.

XXXVII.

Hæc definitio Oratoris; *Orator eſt vir bonus dicendi peritus*; ſimilis eſt huic, *Sutor eſt vir bonus, calceamenta conficiendi peritus.*

XXXVIII.

Mallem quoque Rhetorem & Oratorem diſtinguere, ut Sutorem theoreticum & practicum, qua ut Medicum Theoreticum & Practicum.

XXXIX.

Non datur perfectus Orator.

XL.

Ad perfectum enim Oratorem requiritur ut omnis eruditionis ἐγκυκλοπαιδεῖαν poſſideat.

XLI.

Quia objectum illius eſt τὸ ἕκαστον.

XLII.

Ut defectui tamen cognitionis humanæ quodammodo ſuccurrerent, excogitarunt methodum inveniendi argumenta ad diſſerendum de quavis re, per *locos communes*, de quibus agitur in parte Logicæ, dicta Topica.

XLIII.

Qua de methodo, utut ſua non deſtituatur utilitate, ſcite quidam

Digitized by Google

dam dixit, artem eſſe diſſerendi abſque judicio de rebus, quas ignoramus. No. VII.

XLIV.

Miniſtri Verbi Dei ſunt Oratores ſacri.

XLV.

Plura dantur, quam tria cauſarum genera.

XLVI.

Plus ad encomium perſonæ conferet, ſi loco humili, Parentibus obſcuris natam eſſe dicas.

XLVII.

Tropus nunquam eſt in copula.

XLVIII.

Omnis enunciatio impropria, etſi videatur ſimplex, eſt complexa.

XLIX.

Id præcipue curet Orator, ut perſpicue dicat; qui ſecus enim faciunt, non perſuadere, ſed admirationi eſſe Auditoribus cupiunt.

L.

Importuni blateronis, non eloquentis, characterem prodit, qui quid dicat parum curat, dummodo copioſe & ornate dicat; optime enim AUGUSTINUS, *Nullo modo mihi ſonat diſerte quod dicitur inepte.*

LI.

Memoria potior eſt Rhetoricæ pars, quam Inventio, & Pronunciatio.

LII.

Dantur plura, quam quinque Troporum genera.

THE

No. VII.

THESES MISCELLANEÆ.

L I I I.

Quibuſdam rebus nomina etiam *φυσεῖ* indita ſunt.

L I V.

Multa tibi habeo dicere, Latiniſſime dicitur.

L V.

In voce *lebendig* media correpta eſt, quamvis in iſtis *beſtändig*, *verſtändig*, *inWendig*, *ausWendig*, *unbändig &c.* producatur.

L V I.

Quod Gallorum proſodia quantitates negligat, id imperfectionis illius eſt argumentum; quid enim turpius iſto Iambico: *Un fidéle Chrètien donnera tout pour Dieu.* In vernacula, id vitii, ne in pueris quidem, ferendum amplius eſt.

L V I I.

Spiritus operantur tantum volendo.

L V I I I.

Corpus æque agit in animam, atque anima in corpus.

L I X.

Voluptas eſt ſummum hominis bonum.

L X.

Retentiones mentales, & æquivocationes Jeſuiticas toto corde deteſtamur.

L X I.

Execramur etiam calumnias & obtrectationes, ceu peſtilentiſſimum in civili ſocietate virus.

L X I I.

Quæritur quo loco habeamus illud vitium, quo quis, in conſcientia de propriis convictus meritis, ambit munus, atque interim certo certius prævidens, male conſultum iri publico, ſi alter

ter ſibi præferatur; malis artibus, cum aliter nequeat, ſeſe in illud intrudere conatur? Reſp. ponimus in genere mendacii officioſi. No. VII.

LXIII.

Omnia corpora ſunt entia per aggregationem, & homo quidem potius, quam acervus lapidum.

LXIV.

Fieri non tantum poteſt, ut idem numero reſurgat Petrus; ſed etiam, ut potior ſit inter Petrum hujus & illius ſæculi identitas numerica, quam hic eſſe ſolet inter Petrum ſenem, & Petrum juvenem.

LXV.

CARTESIUM circa *demonſtrationem exiſtentiæ Dei, Mundi infinitatem, regulas motus, cauſam cohæſionis corporum, naturam reflexionis & refractionis &c.* hallucinatum eſſe, omnino mihi perſuadeo.

LXVI.

Phyſica eſt pars ſpecialis Matheſeos.

LXVII.

Nullum corpus, per ſe, & ſua natura durum eſt: imo omne corpus.

LXVIII.

Ignis non magis calore præditus eſt, quam acus dolore.

LXIX.

Nulla datur attractio, vel ſuctio, quæ non poſſit explicari per pulſionem.

LXX.

Helleboro opus habet, qui, viſis noſtris experimentis, de aeris gravitate dubitare adhuc audet. Quin totus aer globum terraqueum ambiens, minimum ponderat *6, 687, 360*, 000, 000, 000, 000, libras, id eſt, centenariorum plus quam ſexagies ſexies mille millionum milliones.

LXXI.

Lacrymæ Hollandicæ Phænomenon, nec aeri, nec ætheri tribuendum videtur.

Digitized by Google

No. VII. LXXII.

Naturam Gubernaculi primus explicui in Diſſert. mea de Grav. Æth. p. 60. ſqq.

LXXIII.

Machina BORELLI reſpirationi ſub aqua inſerviens, atque in *Ephem. Erud. Gall.* deſcripta ad d. 6. Julii 1682, nullius eſt momenti, ob rationes quas Ephemeridibus an. 1683 inſeri curavi.

LXXIV.

Qui ad quæſtionem: *Cur anſer oſtium horrei, quantumvis altum, intrans caput demittat?* acute ſibi reſpondere videntur, *Quia anſer eſt*; Anſeres ſunt.

LXXV.

Rota Baſilienſis a deſideratiſſimo noſtro populari Dn. JEREMIA MITZIO p. m. inventa, atque in SCHOTTI *Technica Curioſa* p. 409. deſcripta, quamvis optatum non habuerit ſucceſſum, ſpem tamen motus alicujus perpetui pure artificialis non exiguam facit.

LXXVI.

Majus eſt minus, & minus majus, ſi cætera ſint paria.

LXXVII.

Linea recta poteſt dari rectior.

LXXVIII.

A puncto ad punctum aliquando plures dantur viæ breviſſimæ.

LXXIX.

Unius lineæ, infinitæ dari poſſunt perpendiculares, in idem illius punctum incidentes.

LXXX.

Unicum circuli centrum eſt, quamvis plura ſint puncta a quibus ductæ rectæ ad circumferentiam ſunt æquales.

LXXXI.

Circulus infinita capit maxima, ſed unum minimum.

LXXXII. An-

Digitized by Google

No. VII.

LXXXII.

Angulus contactus, vel nullus eſt, vel eſt compages infinitorum angulorum rectilineorum.

LXXXIII.

Figurarum Iſoperimetrarum una, altera infinities major eſſe poteſt.

LXXXIV.

Continens ſemper majus, ſemper minus: aliquando majus; aliquando minus: imo nunquam majus, nec minus eſt contento.

LXXXV.

Non in omni triangulo tres anguli ſunt duobus rectis æquales.

LXXXVI.

Ex unica ſtatione non datur menſio.

LXXXVII.

Titius agrum ſuum triangularem, cujus unum latus eſt 50; alterum itidem 50, tertium 60 perticarum, alio Sempronii commutat, cujus unum latus eſt 50, alterum 50, tertium vero 80 pertic. Dico commutationem eſſe juſtam.

LXXXVIII.

Compendium noſtrum Geometriæ paralogiſmum committit in biſectione rectæ *Part.* 2. *C.* 2. *prop.* 2. ubi ſumit quod probandum erat. Pariter HEINLINUS ἀγεωμετρήτος eſt, *Geom. Part.* V. *probl.* 21.

LXXXIX.

Circuli quadratura nondum inventa eſt; non vero hanc ob rationem, quod curvi ad rectum non detur proportio: revera enim & lineæ curvæ inventus εὐθυσμὸς, & figuræ curvilineæ πλατυσμὸς.

XC.

Copernicani Solem ſentiunt moveri, Terram quieſcere: Ptolemaici contra. Cæterum incredibilis rapiditas, quæ, in hypotheſi Ptolemaica, Fixis adſcribenda eſt, non eſt ſufficiens argumentum mittendi nuntium huic hypotheſi.

Digitized by Google

No. VII.

X C I.

Sol dum accedit ad nos, recedit a nobis; eodemque tempore aſcendit & deſcendit.

XCII.

Si obliquitas Eclipticæ eſſet 90 gr. dies ſub noſtra elevatione foret continuus unius menſis & dimid. Sub ipſis autem polis æſtus eſſet longe intolerabilior eo, qui nunc æquatorem infeſtat.

XCIII.

Fieri poteſt, ut incolis Zonæ torridæ Sol, per ſat multos annos, non fiat verticalis.

XCIV.

Terra non eſt figuræ ellipticæ.

X C V.

Non dantur Antipodes.

XCVI.

Periodus Juliana tanti non eſt, quin illa Chronologi carere potuiſſent. Pro inveſtigando autem anno currente periodi Julianæ, talem inveni methodum: Datum numerum cycli Solis duc in 4845, Lunæ in 4200, Indictionis in 6916; ſummamque trium productorum divide per completam Periodum Jul. 7980. Reſiduum indicabit annum ejus currentem.

XCVII.

Magnitudines æquales, ſi inæquales appareant, in Perſpectiva non ſemper per inæquales repræſentandæ.

XCVIII.

Matheſis tantæ eſt præſtantiæ, ut ejus uſus latiſſime ad omnia opificia, ne ipſa quidem ſartoria, vel ſutoria excepta, ſe extendat; ſic ut mirari ſatis nequeam, cur ſcientiarum utiliſſima tam paucos inveniat cultores.

XCIX.

Sic Analyſin, ſeu Algebram ſpecioſam, ejuſque applicandæ artificium qui norit, totum ſecretum noſtratis cujuſdam in fabricandis ſtateris non difficulter deteget. Datis enim cylindricæ vel priſmaticæ ſtateræ brachio breviori, *a*; longiori, *b*; diſtantia

punct-

puncti applicationis majorum onerum ab hypomochlio, c; ſacomate brachii longioris æquipondium faciente cum onere explorando, d; minimo onere explorando, e; maximo, f; diſtantia ſacomatis ab hypomochlio æquiponderantis oneri maximo, g; minimo, h; & differentia inter duo onera majora vel minora, p. Quæruntur pondus jugi, x; diſtantia puncti applicationis minorum onerum ab hypomochlio, y; diviſiones brachii longioris reſpondentes differentiæ p duorum onerum majorum, z; eidem differentiæ duorum minorum, $\mathfrak{z}$. Totum autem myſterium in his latet æquationibus; $x = (2acf + 2bcf - 2adg - 2bdg) : (bb - aa)$, $y = (dh + cf - dg) : e$, $z = cp : d$, $\mathfrak{z} = (dhp + cfp - dgp) : de$. Eſtque $y : c = \mathfrak{z} : z$. (*). No. VII.

C.

Ad complendam centuriam, Cl. Dnn. Competitoribus ſequens problema algebraice ſolvendum & conſtruendum propono: Datis duabus pilis in menſa tudicularia; impellere unam in latus menſæ, ut poſt 2, 3, &c. reflexiones (*bricolles*) impingat in alteram: invenien-

(*) Sit AB [Tab. X.b. pag. 326. N°. 7.] jugum ſtateræ, cujus hypomochlium K; ſitque brachium brevius KA $= a$, longius KB $= b$. Applicentur puncto C, cujus diſtantia ab hypom. CK $= c$, pondus F $= f$; & puncto G, cujus diſtantia GK $= g$, ſacoma D $= d$: erit, per notiſſimam Staticæ legem momentum ponderis F [cf] plus momento brachii KA [$\frac{1}{2}aax : (a+b)$, poſito nempe x pondere jugi] æquale momento ſacomatis D [dg] plus momento brachii KB [$\frac{1}{2}bbx : (a+b)$]. Unde deducitur $x = (2acf + 2bcf - 2adg - 2bdg) : (bb - aa)$, & $\frac{1}{2}(bb - aa)x : (a+b) = cf - dg$. Nunc, e puncto Y, cujus diſtantia YK $= y$, ſuſpendatur pondus minus E $= e$, quocum ſit in æquilibrio ſacoma D [d] ſuſpenſum ex H, cujus diſtantia HK $= h$; erit, ut ſupra, $ey + \frac{1}{2}aax : (a+b) = hd + \frac{1}{2}bbx : (a+b)$; ſeu $ey = hd + \frac{1}{2}(bb - aa)x : (a+b) = bd + cf - dg$, atque $y = (bd + cf - dg) : e$. Minuatur pondus F quantitate p, ut ſit nunc $f - p$, & ejus momentum erit $cf - cp$. Tranſeat, æquilibrii ſervandi gratia, ſacoma D ex G in g, poſitoque Gg $= z$ vel Kg $= g - z$, momentum ſacomatis erit $dg - dz$, ſic ut, additis brachiorum momentis, habeatur hæc æquatio $cf - cp + \frac{1}{2}aax : (a+b) = dg - dz + \frac{1}{2}bbx : (a+b)$ vel $cf - dg + \frac{1}{2}(aa - bb)x : (a+b) [= 0] = cp - dz$ aut $z = cp : d$. Quod ſi pondus E [e] minutum poſuiſſemus eadem quantitate p, & ſacoma D ad hypomochlium acceſſiſſet diſtantia Hh $= \mathfrak{z}$; pariter inveniſſemus $ey - py + \frac{1}{2}aax : (a+b) = dh - d\mathfrak{z} + \frac{1}{2}bbx : (a+b)$; unde fit $\mathfrak{z} = py : d = (dhp + cfp - dgp) : de$, & $\mathfrak{z} : z = \frac{py}{d} : \frac{cp}{d} = y : c$.

Digitized by Google

No. VII. niendum ſit punctum incidentiæ in latere menſæ? Reſp. (*).

(*) Id plurimis effici poteſt modis. Hunc accipe. Sit A pila impellenda, B ferienda; LC, DH latera menſæ. His normalem age DC per B, & ſumta CE = BC & DG = DE, atque CK = CG, & ſic deinceps; ſi vis pilam B poſt unam reflexionem ferire, impelle pilam A ſecundum AE; ſi poſt duas ſecundum AG; ſi poſt tres, ſecundum AK, &c. Demonſtrationem, quæ facillima eſt, omittimus.

Si ſit A pila ferienda, B mittenda, erunt F, I, N, &c. puncta incidentiæ, pro una, duabus, tribus, &c. reflexionibus; ac ſi vocetur $BC = b$, $DC = d$, demiſſæ ex A normales in latus $CL = a$, in tranſverſalem $CD = c$, erit $CF = bc : (a + b)$; $CI = bc : (a - b + 2d)$; $CN = bc : (a + b + 2d)$; C &c. $= bc : (a - b + 3d)$ &c. uti facile patet.

N°. VIII.

RELATIO

De Controverſia quæ hactenus inter Dn. HUGENIUM *& Dn.* CATELANUM *agitatur,* De Centro Oſcillationis:

Collecta ex Ephemeridibus Gallicis.

Acta Erud. Lipſ. 1684. Sept. p. 416.

CLariſſimus HUGENIUS in illius Tractatus, quem de *Pendulo* inſcripſit, Parte IV, fundamenti loco, cui totum ſyſtema de Centro Oſcillationis inædificet, hanc regulam poſuit: „ Si pendulum, e pluribus ponderibus „ compoſitum, atque e quiete dimiſſum, partem quamcunque oſcillationis „ integræ confecerit; atque inde porro intelligantur ſingula ejus pondera, „ relicto communi vinculo, celeritates acquiſitas ſurſum convertere, ac quo„ uſque poſſunt aſcendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus com„ poſitæ ad eandem altitudinem reverſum erit, quam ante inceptam oſcilla„ tionem obtinebat. Eam propoſitionem, anno 1681, in *Diario Gallico, menſe Decembri*, aggreſſus eſt Dn. CATELANUS, Mathematicus Pariſienſis; atque, ut parum firmam probaret, oſtendit, cum pendulum e duobus ponderibus compoſitum deſcendit, altitudines, e quibus pondera connexa delabuntur, proportionales eſſe celeritatibus acquiſitis; ſed cum pondera, occurſu plani reſiſtentis ſeparata, iterum aſcendunt, altitudines

Digitized by Google

nes illas, ad quas perveniunt, ſe habere ut quadrata celeritatum acquiſitarum. Quæ duæ ſummæ ſane differentes, ut videntur, ſi per numerum ponderum diviſæ fuerint, altitudinem ad quam centrum gravitatis commune aſcendit, differre demonſtrabunt ab ea, unde initio deſcenderat. Cui objectioni Dn. Hugenius in *Ephemeridibus* itidem *Gallicis, menſe Junio, Anni* 1682, breviter reſpondit; negando, ſummas illas altitudinum, quas Catelanus differentes eſſe ſuppoſuerat, revera tales inveniri: neque enim ſequi, altitudines duas, quas inter non eſt ea proportio quæ inter duas alias, neceſſario ſummam ab harum ſumma differentem efficere. *Menſe Junio, Anni* 1682 excepit Catelanus, ſe non ignorare, quod quatuor magnitudines inæquales efficere duas ſummas æquales valeant; ſed hoc ſolum ſe concludere, quod Hugenii propoſitio generalis vera eſſe non poſſit, niſi pars æqualis toti ſtatuatur. Affirmat „celeritatem totalem penduli compoſiti, quæ inter partes di- „ ſtributa ſit proportionaliter ad arcus, quos ipſæ deſcribunt, ſemper „ æqualem eſſe ſummæ celeritatum, quas eædem partes acquiſiviſſent, „ ſi una ab altera fuiſſet ſejuncta, & omnes ſeparatim ex iiſdem altitudi- „ nibus, & in eadem diſtantia ab axe deſcendiſſent. Hoc & aliis nonnullis, de quibus ante dixerat, ſuppoſitis, controverſiæ ſtatum ad hanc propoſitionem redire ſcribit: „ ſi habeantur duæ magnitudines inæ- „ quales aa & bb, ſumma radicum ipſarum $a+b$, & quadrata partium „ illius ſummæ, quæ ſint proportionales dictis magnitudinibus, quæque „ adeo pro communi denominatore habeant $aa+bb$, & pro numerato- „ ribus differentibus a^3+aab & b^3+abb; oſtendere, quod ſumma „ harum duarum magnitudinum, quæ altitudines, unde duo pondera æ- „ qualia uni pendulo alligata demittuntur, repræſentant, non poſſit eſſe „ æqualis ſummæ quadratorum illarum partium, quæ altitudines exhibent, „ ad quas duo pondera, poſtquam percuſſione facta fuerint ſejuncta, re- „ deunt, niſi minor harum magnitudinum aa & bb, ſit æqualis majori; „ hoc eſt, quia iſtæ magnitudines in quæſtione propoſita ſemper inæqua- „ les ſunt, niſi pars æque magna ſit ac totum. „ Atque ut intelligeretur, quod antea Hugenio objecerat Catelanus, id omnino cum his, quæ modo ex ipſo recenſuimus, congruere, eodemque collimare, primam objectionem, anno 1681 factam, recudi, eidemque lineolas quaſdam, prius omiſſas, adjici curavit. Hugenius, poſt duorum fere annorum ſilentium, exceptioni novæ ſatisfacere, monentibus amicis, *in Ephemeridibus Gallicis 3. Julii præſentis anni* voluit, ne victas dediſſe manus videretur. No.VIII.

Propoſitionem ergo, ad quam ſtatum controverſiæ Catelanus reduxerat, primum terminis Algebraicis, pauliſper clarius, ac a Catelano factum fuerat, repetit, deinde Algebra hic opus non eſſe innuens, nume-

ris

No. VIII. ris eandem offert: „ Ponatur, inquit, aa æquale eſſe 1, & bb æquale „ 4; ſumma radicum $a + b$ ſunt 3, & partes proportionales hujus ſum- „ mæ ſunt $\frac{3}{5}$ & $\frac{12}{5}$: faciunt enim junctim $\frac{15}{5}$, quod eſt 3, & ſunt inter ſe „ ut 1 ad 4. Quadrata earumdem partium ſunt $\frac{9}{25}$, & $\frac{144}{25}$. Hoc igitur „ ſolum reſtaret demonſtrandum, quod ſcilicet ſumma 1 & 4, non ſit æ- „ qualis ſummæ, quæ prodit ex $\frac{9}{25}$ & $\frac{144}{25}$, ſive quod 5 non ſint æqua- „ lia $6\frac{3}{25}$; id quod ſane per ſe clarum eſt. Negat autem Hugenius in hac propoſitione quadrata ipſarum $(a^3 + aab) : (aa + bb)$ & $(b^3 + abb) : (aa + bb)$ ſive $\frac{9}{25}$ & $\frac{144}{25}$, ad repræſentandas altitudines, ad quas pondera ſejuncta redierint, recte aſſumi. Et porro illud falſum eſſe, quod de celeritate totali penduli Catelanus ſuppoſuerat, oſtendit e principio Mechanico, vi cujus centrum gravitatis non aſcendit altius, quam antea fuerat delapſum. Eſt & alia Hugenio cum Catelano controverſia, circa generalem regulam, quam de centro oſcillationis ſive agitationis Catelanus propoſuerat: ſed eam ne plura cumulemus, impræſentiarum dimittimus. Antequam vero Hugenius ad Catelani exceptionem alteram reſponderet, ſuſcepit in ſe Dn. Bernoulli Baſileenſis Hugenii cauſam, eamque contra Catelanum defendendam ſumpſit. Ejus verba quoniam, quæ hactenus in lite Clariſſimorum virorum diximus, plurimum illuſtrant, huc integra apponere ex *Ephemeridibus Gallicis die* 24. *April*. 1684. viſum fuit.

No. IX.

N°. IX.

EXTRAIT D'UNE
LETTRE
DU Sr. BERNOULLI,

Ecrite de Bâle à l'Auteur du Journal, ſur le démêlé de Mr. l'Abbé CATELAN, *avec Mr.* HUGENS, *touchant le Centre d'Oſcillation.*

N'Ayant pas encore remarqué que Mr. HUGENS ait répondu à la replique de Mr. l'Abbé CATELAN, que vous avez inſérée dans vos Journaux de 1682, touchant ſa principale propoſition du centre d'oſcillation; je crois que vous ne trouverez pas mauvais que je vous écrive un mot, pour ſa juſtification.

Journal des Sçavans 1684. 12. Journal du 24. Avr. p. 142. Ed. de Paris & pag. 157. Ed. de Hol.

Tout le diſcours de Mr. CATELAN ne tend qu'à prouver que *la ſomme des racines de deux grandeurs quelconques ne peut être coupée en deux parties, en ſorte qu'elles ſoyent proportionelles aux grandeurs données, & que la ſomme de leurs quarrés ſoit égale à celle de ces mêmes grandeurs:* ce qui ne lui eſt pas conteſté par Mr. HUGENS, qui ſoutient ſeulement que *la ſomme de ces deux grandeurs peut bien être égale à la ſomme de deux autres, qui ne ſont que proportionelles aux quarrés des dites parties;* ce qui eſt auſſi très vrai. Et pour vous montrer que la diſpute ne revient qu'à cela, je me ſervirai du même exemple de deux poids égaux, en rendant ces vérités abſtraites plus ſenſibles par les nombres.

Soient A & B, deux corps ſuſpendus à l'axe D, l'un à la di-

Digitized by Google

No. IX. diſtance quatre fois plus grande que l'autre : ainſi ſi la hauteur perpendiculaire B I, d'où deſcend le Corps B, en décrivant l'arc B G, eſt poſée de quatre piés, l'autre A H, d'où tombe le corps A, ſera d'un pié. Les viteſſes donc qu'ils acquerront en tombant ſéparément, étant comme les racines de ces hauteurs, ſeront en raiſon de 2 à 1 : la ſomme 3, qui marque la viteſſe totale du pendule, étant partagée proportionellement aux hauteurs, ou aux arcs B G, & A F, donne les degrés de viteſſe qu'obtiennent les poids lors qu'ils tombent conjointement ſur la planche D G, ſavoir $\frac{12}{5}$ & $\frac{3}{5}$, les quarrés deſquels ſont $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$, dont la ſomme eſt aſſurément différente de celle des hauteurs d'où les poids ſont deſcendus ; mais ces quarrés ne marquent que la proportion des hauteurs, O M, & N L, auxquelles montent les poids après la rencontre de la planche, & non pas les hauteurs mêmes ; leſquelles peuvent bien être en raiſon de $\frac{144}{25}$ à $\frac{9}{25}$, c'eſt-à-dire, de 16 à 1, ſans que leur ſomme laiſſe pour cela d'être égale à 5, qui eſt celle des hauteurs I B, & A H, d'où les mêmes poids ſont deſcendus ; car ſi je fais la hauteur O M de $4\frac{12}{17}$ piés, l'autre N L de $\frac{5}{17}$; O M ſera à N L, comme 16 a 1, & O M + N L ſera égal à B I + A H, & par conſéquent le centre de peſanteur commun des poids A, B, montés en L, M, ſera à même hauteur qu'il étoit devant que le balancement fût commencé ; ce qui paroit facilement par l'inſpection de la figure : car le poids M, étant autant au deſſus de la ligne horizontale B D, que L en eſt au deſſous, ſavoir de $\frac{12}{17}$ parties d'un pié, il s'enſuit que dans les triangles ſemblables M P Q, & LQR, les côtés M Q, & Q L ſont égaux, c'eſt à-dire, que le milieu de la ligne M L, qui joint les deux poids, ſe trouve dans l'interſection de la ligne horizontale. Voila, Monſieur, ce que j'avois à vous dire ſur ce ſujet.

N°. X.

No. X.

REPONSE
DE
Mr. L'ABBE' CATELAN,
à la Lettre de
Mr. Bernoulli,
Sur ſon démèlé avec Mr. Hugens *touchant* le Centre de Balancement, *inſerée dans le* XII. *Journal de cette année* 1684.

POUR répondre à cette lettre, je repéterai le même exemple dont Mr. Bernoulli ſe ſert contre moi, d'un pendule compoſé de deux poids égaux, ſuſpendus par un même axe, à un centre commun, qui ſoit quatre fois plus éloigné de l'un que de l'autre; en ſorte que les hauteurs perpendiculaires, d'où ils deſcendent, ſoient comme 1 à 4.

Journal des Sçavans. 1684. 27. Journal du 11. Sept. p. 313. Ed. de Paris & p. 361. Ed. de Holl.

Nous ſommes d'accord ſur la proportion de ces hauteurs, & de la ſomme des viteſſes que ces poids acquerroient, s'ils tomboient, ſéparément, de ces hauteurs: mais nous ne convenons pas enſuite dans l'expreſſion de ces hauteurs, par rapport à une certaine partie d'eſpace, qu'on doit prendre pour leur commune meſure, & concevoir comme l'unité à leur égard.

Je prétens, ſelon tous ceux qui ont écrit avant moi ſur de ſemblables queſtions, que les véritables nombres, qui doivent ſervir à exprimer les hauteurs, ſont les quarrés mêmes des nombres expoſans des viteſſes,

No. X. toutes les fois qu'il n'y a de proportions données entre les unes & les autres, que celle qui nous eſt connuë en général par l'expérience.

Or ſelon mon expreſſion, il eſt évident que 9 fois & 144 fois la 25 partie d'un pié; c'eſt à dire, ſix piés, un pouce, cinq lignes, & & quelque choſe davantage, n'étant pas la même grandeur qu'un pié & quatre piés, ou cinq piés, la ſomme des hauteurs où les poids montent dans l'exemple propoſé, n'eſt pas égale à celles des hauteurs d'où ils deſcendent; contre ce que Mr. HUGENS avance dans la propoſition générale qui ſert de principe à ſon Traité des Centres de balancement.

Mr. BERNOULLI répond à cette objection; que les quarrés des nombres, qui expriment les viteſſes des poids, ne marquent que la proportion des hauteurs, auxquelles ils montent après leur ſéparation, & non pas les hauteurs mêmes, qui peuvent bien être en raiſon de $\frac{144}{25}$, & $\frac{9}{25}$, ſans que leur ſomme laiſſe pour cela d'être égale à 5, qui eſt celle des hauteurs d'où les poids ſont deſcendus, étant unis dans un même pendule; car les hauteurs, où ils remontent étant ſéparés, ſont ſelon lui $4\frac{12}{17}$, & $\frac{5}{17}$, qui ſont enſemble 5, auſſi bien que les nombres 1 & 4, expoſans des premiéres hauteurs.

La Replique eſt facile. Je demande à Mr. BERNOULLI, qui prétend qu'on ne doit avoir ici égard qu'à la proportion des quarrés des nombres expoſans des viteſſes, par quelles loix du mouvement, & par quel principe de méchanique, les poids dont il eſt queſtion remonteront plûtôt aux hauteurs qu'il marque, & qui l'accommodent, qu'à leurs proportionelles $5\frac{11}{17}$ & $\frac{6}{17}$ dont la ſomme eſt 6, ou bien à $3\frac{13}{17}$ & $\frac{4}{17}$ dont la ſomme eſt 4, ou à une infinité d'autres ſemblables qui ont entr'elles la même proportion de $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$, mais qui donnent la hauteur du centre de peſanteur remonté plus grande, ou plus petite à l'infini, que celle d'où l'on ſuppoſe qu'il ſoit deſcendu? Certainement ces poids ne remonteront pas à toutes ſortes de hauteurs, proportionelles aux quarrés des viteſſes qu'ils ont acquiſes en deſcendant; puiſque leur peſanteur rallentit par degrés, & détruit à la fin ces viteſſes, avec leſquelles ils ſont réfléchis. Qu'arrivera-t-il donc alors? Je le demande à Mr. BERNOULLI? La Nature, incertaine par elle-même de ce qu'elle doit faire en cette occaſion, ſe déterminera-t-elle enfin à agir dans ces poids ſelon ſa volonté? Il me permettra d'en douter, juſqu'à-ce qu'il nous en donne de bonnes preuves, tirées des principes de la Phyſique. Et cependant je crois pouvoir conclure, que les raiſons, qu'il apporte ici en faveur de Mr. HUGENS, ne ſervent qu'à confirmer, que ſa propoſition générale & fondamentale des centres de balancement, n'eſt ni ſi bonne, ni ſi inconteſtable qu'il le penſe.

Voyez N°. XXIII.

N°. XI.

Digitized by Google

No. XI.

NOUVELLE MACHINE
POUR PESER L'AIR,
inventée par
le Sr. BERNOULLI,
Mathématicien de Baſle, *& envoiée à l'Auteur du Journal.*

DE toutes les diverſes maniéres de peſer l'air, qu'on nous a données juſqu'ici, celle de Mr. BOYLE eſt ſans doute la plus eſtimée, comme étant la plus exacte. Il prend des phioles, ou bouteilles de verre, de la groſſeur d'un œuf ou d'un ballon, avec un col fort menu, qu'il fait ſcéler hermétiquement au moment qu'elles ſortent de la fournaiſe. Les ayant laiſſé refroidir, il les péſe dans une balance très juſte. Il en rompt enſuite le bout; donnant par là moyen à l'air d'y entrer. Après cela, il les peſe derechef avec le bout rompu, & trouve ainſi le poids de l'air qui y eſt entré.

Journal des Sçavans 1684. 28. Journal du 31. Juil. 1684. p. 259. Ed. de Par. & p. 293. Ed. de Hol. *Acta Erud. Lipſ. 1685.* Sep. *p. 433.*

On peut ſe ſervir pluſieurs fois pour cet effet d'une même phiole, ſans la ſcéler hermétiquement, ſi après en avoir chaſſé l'air, par la chaleur d'une braize, on en bouche l'ouverture ſeulement avec de la cire; après quoi on la péſe, & puis on perce la cire avec une épingle, pour la repeſer encore. J'ai laiſſé quelquefois ces phioles 4 ou 5 mois, ainſi bouchées avec de la cire, après leſquels je m'en ſervois encore avec le même ſuccès.

Cependant il eſt aiſé de remarquer, que cette maniére de peſer l'air a trois défauts conſidérables. Car 1°. il ne peut y avoir au-

Digitized by Google

No. XI. aucune exactitude, en peſant une auſſi petite portion d'air, que ſauroient contenir de ſemblables phioles; d'autant plus que, dans l'examen des petites choſes, une différence imperceptible peut ſouvent cauſer une erreur fort notable dans la proportion.

Mais ſi, pour éviter ce défaut, on choiſit un plus grand verre, l'on ſe jette dans un autre inconvénient, qui eſt que la balance étant trop chargée par la peſanteur de la phiole, elle ne tourne plus auſſi librement qu'il faudroit qu'elle tournat, pour marquer juſqu'à la moindre différence du poids: Enſorte que Mr. BOYLE ne gagne guéres, quand pour faire remarquer la juſteſſe de ſa balance, il dit que la quarantiéme partie d'un grain lui faiſoit perdre l'équilibre: car ce n'eſt pas à dire, qu'elle doive être auſſi juſte, après l'avoir chargée de la bouteille; ayant trouvé par expérience, que ſi la dixiéme partie d'un grain ſuffit pour faire pancher ſenſiblement d'un côté un trébuchet d'orfévre qui n'eſt pas chargé, il faut pour le moins ajouter, à l'un de ſes baſſins, dix, ou douze grains, pour le faire pancher comme auparavant, lors même que chaque baſſin n'eſt chargé que d'une once, ou de deux.

Le 3ᵉ. défaut eſt encore plus conſidérable que les deux autres; en ce qu'en cette maniére on ne peut connoitre, quelle quantité d'air a été chaſſée hors de la phiole; ce qu'il faut pourtant ſavoir pour trouver la juſte proportion de ſa peſanteur à celle des autres corps.

Pour remédier donc à tous les inconvéniens qui peuvent arriver là-deſſus, il faut venir à ce probléme qui peut tenir lieu de paradoxe, ſavoir de trouver moien de peſer un fort grand volume d'air, à une balance très déliée & très fine, ſans que le vaſe contenant cet air empêche, par ſa peſanteur, que la balance ne tourne auſſi librement, que ſi elle n'étoit point du tout chargée, & ſans que l'évacuation du vaſe cauſe aucune altération dans le vaſe même.

Pour réſoudre en un mot ce Probléme, il ne faut que peſer un grand récipient dans l'eau; puis en aiant tiré l'air, par le moien de la machine du vuide, le peſer derechef. Comme cette ma-

maniére eſt très ſimple, & très aiſée, il y a lieu de s'étonner No. XI.
que Mr. BOYLE, qui ſavoit bien que les corps perdoient leur peſanteur dans l'eau, & qui n'ignoroit pas l'uſage de la Machine du vuide, ne s'en ſoit jamais aviſé. Mais pour en faire l'expérience, avec toutes les précautions néceſſaires, il faut obſerver ce qui ſuit.

Il faut prendre d'abord un Récipient A, des plus grands qui ſe puiſſent faire, & ſouder à ſon goulet une clé de robinet B, avec ſon tuyau C. On entoure enſuite le récipient, au deſſous de ſon goulet, d'un cercle, ou anneau de fer D, bien large, & dont les bords ſoient retrouſſés en haut, pour empêcher que ce que l'on y met n'en puiſſe tomber facilement. Aux 4 cotés oppoſés de ce cercle, on attache des lames de fer EE, aſſez épaiſſes, qui ſe croiſent au bas du récipient, pour y recevoir le crochet du baſſin F, dans lequel on mettra du poids autant qu'on le jugera néceſſaire pour faire enfoncer le récipient dans l'eau. Il vaut mieux toutefois y en mettre trop peu que trop, parce qu'il ſera plus aiſé d'en ajouter que d'en ôter.

Cela fait, il faut plonger le récipient avec tout cet aparcil dans le tonneau renverſé G, qui eſt preſque rempli d'eau : puis aiant paſſé trois fils de ſoie dans les petites anſes *a a*, qui ſont autour du tuyau du robinet immédiatement au deſſus de la clé, il en faut attacher le bout au bras d'un trébuchet bien ſubtil & bien juſte, & à l'autre bras le baſſinet H, dans lequel on ne mettra qu'autant de poids que vous jugerez à peu près néceſſaire, pour contrepeſer le ſeul air du récipient, c'eſt à dire, 4 ou 6 dragmes, ou une once, ſuivant la capacité du récipient: après quoi, l'on achevera de mettre du poids autour du cercle D, pour faire enfoncer le récipient avec ſon robinet, juſqu'à ce qu'il ſoit tout couvert d'eau, & parfaitement en équilibre avec le contrepoids du baſſinet H. Enſuite de cela, il faut lever, avec deux doitgs, tout doucement le récipient, pour faire ſortir l'ouverture du tuyau C, hors de l'eau juſqu'en C; puis ayant ſuccé, à travers un chalumeau, l'eau contenuë dans la concavité du robinet, & l'ayant bien eſſuyé par dedans, de peur qu'en ouvrant le robinet

il

No. XI. il ne tombe quelque goute dans le récipient; il en faut tirer l'air; autant que l'on peut, par le moien de la pompe I; & afin qu'il ne ſoit pas néceſſaire de changer la ſituation perpendiculaire, ni du récipient, ni de la pompe, on peut ſe ſervir du Syphon recourbé K, attaché d'un côté avec de la cire au robinet du récipient, & de l'autre à celui de la pompe.

Ayant tiré l'air, il faut tourner la clé du robinet, détacher le Syphon K, & racler toute la cire du bout du robinet C; mais quand il en reſteroit quelque peu, on ne doit pas penſer que cela apporte du changement au poids du récipient, ſelon tout le poids de cette maſſe au deſſus de celui d'un égal volume d'eau; & l'excès ne ſauroit aller à la centiéme partie d'un grain; la différence des peſanteurs ſpécifiques de l'eau & de la cire étant très petite.

Après cela, il faut plonger le récipient ſous l'eau du tonneau; & ôter du contrepoids H, juſqu'à-ce que le reſte ſe mette derechef parfaitement en équilibre avec le récipient. Ainſi ce que vous aurez ôté marquera le poids de l'air, qui a été tiré hors du récipient. Enfin il faudra tirer tout le récipient hors du tonneau, & l'ayant délivré de l'embarras du cercle D, des lames E, & du baſſin F, l'y replonger le goulet devant; ayant ſoin que la concavité du robinet C ſe rempliſſe d'eau; puis tournant la clé, on laiſſera monter l'eau, qui remplira l'eſpace qu'avoit occupé l'air tiré, & ſe mettra au deſſous de la ſurface extérieure du tonneau. C'eſt pourquoi il faut plonger plus bas le récipient, juſqu'à-ce que l'eau vienne par dedans à niveau avec celle de dehors; autrement l'eau, qui entre dans le récipient, ne ſauroit exactement remplir l'eſpace qu'avoit occupé l'air tiré; puiſqu'elle en ſeroit empêchée par l'air qui y eſt reſté, qui ſeroit rarefié, un peu davantage qu'il ne l'eſt dans ſon état naturel; comme ſavent ceux qui entendent les loix de la vertu élaſtique de l'air.

L'eau du récipient ainſi de niveau avec celle du tonneau; on doit tourner la clé du robinet; puis tirer le récipient hors du tonneau, le bien eſſuyer par dehors; le peſer, avec l'eau renfermée, dans une balance exacte, proportionnée à ce poids; & enfin

Digitized by Google

enfin le peſer encore vuide, pour trouver le poids de l'eau qu'on aura jettée, qu'il faut comparer avec ce qu'on avoit ôté du contrepoids H, pour avoir l'exacte proportion de la peſanteur ſpécifique de l'air à celle de l'eau. No. XI.

On peut objecter, que cette maniére de peſer l'air n'eſt pas ſi exacte qu'elle pourroit ſembler d'abord, en ce que l'eau du tonneau, réſiſtant beaucoup au balancement du récipient, empêche que le trébuchet ne tourne aſſez librement pour marquer les moindres différences des poids, quoique d'ailleurs il ne ſoit chargé que très peu. A cela Mr. BERNOULLI répond, qu'à la vérité, en cet état, pour faire perdre l'équilibre au trébuchet, il faut ajoûter plus de poids au baſſin H, qu'il ne faudroit, ſi ce qui contrepéſe à ce baſſin étoit dans l'air ; mais il croit auſſi, qu'il ne faut pas tant pour vaincre la réſiſtance de l'eau, & pour faire hauſſer & baiſſer ſenſiblement le récipient, qu'il faudroit pour vaincre le frottement de l'axe, que cauſeroit la peſanteur d'un tel récipient, ſi on le peſoit dans l'air, à une balance plus forte & capable de ſoutenir ce poids ſans plier : Ainſi cette maniére de peſer l'air du récipient à un trébuchet dans l'eau eſt toûjours plus exacte, que celle de le faire dans l'air à une balance plus groſſiére.

N°. XII.

PROBLEME PROPOSÉ

Par Mr. BERNOULLI, *Mathématicien de* Baſle.

Aiant pris un Arc AB, [Tab.X.b.N°. 12] qui ſoit une partie aliquote quelconque de la circonférence ; [comme un arc de 30, 45, 60 degrés ou autre] mener de ſon extrémité B, une ligne BC, ſur quelque point du Diamétre AD, hors le centre, en ſorte qu'on puiſſe démontrer que le ſegment ACB, eſt commenſurable au Cercle.

Journal des Savans 1685. 16e. Journal du 14. Mai p. 206. Ed. de Paris, pag. 262. Ed. de Holl.

Ce Probléme eſt d'autant plus conſidérable, que s'il étoit une fois ré-

No. XII. *ſolu, on auroit bientôt la quadrature du Cercle* *.

* Soit mené le raion BK, & BL le ſinus de l'arc AB. Puiſque AB eſt partie aliquote de la circonference, le ſecteur AKB eſt partie aliquote du cercle, & lui eſt commenſurable. Si ACB eſt auſſi commenſurable au cercle, le triangle BKC lui eſt donc commenſurable, & le raport de ½ BL× KC [meſure du triangle] à ABD× AK [meſure du cercle] eſt donné. Mais AB étant partie aliquote de la circonférence, le raport de ſon ſinus BL au raion AK eſt donné. Donc auſſi le raport de KC à ABD ſera donné. Mais la droite KC ſeroit donnée, par la réſolution du Probléme. Donc la demi circonference ABD ſeroit donnée; & partant la Quadrature du Cercle.

No. XIII.

EXAMEN DE LA MANIERE DE PESER L'AIR DANS UNE VESSIE,

*Envoyé à Mr. l'*Abbé De La Roque,

Par Mr. BERNOULLI, *Mathématicien de* Baſle,

en ces termes.

Journal des Savans 1685. 19e. Journal du 18. Juin p. 241. Ed. de Paris, pag. 304. Ed. de Holl.

AVANT de vous avoir envoié cette nouvelle Machine pour peſer l'air, dont vous avez fait part au Public dans vôtre Journal, j'en avois examiné avec ſoin les maniéres ordinaires; entr'autres celle de le faire dans une veſſie, dont Riccioli, Mr. Sturm d'Altorf, & pluſieurs autres ont fait l'eſſai, & que Mr. Boyle même ſemble vouloir ſoûtenir dans les Prolégoménes de ſes *Paradoxes hydroſtatiques*. Après l'approbation de tant de ſavans hommes, on ſera ſurpris d'apprendre

dre que, ſuivant les principes hydroſtatiques, une veſſie ne doit peſer ni plus, ni moins, quand elle eſt enflée, que quand elle eſt vuide, ſuppoſé même que l'air ait de la peſanteur. No. XIII.

Il eſt viſible qu'une phiole remplie d'eau ne péſe pas davantage dans le baſſin d'une balance, que ſi cette eau étoit répanduë dans le baſſin, & que la phiole fût miſe auprès : il en eſt preſque de même d'une veſſie enflée, dont on exprime l'air ; d'autant qu'à meſure qu'elle ſe réduit en un moindre volume, elle céde par ſa contraction à l'air, qui en ſort, autant d'eſpace qu'il en avoit occupé auparavant dans la veſſie, ſi bien qu'il péſe, avant & après, la même quantité d'air ſur le baſſin. Et afin qu'on ne s'imagine pas qu'il en ſoit autrement, lors qu'on a ſuſpendu la veſſie au bras de la balance, ou au deſſous du baſſin, que lors qu'elle eſt couchée deſſus; figurez-vous, en tout cas, une colomne perpendiculaire d'air, qui renferme en ſoi cette veſſie ſuſpenduë, & une autre colomne purement d'air, de pareille hauteur & groſſeur, à côté, qui tâche de ſoulever la premiére.

Il eſt conſtant ſelon les principes hydroſtatiques, que la veſſie, quoi qu'elle ſoit accompagnée de tout le poids de la colonne qui la renferme, ne doit faire baiſſer le bras de la balance, qu'avec la force qui correſpond à l'excès du poids, dont la ſubſtance de la veſſie ſurpaſſe celle d'un égal volume d'air: enſorte qu'il ne faut charger l'autre bras, que d'autant de poids qu'il faut pour contrebalancer ce ſeul excès ; ſoit que la veſſie ſoit enflée, ou qu'elle ſoit vuide d'air: parce que tout l'air de la colonne, tant déhors que dedans la veſſie, eſt empêché de faire ſon effet: par autant d'air de la colonne qui eſt à côté.

Pour voir ſi la raiſon s'accorderoit avec l'expérience, je pris une veſſie de porc, que j'enflai d'air naturel, par le moyen d'un ſoufflet, plûtôt qu'avec la bouche, dont le ſoufle eſt rempli de beaucoup de parties aqueuſes ; puis laiſſant le col de la veſſie ouvert, pour être aſſuré, par la communication de l'air enfermé avec l'extérieur, qu'il n'eſt pas plus comprimé que celui-ci ; j'attachai cette veſſie, avec une feuille de papier, au bras d'une balance très exacte, & la peſai. Enſuite j'en exprimai l'air, pre-

No. XIII. nant entre les doigts ce papier, afin qu'il ne reſtât point de graiſſe aux doigts, & la repeſai encore. Moyennant cela, je trouvai, qu'à la vérité la veſſie peſoit deux grains moins qu'elle ne peſoit auparavant; mais cette différence étoit trop petite, pour croire qu'elle marquât le poids de l'air qui en étoit ſorti: d'autant que je jugeai, par la comparaiſon de la capacité de cette veſſie à celle d'une phiole de verre dont j'avois peſé l'air, que la veſſie en devoit contenir, pour le moins, 14 ou 16 grains. D'où je conclus, que ces deux grains de différence ne procédoient que des exhalaiſons, dont le dedans de la veſſie eſt toûjours rempli, & qui s'échapent, de compagnie avec l'air, lors qu'on l'exprime; témoin la mauvaiſe odeur qu'on ſent alors, en y approchant le nez. Pour voir encore plus clairement que ce n'étoit pas l'air que j'avois peſé, je remplis la veſſie une deuxiéme fois avec le ſoufflet; mais bien loin que ſon poids augmentat par là, je le trouvai diminué encore plus d'un grain; ce que je crois provenir, de ce qu'il ſe détache toûjours, tant par le maniement de la veſſie, que par le vent que cauſe le ſoufflet, quelques petites parties graſſes & volatiles, qui s'évaporent en l'air.

On connoit aiſément par ce que je viens de dire, pourquoi ceux qui ſe ſervent de cette manière de peſer l'air, ont été obligés de lui attribuer beaucoup moins de peſanteur qu'il n'en a en effet; vû que le P. RICCIOLI le fait dix mille fois plus leger que l'eau, & Mr. BOYLE, ſuivant l'expérience qu'il a faite avec une veſſie, eſt contraint de l'eſtimer du moins 7500 fois plus leger que l'eau.

Il eſt donc conſtant, que ceux qui prétendent peſer l'air, dans un Vaſe, qui ne retient pas, avant & après l'évacuation, la même quantité d'extenſion, ſe trompent aſſûrément, ſans en excepter même ARISTOTE, qui a été de ce nombre.

No. XIV.

N°. XIV.

PROBLEME
PROPOSE' PAR
Mr. BERNOULLI
Mathématicien de la Ville de Baſle.

A & B jouënt avec un dez, à condition que celui qui jette le premier as aura gagné. A joue une fois, puis B une fois, après A joue deux fois de ſuite, puis B deux fois, puis A 3 fois de ſuite, & B auſſi 3 fois, &c. *Journal des Sçavans 1685. 25. Journal, du 26. Août. p. 314. Ed. de Paris. pag. 406. Ed. de Holl.*

Ou bien, A joue une fois, puis B deux fois de ſuite, puis A trois fois de ſuite, puis B quatre fois, &c. juſqu'à-ce que l'un d'eux gagne.

On demande la raiſon de leur ſort ?

Voyez ci-après N°. XL.

N°. XV.

EXTRAIT D'UNE
LETTRE
DE Mr. BERNOULLI.

MONSIEUR BERNOULLI nous écrit de Baſle en Suiſſe, que le Samedi 18 Août dernier, il arriva dans cette Ville une choſe aſſez ſurprenante. Il y a, dans la cave d'une maiſon, une ſource d'eau vive, entourée d'un en- *Journal des Sçavans 1685. 29. Journal du 17. Sept. p. 361. Ed.*

Digitized by Google

No. XIII. de Paris, & pag. 465. Ed. de Hol.

clos quarré, de la hauteur de ſept piés, & de la largeur d'environ quatre. L'eau eſt conduite par des tuyaux de bois à une fontaine publique, qui eſt à quelque cent pas de là, dans le marché aux poiſſons. Ces tuyaux reçoivent en chemin l'eau d'une autre ſource qui eſt plus élevée; & afin que cette eau, au lieu de couler vers la fontaine, ne regorge vers l'enclos, quand l'eau eſt baſſe, & ne paſſe par l'orifice du tuyau, comme il eſt ſouvent arrivé dans les grandes ſécherelles, l'homme, qui en a le ſoin, a accoûtumé de boucher cet orifice avec une groſſe cheville de chêne: ce qu'il fit auſſi, il y a deux mois, que l'eau de la ſource ſe trouvoit au deſſous de l'orifice: L'ayant voulu déboucher, le jour ci-deſſus, parce que l'eau paſſoit la hauteur de cet orifice d'un bon demi-pié, à peine eut-il frapé deux ou trois fois ſur le bouchon, qu'il ſauta avec une telle violence, qu'il eût infailliblement tué ce Fontenier, s'il l'eût touché, étant pouſſé par une flamme de feu, qui ſortit en même tems avec un furieux éclat. Cette flamme lui brula les cheveux, les poils de la barbe, & ſes habits; éteignit ſa chandéle, nagea quelque tems ſur l'eau avec ſifflement, & remplit tout l'enclos, & toute la cave d'une fumée épaiſſe, qui penſa le ſuffoquer, aiant été trouvé à demi-mort, & avec pluſieurs marques de brulure au viſage, par le Maître du Logis, qui y ſurvint.

N°. XVI.

N°. XVI.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE Mr. BERNOULLI,

Ecrite de Bâle à l'Auteur du Journal, concernant *La maniére d'aprendre les Mathématiques aux Aveugles.*

LA maniére dont nous avons dit autrefois que l'on avoit apris à écrire à une fille aveugle de Genéve *, a donné lieu à Mr. BERNOULLI de nous écrire depuis peu là-deſſus. Il nous marque, que ce que nous en aprit alors Mr. SPON, ſur ce qu'on lui en avoit écrit, n'eſt pas tout à fait le même que ce qui fut exécuté dans cette rencontre. Il eſt d'autant plus croyable, que c'eſt lui même, qui enſeigna à cette Fille à former les premiers traits de l'écriture. Cependant voici comment il penſe qu'il lui ſeroit aiſé de lui montrer & à toute ſorte d'autres aveugles, l'Arithmétique, la Géométrie, l'Algébre, & par conſéquent toutes les Mathématiques.

Journal des Sçavans 1685. 31. Journal du 19. Nov. p. 386. Ed. de Par. p. 498. Ed. de Hol.

Comme la quantité, qui en eſt l'objet, eſt exprimée, dans ces ſciences, par des caractéres qu'on peut auſſi bien apercevoir par l'attouchement que par la vuë; il lui feroit faire, dit-il, pluſieurs morceaux de bois de la groſſeur des Parallelepipedes de NEPER, afin que le chifre gravé ſur la baſe de chacun, pût ê-

tre

* *Mlle. Eſther Eliz.* DE WALDKIRCH.

No. XVI. tre ſenti & diſtingué avec les doigts. Ces morceaux de bois ſeroient gardés en dix laiettes, ou petites cellules, ſeparées ſuivant le nombre des chiffres. On auroit, outre cela, un treillis, compoſé comme les Caſſes de lettres d'Imprimerie, de pluſieurs rangs diſtingués, ou pluſieurs caſſetins, qui ne pourroient contenir qu'un ſeul de ces parallelepipedes: & c'eſt dans ces caſſetins, ou cellules (dont les premiéres vers la droite ſignifieroient les nombres ſimples, les ſuivantes vers la gauche leurs dizaines, les troiſiémes leurs centaines, & ainſi des autres,) que la perſonne aveugle placeroit chaque chifre, de même que nous avons accoutumé de les écrire ſur du papier.

Pour ce qui eſt de la Géometrie; il dit qu'il lui feroit ſentir par l'ouverture d'un compas, ou de deux régles jointes par un bout avec une cheville, les différences de tous les angles, & tout ce qui en dépend; pourvû qu'elle eût d'ailleurs aſſez de capacité pour le comprendre.

Il ajoute, ſur le chapitre de la Demoiſelle de Geneve, une choſe qui mérite bien de n'être pas oubliée. C'eſt que ſur ce qu'il demandoit quelquefois à cette fille, ſi elle ne rêvoit point en dormant, comme nous, & s'il ne lui paroiſſoit point d'images, ou de phantaſmes; elle lui répondit qu'elle ne ſavoit ce que c'étoit que ces ſortes d'images; mais que quelquefois en dormant, il lui ſembloit qu'elle manioit les objets, de même qu'elle faiſoit en veillant.

No. XVII.

N°. XVII.

PARALLELISMUS RATIOCINII LOGICI ET ALGEBRAICI,

Quem,

Una cum Theſibus Miſcellaneis,

Defendendum ſuſcepit

Par Fratrum

JACOBUS & JOANNES BERNOULLI',

Ille Præſidis, Hic Reſpondentis vices agens.

Ad diem 9 Septembris Anni M. DC. LXXXV.

Editum primo

BASILEÆ

1685.

Digitized by Google

PARALLELISMUS RATIOCINII LOGICI ET ALGEBRAICI.

I.

IDEÆ rerum, de quibus judicare & ratioci- No.XVII.
nari docet Logica, Vocibus, quales ſunt, *Homo*, *Equus*, *Petrus*, &c: Ideæ quantitatum, quarum proportionem inter ſe contemplari docet Matheſis, Literis Alphabeti, *a*, *b*, *c*, *x*, *y*, *z*, &c. ſignificari ſolent.

II.

Quanquam enim ideæ mentis, quandoque vultu geſtibuſque, quod mutis ordinarium; & quantitates lineis, quod Geometris uſitatum eſt, exprimi ſoleant; idque naturæ rei convenientius ſit, attentionemque magis juvet: ſatius tamen eſt vocibus quam geſtibus, literis quam lineis, id fieri; cum hæc ſigna

Digitized by Google

No. XVII. utut magis arbitraria, longe clarius, diſtinctius & expeditius ſignatum ſuum repræſentent.

I I I.

Quoniam autem, in diſcurſu algebraico mediocri, longe major vis mentis requiritur, quàm in ratiociniis vulgaribus, etiam difficillimis; hinc ideæ rerum integris quidem vocibus denotari ſolent: at pro quantitatibus ſingulis unica adhibenda Alphabeti literula; quod ad ideas, quantum fieri poteſt, in compendium redigendas, atque capacitatem mentis mirifice extendendam, apprime conducit.

I V.

Ut cujuslibet rei idea peculiari indigitatur voce, quæ ad illam ſolam ſignificandam adhibetur; ita quælibet quantitas, in præſenti negotio, peculiari charactere inſignitur; quod tamen non impedit, quo minus iſte character in alio diverſam ſignificet.

V.

Cum plurium rerum ideæ componuntur, abſque vel affirmatione vel negatione, id fit vocula *&*, ut *Virtus & Eruditio*: Cum plurium quantitatum ideæ componuntur, citra comparationem, id fit ſigno +, ut $a + b$.

V I.

Si a conceptu ideæ magis compoſitæ conceptum minus compoſitæ auferas, relinquitur prioris differentia; ita, quia in conceptu hominis, præter animalitatem, involvitur rationalitas, ſequitur, ablato animalitatis conceptu, relinqui rationalitatem, ceu differentiam. Pariter ſi a quantitate majore ſubtrahatur minor, relinquitur utriuſque differentia; quæ indigitatur ſigno —, ut $a - b$ ſignificat differentiam inter a & b.

VII.

Cum duæ ideæ, inter quas convenientiam, identitatemve, aut diſconvenientiam, vel diverſitatem deprehendit mens, affirmantur vel negantur de ſe invicem, mediantibus particulis *eſt*, vel *non eſt*, dicitur *Enunciatio*, ut *Homo eſt animal*, *Homo non eſt brutum*.

tum. Cum duæ quantitates, inter quas æqualitatem percipit mens, junguntur ſigno æqualitatis $=$, dicitur *Æquatio*, ut $a = b$: at inæqualitatem denotant hæc ſigna $<$ & $>$, ut $a < b$, vel $a > b$. No.XVII.

VIII.

Quoniam hic comparationem inſtituimus inter convenientiam duarum rerum, & æqualitatem duarum quantitatum; apprime obſervanda eſt diverſitas utrinque intercedens, quæ magnam huic negotio lucem affundet. Ut una quantitas dici poſſit *æqualis* alteri, debet communis menſura, illis eodem vicium numero applicata, utramque exhaurire; ita linea recta decem pedum, & curva pedum totidem dici ſolent *æquales*, quia pes decies applicatus, vel decempeda utrique ſemel applicata, eas accurate exhaurit. At ad hoc ut unum dicatur *eſſe* alterum, ſufficit (qui linguarum genius eſt) ſi communis quaſi menſura juxta poſita, vel applicata ſubjecto & prædicato, deprehendatur exhaurire prædicatum, quamvis non exhauriat ſubjectum. Ita *tranſgreſſio legis* eſt communis menſura *furti*, *&* *peccati*, ſcil. id in quo conveniunt ambo; ſed ſufficit, ut exhauriat conceptum *peccati*, ad hoc ut poſſit dici, *Furtum eſt peccatum*; dummodo idem reperiatur etiam in conceptu furti, quamvis præter id adhuc aliud aliquid ſit in hoc conceptu.

IX.

Ergo, cum convenientia, ſeu identitas ſubjecti & prædicati, plerumque ſit inadæquata, ita quidem ut totum, quod comprehenditur in conceptu prædicati, comprehendatur quoque in conceptu ſubjecti, ſed non viciſſim; hinc fit ut enunciatio affirmativa converti non poſſit ſimpliciter: *Furtum eſt peccatum*, Ergo *Peccatum eſt furtum*. Secus atque ſe res habet in quantitatibus æqualibus: cum enim æqualitas ſit reciproca, bene ſequitur, Si $a = b$, Ergo converſim $b = a$.

X.

Obſervandum autem, cum attributa accidentalia prædicantur de

No. XVII. ſubjecto, conceptum prædicati non reperiri in natura ſubjecti: adeoque non tam prædicari debere indefinite de ſubjecto, qua tali, quam de inferioribus ſub ſubjecto contentis, iiſque vel omnibus, vel quibusdam. Nam ſi diceremus, *Homo eſt peccator*, *Homo eſt doctus*, videmur velle dicere, hominem, qua hominem, eſſe peccatorem, & doctum; ſive in conceptu hominis includi doctrinam, & peccatum; quod falſum: hinc additis notis univerſalitatis, aut particularitatis, diſtribuere ſolemus ſubjectum in individua, dicendo, *Omnis homo eſt peccator*, *Quidam homo eſt doctus*; Quarum propoſitionum ſenſus eſt, Petrus, Paulus & reliqua individua humana ſunt peccato infecta; Ariſtoteles, Plato, & plures alii ſunt docti. Neque enim peccatum & eruditio ingrediuntur conceptum naturæ humanæ, ſed tantum individuorum.

X I.

Ergo ſubjectum enunciationum univerſalium, & particularium, non tam eſt illud ipſum, quod expreſſum eſt, in natura ſua generica conſideratum, quam ſpecies, & individua ſub illo contenta; ſecus quam indefinitarum: unde quamvis hæ propoſitiones veriſſimæ ſint: *Omnis homo eſt peccator*, *Quidam homo eſt doctus*; iſtæ tamen, *Homo eſt peccator*, *Homo eſt doctus*, in rigore ſumtæ non ſunt veræ; quia utrobique non eſt idem ſubjectum.

XII.

Concludimus præterea, enunciationes univerſales, & particulares, quamvis expreſſione ſimplices, ſenſu tamen complexas, imo & compoſitas eſſe; ita quia hæc, *Omnis homo eſt peccator*, æquivalet huic; *Petrus*, &c. *qui eſt homo*, *eſt peccator*; includit tum incidentem hanc, *Petrus* &c. eſt *homo*; tum principalem iſtam: *Petrus* &c. *eſt peccator*, eaſque ambas copulativas; *Petrus*, *&* *Paulus*, *&* *Johannes*, &c. *eſt homo*: *Petrus*, *&* *Paulus*, *&* *Johannes*, *&c.* *eſt peccator*.

XIII.

In enunciationibus negativis res perinde ſe habet: Ad hoc ut

ut unum dicatur *non eſſe* alterum, non requiritur, ut nullam habeant communem menſuram, ſeu nihil in quo conveniant; ſed ſaltem ut id in quo conveniunt non exhauriat prædicatum, quamvis conceptum ſubjecti exhaurire quandoque poſſit; ut, *Homo non eſt brutum*, *Animal non eſt homo.* Hæc enim poſterior propoſitio non minus vera eſt, atque iſta; *Animal non eſt lapis;* propterea quia conceptus hominis non reperitur totaliter in conceptu animalis; etſi pars hujus conceptus, nempe animalitas exhauriat integrum animalis conceptum. Interim hæc falſa foret: *Nullum animal eſt homo*; quia ſubjectum hujus propoſitionis non tam eſt animal, quam ſpecies, vel individua, animalis; quorum aliqua homines ſunt; adeoque & hæ propoſitiones ſenſu complexæ & disjunctivæ ſunt. Atque hinc petitur fundamentum converſionis propoſitionum, indeque natæ diverſitatis ſyllogiſmorum; de quibus fuſius agendi forte brevi dabitur occaſio. No.XVII.

XIV.

Ratiocinatio Syllogiſtica nititur, ceu fundamento, Regula de Omni & de Nullo, item Regula Proportionis: Ratiocinatio Algebraïca axiomatibus: *Quæ uni tertio æqualia ſunt, inter ſe ſunt æqualia; Quod uno æqualium majus vel minus, altero quoque æqualium majus minuſve eſt*, ut ſi $a = b$, & $c = b$, erit etiam $a = c$.

XV.

Omnis diverſitas modorum & figurarum provenit a diverſimoda extenſione & comprehenſione ſubjecti & prædicati, & varietate converſionis propoſitionum; At quia quantitates, quæ objectum ſunt ratiocinii algebraïci, ſemper adæquate & ſecundum ſe totas ſumuntur, atque æquatio earum ſimpliciter convertitur; hinc fit ut ratiocinium, circa illas occupatum, reſpondeat ex parte ſyllogiſmis expoſitoriis, eademque ſit ſequelæ neceſſitas, quomodocunque diſponantur termini: Perinde enim eſt, ſive ita colligas:

$a = b$

Digitized by Google

No. XVII.

$a = b$	$b = a$	$a = b$	$a < b$	$b > a$	$a < b$
$c = a$	ſive $c = a$	ſive $a = c$	Item $c = a$	ſive $c = a$	ſive $a = c$
Ergo $c = b$	E. $c = b$	E. $c = b$	E. $c < b$	E. $c < b$	E. $c < b$

quarum diſpoſitionum prima primæ, ſecunda ſecundæ, tertia tertiæ reſpondet ſyllogiſmorum figuræ.

XVI.

Quia omnis ratiocinatio ſyllogiſtica ſolis recenſitis regulis nititur; cum in negotio algebraïco, præter allata axiomata, alia plura in ſubſidium adhibenda ſint, v. gr. *Si æqualibus æqualia addas, ab æqualibus æqualia auferas, æqualia æqualibus multiplices vel dividas; tota vel reſidua ſunt æqualia*, &c. quibus nititur varia reductio per additionem, ſubtractionem, multiplicationem, diviſionem, extractionem radicum, &c. hinc fit ut, in reductione minimæ æquationis algebraïcæ, plus lateat ingenii & judicii, quam in difficillimis ratiociniis, in communi alias vitæ uſu obviis.

XVII.

Concludimus cum celeberrimo Authore *Scrutinii veritatis*, qui Lib. VI. cap. V., ita infit: *Algebra eſt vera Logica, ad detegendam veritatem, omnemque menti, quanta capax eſt, extenſionem dandam utilis.*

THESES MISCELLANEÆ.

I.

In tanta Idearum multitudine, ut confuſio vitetur, opus eſt; ut in certas referantur claſſes; velut Typothetæ ſolent ſuos typos in loculamenta: ſed parum refert in quot, cum poſſit Typotheta diſtinguere loculamenta, vel juxta linguas, vel juxta formas, vel juxta characterum magnitudines, &c.

II.

Sagacitas mentis in inveniendo & apprehendendo, appellatur *Ingenium*; in diſcernendo & judicando *Judicium*.

III. Er-

III. No.XVII.

Errores hominum plerumque oriuntur, non tam ex eo quod male ratiocinentur, quam quod male judicent de rebus non evidenter perſpectis.

IV.

Author *Artis cogitandi* male in exemplum proprietatis circuli affert æqualitatem radiorum, cap. 6. Part. 1. cum ſit ejus differentia, ut in *Centone* meo, Th. 16. monui.

V.

Riſibilitas eſt riſibilis proprietas.

VI.

Præcipuus Regularum & Canonum abuſus conſiſtit in eo, quod, cum plerunque mille laborent ambiguitatibus terminiſque vagis, & obſcuris ſint concepti, ex illis male intellectis ſoleamus concluſiones inferre; cum potius ex re perſpecta canones deberent explicari. Ita canon iſte, *Nihil poteſt alteri dare quod non habet*, anſam dedit errori, quo ſibi perſuaſit vulgus Philoſophorum, ignem non poſſe calefacere, niſi ipſe ſit calidus, id eſt, niſi poſſideat intra ſe ſimile quid illi rei, quam in nobis producit.

VII.

Luxuries & prodigalitas, non minus ac avaritia, redolent animum humi defixum & terrenis immerſum; quoniam iſta in poſſeſſione, illa in uſu rerum, ſummum bonum quærit.

VIII.

Quare Philoſophus nec comeſſator, nec potator; item nec avarus, nec parcus; ſed nec liberalis, nec prodigus eſſe poteſt.

IX.

Avarior eſt, qui muneribus Judices corrumpit, quam qui non corrumpit.

X.

Neglectus veſtium non ſemper ſordidæ avaritiæ, ſed quando-

No. XVII. que virtutis illi maxime adverſæ, nempe contemptus rerum terrenarum, ſignum eſt.

XI.

An ſi quis in cauſa filii novercæ judicare poſſit, nequeat in cauſa fratris novercæ? Neg.

XII.

Circa ſaltationes, & choreas mixtas, ſcrupulus hæret, Si licitæ & honeſtæ, cur antehac prohibitæ? Si illicitæ & turpes, cur nunc conceſſæ? Si adiaphoræ, cur a quodam pio Patre definiuntur, Circulus, cujus centrum eſt Diabolus?

XIII.

Multa lectura in illis ſcientiis, quæ rationis vi addiſcuntur, eo ſolummodo nomine commendanda eſt, quod per illam nobis innoteſcat, quid inventum ſit, quidque inveniendum reſtet; ne breve vitæ curriculum, ſcientiarum promotioni deſtinatum, impendamus inveniendis illis, quæ alii ante nos invenerunt: quod alias plerumque fit, ubi hac lectura ſumus deſtituti. Ita de PASCALIO refertur, eum adhuc puerum demonſtrationem plurimarum EUCLIDIS propoſitionum proprio marte adinveniſſe, priusquam de Matheſi quicquam inaudiviſſet. Pariter HUGENIUS ſe primum credidit inventorem novi illius Baroſcopii, in *Ephemerid. Erud. Gall.* anni 1672. ad diem 12. Decembr. deſcripti; cujus tamen conſtructionem CARTESIUS, recenſente alicubi PASCALIO, diu ante tentaturus fuerat. Hoc & mihi (ſi parva magnis componere fas eſt) in multis uſu venit; præcipue in iis, quæ de angulo contactus, de invenienda Periodo Juliana, de gravitate ætheris &c. meditatus fueram, antequam varias Eruditorum Ephemerides, alioſque libros evolviſſem.

XIV.

Licet autem inventionis gloria iis, qui ſic tempore & fortuna poſteriores exiſtunt, a primis inventoribus prærepta ſit; arte tamen & ingenio hiſce neutiquam impares cenſendi ſunt.

XV. Præ-

Digitized by Google

X V.

No.XVII.

Præter uſum memoratum, neſcio quem alium lectura haberet, niſi forte apud illos, qui propria induſtria & ingenio deſtituti, ex aliis ſapere opus habent.

X V I.

Omnes Diſciplinæ Matheſi indigent ; Matheſis nulla ; ſed per ſe ſola ſibi ſufficit.

X V I I.

Qui ſibi, Matheſi duce, formavit judicium, nihil invenit tam arduum, quin dicto citius determinare queat, quid circa illud dici , fieri, aut ſciri poſſit, vel non poſſit.

X V I I I.

Quocirca , nullum certius indicium , an ad aliquid arduum ſuſcipiendum quis idoneus ſit , quam ſi rebus mathematicis percipiendis aptus ſit: unde juventus ante omnia Matheſi initianda; ut ſi inepta deprehenſa fuerit , a difficili ſtudio mature removeatur.

X I X.

Quanto cæteris ſcientiis præſtet, vel ex eo conſtat, quod cum reliquæ de rebus, in ſe certiſſimis ac conſtantiſſimis, non niſi probabiliter, illa de rebus maxime fortuitis & caſualibus, v. gr. ſortitionibus , apodictice & certiſſimo ratiocinio diſcurrit. Exempla ſunto.

X X.

Sempronius amicos Titium & Caium præmio centum Imperialium mactare vult ; jubetque ut de illo æqua ſorte certent : quare hi, aſſumentes ſinguli 12 nummos, ludunt tribus teſſeris, hac conditione, ut ſi 11 puncta jaciantur, Titius tradat nummum Caio; at ſi jaciantur 14 puncta , Caius tradat nummum Titio; & ut ille præmium reportaturus ſit, qui primum omnes nummos habuerit. Promittit tamen inſuper Caius, ſi perdiderit, centum alios Imperiales de ſuo erogare colluſori, propterea quia deprehenſum fuit, ſæpius evenire poſſe 11 quam 14 puncta. Ludunt,

No. XVII. dunt, vincit Caius; Titius putat ſe circumventum eſſe; rem defert ad Judicem, qui pronunciare debet, utrum æqua ſorte ſic contenderint, necne. Quotuſquiſque nunc Judicum eſt, qui crederet Caium impoſtorem? Ego interim, depoſitis, quandocunque libuerit centum Imperialibus contra unum, Titii perſonam ſuſtinebo.

XXI.

Titius Caiam ducit uxorem; Pater utriuſque conjugis, ſuperſtes adhuc & opulentus. Titius ita format contractum matrimonialem, ut ſi nata fuerit ex conjugio proles, uxorque ante maritum vita ceſſerit, maritus bonorum communium, tam in matrimonium utrinque allatorum, quam hæreditate acquiſitorum, auferat duas tertias, utriuſque videlicet parente, vel ſuperſtite adhuc, vel mortuo: vel, ut dimidiam tollat, ſi Caiæ pater vita functus fuerit, ſuperſtite altero: vel denique, ut tres quartas partes accipiat, reliquam liberi, ſi ſuus Pater obierit, ſuperſtite viciſſim Caiæ parente. Cum autem Parenti Caiæ hic ultimus articulus videretur iniquior; proponit futurus gener, ut abſque diſtinctione caſuum, omnia uno includantur articulo, ejus tenoris, ut viduus duas tertias auferat, quicquid futurum ſit de conjugum parentibus. Annuit Caiæ Pater. Quæritur utrum contractus matrimonialis, hoc poſteriori modo conceptus, ſit faventior Caiæ liberis, quam priori, quem initio propoſuerat Titius; & quem recuſaverat Caiæ Pater? Neg. Nam, ſi futuræ portiones hæreditariæ Titii, Caiæve, propemodum æquales æſtimentur, vocenturque ſingulæ, a; & ſumma bonorum in matrimonium utrinque allatorum, b: erit expectatio Titii, juxta primitus propoſitum articulum, $(47a + 47b):72$: at, juxta initum contractum, $(48a + 48b):72$; quæ priore major eſt $(a + b):72$; nec poterit utraque expectatio æqualis eſſe, niſi portio hæreditaria Titii plus quam duplo major ponatur portione Caiæ.

XXII.

Patet hinc, quam JCto neceſſaria ſit Matheſis. Taceo vulgarem quem illi præbet uſum in componendis litibus, circa diviſiones agrorum, &c.

XXIII. Ra-

Digitized by Google

XXIII.

Rationes Profeſſoris MONTRÆI adverſus ſyſtema meum Cometicum allatæ, & *Ephemeridibus Erudit. Gall.* anni 1682 inſertæ, nullius ſunt pretii. No.XVII.

XXIV.

Etiam Abbas CATELANUS **, circa doctrinam de oſcillationibus funependulorum fallitur.

XXV.

Nemo naturam Reflexionis & Refractionis hactenus citra omnem ſcrupulum explicuit: prioris explicationem inveni nuper, quæ mihi plene ſatisfacit; alteram ſi quis explicabit, huic habebo gratias.

XXVI.

Sciatherica, atque hinc etiam automata noſtra publica motum Solis, bonum horæ ſemiquadrantem, tardius inſequi, certiſſimo mihi conſtat indicio.

XXVII.

Si quis de admirando flammæ, nuper, hic Baſileæ, ex cavitate Siphonis per medias aquas ex improviſo erumpere viſæ, phænomeno nobiſcum conferre voluerit; inveniet nos paratos. ††

** *Vide ſupra* Nos. VIII. IX. X.

†† *Vide ſupra* Num. XV.

* *Ad Theſin* XX. Vide *Artem Conjectandi*, Part. I. Probl. 5.

† *Ad* XXI. Problema generaliuspropoſitum vide N°. ſeq. pag. 236, 237. Solutionis ratio hæc eſt. Sit ſumma bonorum in matrimonium utrinque allatorum $= b$; portio hereditaria Titii $= a$, Caiæ $= c$; numerus caſuum quibus accidit Caiam ante Patres mori $= m$; quibus accidit primum mori Titii patrem $= n$; patrem Caiæ $= p$. Ergo probabilitas ejus eventus quo Caia ante ſenes moritur, erit $= \frac{m}{m+n+p}$; ejus quo Caia utrique ſuperſtes eſt $= \frac{n}{m+n+p} \times \frac{p}{m+p} + \frac{p}{m+n+p} \times \frac{n}{m+n}$; illius, quo Caia patri ſuo, non patri Titii ſupereſt $= \frac{p}{m+n+p} \times \frac{m}{m+n}$; ejus denique quo non ſuo, ſed patri Titii, ſupereſt $= \frac{n}{m+n+p} \times \frac{m}{m+p}$.

Jam autem, ſecundum propoſitos articulos, primus caſus Titio dat $\frac{2}{3}b$; ſecundus $\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}c$; tertius $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$; quartus $\frac{3}{4}b + \frac{1}{4}a$. Ejus itaque expectatio

No XVII. pectatio eſt $\frac{m}{m+n+p} \times \frac{2}{3}b +$ $(\frac{np}{(m+n+p)(m+p)} + \frac{np}{(m+n+p)(m+n)})$ $\times(\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}c) + \frac{mp}{(m+n+p)(m+n)}$ $\times(\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c) + \frac{mn}{(m+n+p)(m+p)}$ $\times(\frac{3}{4}b+\frac{3}{4}a) = ((8m^3+17m^2n+14m^2p+9mn^2+24mnp+6mpp+8n^2p+8np^2)b+(9m^2n+9mn^2+16mnp+8n^2p+8np^2)a+(6m^2p+16mnp+6mpp+8n^2p+8np^2)c):12(m+n+p)(m+n)(m+p)$.

Sed, juxta contractum initum, primus caſus & ſecundus Titio dant, ut ſupra, ille $\frac{2}{3}b$, iſte $\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}c$; at tertius dabit $\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c$, quartus $\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}a$. Igitur expectatio Titii erit $\frac{m}{m+n+p}$ $\times\frac{2}{3}b+(\frac{np}{(m+n+p)(m+p)}+$ $\frac{np}{(m+n+p)(m+n)})\times(\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}c)$ $+\frac{mp}{(m+n+p)(m+n)}\times(\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}c)$ $+\frac{mn}{(m+n+p)(m+p)}\times(\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}a) =$ $((8m^3+16m^2n+16m^2p+24mnp+8mn^2+8mp^2+8n^2p+8np^2)b+(8m^2n+8mn^2+16mnp+8n^2p+8np^2)a+(8m^2p+16mnp+8mp^2+8n^2p+8np^2)c):12(m+n+p).(m+n)(m+p)$.

Expectationum itaque differentia eſt $((-m^2n-mn^2+2m^2p+2mp^2)b.-(m^2n+mn^2)a+2(m^2p+mp^2)c):12(m+n+p)(m+n)(m+p)$.

Hinc, ſi, ut in N°. præſenti, fiat $a=c$, & $m=n=p=1$; erit expectatio prior $=(94b+50a+44c):12.3.2.2=47(b+a):72$, poſterior $(96a+48a+48c):12.3.2.2=48(b+a):72$; differentia $(2b-2a+4c):12.3.2.2=(b+a):72$.

Si velis æqualem eſſe utramque expectationem; fac differentiam $(2b-2a+4c):12.3.2.2=0$, habebiſque $a-2c=b$; hoc eſt $a > 2c$.

At ſi ponas, ut in N°. ſequenti, $a=c$, ſed $m=1, n=p=2$; invenies expectationem priorem $=(354b+246a+228c):12.5.3.3=(59b+79a):90$; poſteriorem $=(360b+240a+240c):12.5.3.3=(60b+80a):90$; differentiam $(a+b):90$.

N°. XVIII;

Digitized by Google

N°. XVIII.

THESES LOGICÆ DE CONVERSIONE ET OPPOSITIONE ENUNCIATIONUM,

Quas,

CUM ADNEXIS MISCELLANEIS,

Ad diem 12 *Februarii Ann.* M. DC. LXXXVI,

Tertii Speciminis publici loco

Cl. Competitoribus ventilandas ſiſtit

JACOBUS BERNOULLI, L. A. M.

Editæ primum

BASILEÆ

1686.

Digitized by Google

Digitized by Google

THESES LOGICÆ
DE
CONVERSIONE & OPPOSITIONE
ENUNCIATIONUM.

I.

CONVERSIO *& Oppoſitio* Enunciationum ſunt affectiones earum relatæ, quibus partes alicujus propoſitionis varie immutantur. Num. XVIII.

II.

Converſio tranſponit ſubjectum in locum prædicati, & viciſſim: *Oppoſitio* utrumque ſuo relinquit loco.

III.

In *Illa* ſalva manere debet veritas utriuſque Propoſitionis, & convertendæ & converſæ: in *Hâc* minime.

IV.

Ibi enim explicatur, quibus legibus, quantitas & qualitas E-

Digitized by Google

N.XVIII. nunciationis immutanda veniat, eo fine, ut converſa neceſſario vera maneat: *Hic* exponitur, quid fiat de veritate & falſitate alicujus Propoſitionis, ubi ſecundum quantitatem & qualitatem modis omnibus immutatur.

V.

Quæ ut manifeſta fiant, requiritur duntaxat, ut naturam Enunciationum tam affirmantium, quam negantium propius intueamur, prout eam in nupero noſtro *Parallelifmo* quadantenus excuſſimus.

VI.

Ea eſt Propoſitionis Affirmantis natura, ut attributum uniat cum ſubjecto, non quidem quoad omnem attributi *Extenſionem*, ſed tamen quoad ejus omnem *Comprehenſionem*: quod ibidem innuimus, quando diximus, communem menſuram ſubjecti & prædicati exhaurire debere totum prædicatum; analogia petita a quantitatibus æqualibus, quas eadem communis menſura metitur. Senſus eſt: omne id, quod *comprehenditur* in idea prædicati, reperiri debet in ſubjecto; non item omne id, ad quod *extenditur* prædicatum. Cum enim iſtud ſubjecto plerumque latius ſit, ejus extenſio reſtricta eſſe intelligitur per extenſionem ſubjecti, adeo ut non niſi eam extenſionis ſuæ partem ſignificet, quæ ſubjecto competit. Ex gr. cum dico: *Rhombus eſt Parallelogrammum*, innuere volo, totam ideam Parallelogrammi comprehenſam eſſe in idea Rhombi (quoniam deſtructa unica ideæ hujus parte, Parallelogrammum exuet naturam ſuam, & ceſſat eſſe Parallelogrammum); &, quanquam illa idea extendatur quoque ad alias figuras præter Rhombos, me tamen illam nunc in ſola Rhombi ſpecie conſiderare.

VII.

Negantis contra Propoſitionis genius eſt, ut attributum a ſubjecto ſeparet, quoad omnem attributi *Extenſionem*, non autem præciſe quoad totam ejus *Comprehenſionem*; quod in *Parallelifmo* noſtro ſignificavimus, dicendo, communem menſuram ſubjecti & prædicati non exhaurire debere totum prædicatum, tametſi con-

conceptum ſubjecti exhaurire quandoque poſſit. Senſus eſt: Idea N.XVIII. totalis prædicati non debet reperiri in ſubjecto, utut ejus partes aliquæ ſubjecto competere poſſint; adeoque omne id, ad quod idea totalis attributi *extenditur*, a ſubjecto excludi neceſſum eſt. Ex. gr. Cum dico; *Rhombus non eſt Parallelogrammum rectangulum*, non ſignifico ſubjectum & prædicatum nihil habere commune, (conveniunt enim in eo, quod ambo ſint *Quadrangula*, ambo *Parallelogramma*,) ſed ideam totalem *Parallelogrammi rectanguli* non comprehendi in idea Rhombi, & proinde omnes quoque ſpecies in extenſione ideæ totalis contentas, nempe Quadratum, & Oblongum, de Rhombo negandas eſſe.

VIII.

Patet hinc, attributum omnis Propoſitionis affirmantis, vi affirmationis, ſumi peculiariter; negantis, univerſaliter.

IX.

Ex hactenus dictis, ſi anguſtia chartæ nobis permitteret eſſe prolixiores, facile deinceps reddi poſſet ratio, cur Univerſalis affirmans converti tantum queat *per accidens*; Univerſalis negans & Particularis affirmans *ſimpliciter*; Particularis autem negans converti nequeat omnino.

X.

Id in univerſum verum eſt, affirmantem non poſſe converti in negantem, neque negantem in affirmantem; ex eo enim quod duarum rerum ideæ quoad ſe totas, vel quoad partem, inter ſe conveniunt, non ſequitur, illas ſecundum ſe totas, vel ſecundum partem aliam diſconvenire. De Converſione *per contrapoſitionem*; ubi non manent iidem utrobique termini, ſermo hic nobis non eſt.

XI.

Quod *Oppoſitionem* Enunciationum ſpectat, non eſt ut illi immoremur; ſatis enim attendenti manifeſtum eſt, *Contrarias* ſimul poſſe eſſe falſas, non veras: *Subcontrarias* vice verſa poſſe ſimul eſſe veras, non falſas: *Utriuſque generis* interdum unam veram

 eſſe,

N.XVIII. eſſe, alteram falſam : *Contradictoriarum* autem alteram ſemper veram eſſe, alteram falſam.

XII.

Contrariarum & *Subcontrariarum* una vera, altera falſa eſt; quando vel de ſpecie prædicatur genus, differentia, proprium ſecundi aut quarti modi; vel accidens quoddam inſeparabile, de ſubjecto; vel etiam quando oppoſita de ſe invicem prædicantur: *Illarum* utraque falſa, & *Harum* utraque vera eſt, quando ſpecies prædicatur de genere, vel accidens ſeparabile, de ſubjecto, &c.

XIII.

Occaſione ejus, quod de *Contradictoriis* monuimus, coronidis loco Lectori monſtrabimus, quo pacto verum quandoque ex falſo directe elici poſſit. Ex vera propoſitione, directo & legitimo ratiocinio, non niſi vera inferri poteſt. Ex falſa propoſitione elicitur quidem plerumque falſa concluſio (quo referendæ ſunt Geometrarum ἀπαγωγαὶ, ſeu deductiones ad abſurdum, quibus aſſumpta falſa aſſertione adverſarii devenitur tandem ad propoſitionem aliquam notorie falſam, ut, partem eſſe æqualem toti, aut ad ſimiles abſurditates;) ſed quandoque etiam propoſitionis falſæ, initio aſſumptæ, contradictoria, adeoque vera. Ita EUCLIDES *Lib.* IX. *prop.* 12. ex eo, quod E *dicatur non metiri ipſum* A, directa & legitima conſequentia infert, *Ergo* E *metitur ipſum* A. Sic THEODOSIUS *Lib.* I. *prop.* 12. *Sphæric.* ex eo, quod G *dicatur non eſſe centrum Sphæræ*, evidenti ſequela deducit, Ergo *G eſt ſphæræ centrum.* Atqui hic demonſtrandi modus mirabilis valde & peringenioſus eſt, quo ex contradictorio aſſertionis aſſertio ipſa directa demonſtratione infertur. Quod vero æque ſcientificus ſit, nec minorem pariat certitudinem, ac reliqui, ſic demonſtrari poterit. Adverſarius contradictoriam aſſertionis meæ, aut falſam putat eſſe, aut veram: Si concedat eſſe falſam, eo ipſo aſſertionem meam veram eſſe agnoſcere debet; ſin contra putet eſſe veram, oportet, ut omne id, quod exinde legitima infero conſequentia, adeoque (per hypotheſin) ipſam meam aſſertionem quoque veram agnoſcat, & conſequenter ut utrumque contradicto-

tradicto-

Digitized by Google

tradictoriorum fateatur eſſe verum; quod cum ſit abſurdum, evidenter ſequitur, contradictoriam aſſertionis meæ, ex qua fluxit hoc abſurdum, falſam eſſe, adeoque aſſertionem ipſam, quæ illata fuerat, veram. Q. E. D. N. XVIII.

XIV.

Unde formari poſſet hoc Paradoxum: Ex falſo nonnunquam ſequitur verum, & tamen ſemper abſurdum.

THESES MISCELLANEÆ.

I.

Differentia, quæ conſtituit tertium prædicabile logicum, eſt illud quod, præter genus, primo in qualibet re concipio, quodque proin nulla opus habet demonſtratione: at *Proprium* eſt, quod ex natura rei ſic conceptæ demum fluere intelligo, per præviam demonſtrationem.

II.

Quare unum idemque, pro vario reſpectu, ejuſdem rei nunc differentia poteſt eſſe, nunc proprium; prout videlicet vel hoc, vel illud, *primo* inibi concipio. Ita ſi *Parabolam* conſiderem, ceu Figuram ex cono ſectam, ſectione parallela lateri oppoſito; iſta ſectio erit Differentia Parabolæ; e qua deinceps fluit hæc Proprietas, quod axis ſegmenta ſint inter ſe, ut quadrata ordinatim applicatarum. Sin viciſſim Parabolam contempler, ceu Figuram in plano projectam, cujus ſegmenta axis ſint in duplicata ratione ordinatim applicatarum, attributum hoc erit Differentia; poſſe autem talem figuram ſecari ex cono, hoc erit ejus Proprium.

III.

Locutiones forenſes, quæ fundantur in imputatione; ut cum Sponſor ſolvit, & Debitor ſolviſſe dicitur, vel cum Filius adoptivus dicitur Filius: Item *Locutiones ſecundum apparentiam, aut opinionem vulgi*, quæ fundantur in ſenſuum teſtimonio; ut ſi Co-

 per-

N.XVIII. pernicanus quis diceret, Sol movetur, volens dicere, Terra movetur; aut cum Poeta canit, *Terræque, urbeſque recedunt*, dicturus, navigantes recedere: Hæ, inquam, Locutiones & ſimiles, ſi ad aliquod receptum Troporum genus referendæ ſunt, ad Metaphoram referuntur.

IV.

Ad quæſtionem, *Utrum Monarchia præferenda ſit Ariſtocratiæ?* cum diſtinctione videtur reſpondendum: Si illi, penes quos ſuprema eſt poteſtas, in utroque regimine ſunt boni, Illa Huic; ſi mali, Hæc Illi præferenda erit: propterea, quoniam Princeps majoribus viribus opibuſque pollet, tum ad ſalutem populi procurandam, ſi bonus eſt; tum ad tyrannidem exercendam, ſi malus, quam Magiſtratus in Republica, cujus reditus ſunt modici, poteſtas, partim in ſe limitatior, partim adverſarum factionum obice impedita.

V.

Omnis Democratia, niſi Anarchia ſit, Ariſtocratia eſſe debet.

VI.

Ubi proprii emolumenti aviditas, & partium ſtudium in Rempublicam irrepſit; ſatius eſt, vacantia munia publica ſorte, quam ſuffragiis redintegrari. Quanquam autem hoc optandum ſit, ob id ipſum tamen, quia lues illa irrepſit, ſperandum vix eſt.

VII.

De bonitate vel malitia alicujus facinoris, plerumque ab eventu, qui perverſus hominum mos eſt, judicare ſolent. Si ſubditi armis ſua jura tueri velint, ſiniſtroque fruantur ſucceſſu, audient ſeditioſi & rebelles; ſi proſpero, erunt aſſertores libertatis, propugnatores fidei, &c.

VIII.

Regulæ accreſcendi & decreſcendi, quas in Teſtamentorum executione præſcribunt Juriſconſulti, ſimiles ſunt *Regulæ* Arithmeticæ, quam *Pigri* vocant, in illorum inventæ gratiam, qui Abacum Pythagoricum memoriæ imprimere, vel nolunt, vel nequeunt.

IX. Ad

Digitized by Google

IX. N.XVIII.

Ad reddendam cauſam phænomeni naturalis, non ſufficit talem exhibere, ex qua quomodocunque ſequatur effectus; ſed requiritur, ut ex illa effectus præciſe ea, qua conſpicitur, quantitate ſequatur: Ita ad explicandam Reflexionis naturam, non ſufficit oſtendiſſe, cur corpus, offendens firmum obicem, reflectatur quomodocunque; fieri namque poſſet, ut cauſa quæ ſic affertur, ſi revocaretur ad calculum, exhiberet angulum reflexionis inæqualem angulo incidentiæ: Id quod indicium præberet, non imperfecte, ſed omnino falſo explicatam eſſe.

X.

Quare Phyſicus, abſque Matheſeos ope, ſuarum aſſertionum nunquam certus eſſe poteſt; nec Matheſis, ob majorem ſaltem perfectionis gradum, ſed abſolute, ad Phyſicam neceſſaria eſt.

XI.

Diſciplinæ Mathematicæ concretæ, quales ſunt, Phyſica, Medicina, Aſtronomia, Optica, Statica, Baliſtica (& ſi vis Aſtrologia) &c. Matheſi abſtractæ certa tantum principia, ceu fundamenta, ſuperaddunt, partim alibi probata, partim ſola experientia hauſta, ſuper quibus deinceps non minus in rigore geometrico ratiocinandum, atque in Matheſi abſtracta ſuper notionibus communibus, ceu Axiomatibus nobiſcum natis: Ita Phyſica ſupponit *Leges motus*: Medicina *Fabricam corporis humani*: Aſtronomia *Fabricam*, *ſeu Syſtema mundi*: Aſtrologia *influxum Aſtrorum in ſublunaria, & quod Fata hominum, urbium, regionum, dependeant ab illa cœli configuratione, quam obtinuit, cum in lucem ederentur, vel primordia ſumerent*: Catoptrica, *Quod anguli incidentiæ, & reflexionis ſint æquales*: Dioptrica, *Quod Sinus angulorum incidentiæ & refractionis ſint proportionales*: Statica, *Quod momenta creſcant pro ratione diſtantiarum ab hypomochlio*: Baliſtica, *Quod ſpatia a gravi cadente percurſa ſint in ratione duplicata temporum*.

XII.

Patet hinc, certitudinem harum ſcientiarum unice dependere a certi-

N.XVIII. certitudine ipſorummet principiorum, non a modo formandi concluſiones, quæ omnes evidentiſſimo ratiocinio ex principiis deduci debent. . Quæ ratio eſt, cur Matheſis abſtracta ſit invictæ certitudinis; Aſtrologia vana & futilis; Cæteræ vero, mediæ certitudinis inter utramque: quoniam talia ſunt principia, quibus illæ ſuperſtructæ ſunt.

XIII.

Patet etiam, ad quaſcunque ſcientias quæ quantitatem pro objecto habent, addiſcendas, paucorum principiorum prærequiri cognitionem, ex quibus, qui Matheſin abſtractam callet, reliqua proprio marte & exiguo labore adinvenire & eruere potis eſt.

XIV.

Motum Projectorum, non tantum ſecluſa, ſed etiam poſita conſideratione reſiſtentis medii, fieri deprehendo in curva parabolica, contra aſſertum WALLISII, *Cap.* X. *Prop.* 8. *Mechan.*

XV.

Pulex inſultum faciens in Terræ globum, illum loco dimovere valet; contra quartam Regulam motus *Carteſianam.*

XVI.

Non datur Centrum magnitudinis, ſicut Centrum gravitatis.

XVII.

Fieri poteſt revera, & citra verborum luſum, ut globus perfecte rotundus ſuper perfecte lævigato plano declivi in ſuperficie Terræ conſtitutus, non deſcendat rotando.

XVIII.

Liquor homogeneus in ambobus ſiphonis cruribus, ſive ea ſint æqualis, ſive inæqualis craſſitiei, propterea ad eandem ſe componit altitudinem, quia tum demum commune gravitatis centrum utriuſque liquoris infimum, quem poteſt, locum occupat.

XIX.

Non dantur Puncta, Lineæ, Superficies phyſicæ, ſed mathematicæ.

XX. Per

X X. N.XVIII.

Per vulgarem Regulam alligationis, certus tantum & determinatus invenitur ſolutionum numerus; animadverto autem ejuſdem quæſtionis (ſaltem ubi pluſquam duo miſcibilia miſcenda ſunt,) infinitas dicto citius, & quidem in meris integris, reperiri poſſe ſolutiones: Dico enim, ſi binæ differentiæ alternæ æque multiplicentur juxta quemvis numerum, & binæ aliæ juxta alium numerum, & ita porro; quod hi æque multiplices exhibituri ſunt novam rationem, qua mixtio optata perfici poterit.

X X I.

In *Stereometria* G. F. M. *Propp.* IX. XI. XX. male menſurantur Pyramides & Coni decurtati, (quales ſunt vaſa illa vinaria, quæ noſtrates vocant *Bockten*,) reducendo illos per æquationem baſium ad Priſmata & Cylindros. Quam enim ille reperit truncatæ pyramidis ſoliditatem 312 pedum, revera duntaxat eſt pedum 304. Differentia ſatis ſenſibilis, quæ toleranda non eſt.

X X I I.

Nec doliorum capacitas (etiamſi perfecte cylindrica forent) virga viſoria cubica hic uſitata accurate exploratur.

X X I I I.

Species viſibiles ex omnibus punctis in omnia radiare; & Animam eſſe totam in toto, & totam in qualibet parte: Myſteria ſunt antiquæ Philoſophiæ, noſtrum hoc tempore captum ſuperantia.

X X I V.

Cæcus quandoque melius de coloribus judicat vidente.

X X V.

Modum docendi Cæcum ſcribere, qui in *Magia naturali*, ſeu *Jocoſeriis naturæ & artis*, *Centur.* 3. *Prop.* 22. ex CARDANO lib. 17. *Subtil.* depromptus legitur, in praxi non ſuccedere, tum ratio, tum experientia me docuerunt. Feliciorem inivi antehac viam cum lectiſſima Virgine E. E. a W.

Digitized by Google

N.XVIII.

XXVI.

Oculorum ſuffuſio non provenit ab opaca humoris cryſtallini pellicula, ut exiſtimat ROHOLTUS *Part. pr. Cap. ult.* ſed a ſedimento in ipſo humore aqueo collecto.

XXVII.

Cuſpidem enim acus, qua ſedimentum removetur, non ſolum non attingere humorem cryſtallinum, docet experientia: ſed & extra humoris cryſtallini focum conſtitutum eſſe, colligitur ex eo, quod cuſpis, durante operatione, a patiente oculo diſtincte videatur. Cur vero inverſa apparere debeat, ejus quidem rei cauſam nondum ſatis aſſequor.

XXVIII.

Eo momento, quo ambo oculi conjunctim objectum inſpiciunt, uterque ſeparatim peculiare inſpicit.

XXIX.

Ex unica obſervatione umbræ, de ſtylo normaliter infixo quovis tempore projectæ, declinationem Plani quomodolibet inclinati inveſtigare licet. *

XXX.

Invenienda ſit analytice univerſalis Regula, quæ exhibeat, quo anni tempore, ſub data Poli elevatione, contingant maxima & minima crepuſcula? †

XXXI.

Solutio Problematis de Pactis dotalibus nuperi mei *Parallelismi* Adnexis inſerta, ſupponebat, æque facile accidere poſſe, ut Senes Caiæ ſupervivant, ac Caia ſenibus. At quoniam probabilius eſt, Caiam ut juvenculam Senibus ſupervicturam; hinc exceſſus, quo expectatio Titii, juxta articulum initio propoſitum, ſuperatur ab ejus expectatione, juxta articulum correctum, revera quidem minuitur; attamen hæc perpetuo ſuperat illam, quantacunque ponatur etiam probabilitas pro vita diuturniore Caiæ: quod generali comparatione oſtendere facile eſſet. Unicum tantum moneo: Si duplo probabilius ſit, Caiam ſupervicturam Seni,

* *Videatur Numerus.* XXXVI. † *Vid. Numerus.* LIII.

Digitized by Google

ni, quam Senem Caiæ, prior expectatio Titii erit $(79a+59b)$: N.XVIII.
90; poſterior $(80a+60b):90$; quarum differentia $(a+b):90$. Unde patet ad habendas veras Titii expectationes, requiri ut præciſe determinetur, quanto probabilius ſit, Caiam alterutri Seni ſupervicturam. Quanquam autem id determinatu videri poſſet omnino impoſſibile, erui tamen quodammodo poteſt, inſperato calculo, ex obſervationibus factis ſuper catalogis demortuorum, quales *Pariſiis* & *Londini* menſtruatim & hebdomadatim diſtribui ſolent. Obſervatum fuit ex collatione plurium iſtiuſmodi catalogorum (ut narrant *Ephem. Erud. Gall.* Ann. 1666. Nº. XXXI.) quod ex centum infantibus eodem tempore natis, elapſo ſexennio, ſuperſtites remaneant 64: elapſis annis XVI, 40: annis XXVI, 25: annis XXXVI, 16: annis XLVI, 10: annis LVI, 6: annis LXVI, 3: annis LXXVI, 1: annis LXXXVI, 0. Quo poſito, & ſubducto calculo, deprehendo, contra 59 caſus, qui juvenculam annos XVI egreſſam, ante Senem LVI annorum, vita privant, non niſi 101 caſus eſſe, quibus accidit contrarium; unde colligo non plane duplo probabilius eſſe, ut juvencula Seni ſupervivat, quam ut hic illi; adeoque expectationem Titii, juxta inita pacta, ſuperare eam, quam habuiſſet juxta primitus propoſitum articulum, quantitate omnino majore quam eſt $(a+b):90$.

XXXII.

Coronidis loco placet hic adjungere, quæ circa ludum pilæ reticularis, a nemine hactenus obſervata, minime vulgari calculo reperi:

I. Si quatuor, verbi gratia, luſibus conſtare debeat victoria; duoque Colluſores A & B æqualium ſint virium; A evicerit jam tres luſus, & B duos; A poterit deponere 3 imperiales contra 1: Si A tres luſus & B unum; deponet A 7 contra 1: Si A tres luſus, & B nullum; deponet A 15 contra 1: &c. Si A duos luſus & B unum, deponet A 11 contra 5: &c. Si A tres luſus, & præterea puncta quindecim, B vero duos luſus & puncta 45; deponet A 9 contra 7: &c. Atque hac ratione conſtruxi Tabel-

N.XVIII. Iam ad ſingulos caſus, qui accidere poſſunt inter colluſores pares.

II. At ſi Colluſorum unus altero ſit peritior, danda eſt imperitiori prærogativa aliquot numerorum, ut æquo marte certetur: Reperio autem, Si A duplo peritior ſit; illum Colluſori concedere poſſe puncta 30, (& quidem cum aliquali adhuc lucro pro ſe;) Sin triplo; illi concedere poſſe minus quam 45, ſed multo plus quam 30; adeoque ad æquandam, quantum fieri poterit, ſortem, dare debere ipſi B 45, ſumendo ſibi 15: &c.

III. Quod ſi A concedat ipſi B prærogativam aliquot punctorum, eoque ipſo ſors æquata ſupponatur; atque viciſſim indagandum ſit, quanto ille hoc peritior ſit: animadverto, ſubducto calculo, peritias Colluſorum eſſe incommenſurabiles inter ſe, id eſt, veram illorum rationem nullo numero poſſe exprimi, tametſi id fieri prope verum poſſit. Ita ſi A concedit ipſi B ſemi-quindecim; erit ipſo peritior $1\frac{1}{15}$: Si quindecim; erit peritior $1\frac{3}{15}$: ſi ſemi-triginta; ſuperabit ejus peritiam $1\frac{3}{5}$: ſi triginta; erit agilior ipſo $1\frac{9}{15}$: ſi ſemi-quadraginta-quinque $2\frac{3}{5}$: ſi quadraginta-quinque; $4\frac{1}{5}$ vicibus circiter; &c.

IV. A concedit ipſi B ſemi-triginta, & ipſi C 45: Quantum concedere poteſt B ipſi C? Reſp. Semi-quadraginta-quinque.

V. A concedit ipſi B ſemi-triginta, & B ipſi C ſemi-quadraginta-quinque. Quantum concedet A ipſi C? Reſp. Quadraginta-quinque.

VI. Si agilitates trium Colluſorum A, B, C, ſeparatim ſpectatorum ſint in ratione 3, 2, 1; ludatque A contra B & C, illis concedere poteſt paulo plus quam triginta.

VII. Si agilitates quatuor Colluſorum A, B, C, D, ſeparatim ſpectatorum habeant ſe, ut 1, 5, 2, 3, ludantque conjunctim A & B contra C & D: hi illis concedere fere poſſunt ſemi-quindecim.

VIII. Si A poſſit concedere B 45 puncta; malit autem largiri prærogativam in luſibus integris, quam in punctis; quæritur, quot integros luſus ipſi concedere debeat? *Reſp.* Non pauciores quam 35 ex luſibus 36. *FINIS.*

Videatur de hiſce Calculis Epiſtola Auctoris *Gallice ſcripta & ad calcem* Artis conjectandi *edita.*

Digitized by Google

N°. XIX.

Dni. BERNOULLI
DUBIUM CIRCA CAUSAM GRAVITATIS a rotatione Vorticis Terreni petitam,

Communicatum in litteris Lipſiam miſſis ad .....

CONSULEBAM antehac per litteras Cl. STURMIUM Profeſſorem Altorfinum, ſuper quædam non exigui momenti dubia phyſica. Palmarium eorum, quod me ſemper torſerat, & torquet etiamnum, ſpectabat explicationem mechanicam cauſæ gravitatis a Terreni Vorticis gyratione petitam. Reſpondebat paulo poſt perhumaniter & ingenioſe Eruditus Vir; non ita tamen, ut pertinacius hærentem ſcrupulum prorſus exemerit. Quare ſecunda vice ejus laceſſivi oraculum, alteris ad ipſum datis litteris, quas fruſtra expectato diu reſponſo, ad manus ejus perveniſſe ſubdubito. Ille interim, quæ privatim inter nos acta fuerant, impertivit publico, inſertis, cum Dubio meo, tum ſua ad illud Reſponſione, paragrapho XXIII. Epiſtolæ ſuæ ad *Henricum* MORUM exaratæ, annexæque ſecundæ parti Collegii Curioſi, quod non ita pridem publicum aſpicere paſſus eſt. Id cum vidiſſem, judicabam haud ægre laturum Virum Celeberrimum, ſi & inſtantiam meam publici juris fieri paterer: ut ſi vel ille, vel quiſpiam alius nodum ſolveret, ei haberent omnes mecum naturæ Curioſi gratias. Dubium autem meum primitus propoſitum ſic habebat. „ Inter varias Doctorum opinio- „ nes, illa mihi maxime videtur plauſibilis, quæ gravitatem cor- *Acta Erud. Lipſ. 1686. Febr. p. 91.*

No. XIX. „ porum terreſtrium derivat a gyratione materiæ Terram ambien- „ tis, ejuſque conatu recedendi ab ejus centro. Vereor tamen, ne „ non & hæc cum Mechanicæ legibus accurate ſatis conſpiret: „ Poſita enim hac hypotheſi, certum eſſe puto, corpora gra- „ via ſecundum illam lineam detruſum iri, ſecundum quam ma- „ teria ſubtilis a Terra recederet: recedere conatur autem quæ- „ libet particula, (qui genius eſt rotationis) ſecundum li- „ neam talem, quæ in eodem jacet plano cum circulo per „ rotationem particulæ deſcripto, ideſt, ſecundum lineam pa- „ rallelam Æquatori. Ita dum punctum A (*Vide Fig.* 1.) „ circa punctum B motu diurno deſcribit parallelum A C, acqui- „ rit conatum recedendi ſecundum lineam A D in eodem plano „ jacentem cum A C, parallelamque Æquatori F E. Quare neceſ- „ ſum omnino eſſet, ut corpora gravia viciſſim per lineam D A „ repelleret, non vero per perpendicularem G A; ſicque ſub no- „ ſtra latitudine gravium lapſus a perpendiculo ad horizontem in- „ clinaret 48 gradibus, augereturque ſubinde cum ſphæræ obliqui- „ tate.“ Ad quæ ille reſpondit ſequentia: „ Quod naturam ſpectat „ gravitatis, in eo primum inter nos convenit, quod non alia „ plauſibilior videatur, aptiorque explicandæ rei difficillimæ hypo- „ theſis ea, quæ gravitatem corporum terreſtrium derivat a gyra- „ tione materiæ Terram ambientis, ejuſque conatu recedendi *ab* „ *ejus centro*, quæque, ſi verbis hiſce, quibus eam recte con- „ cepiſti, firmiter inhæreas, ea quam deinceps adjungis, difficulta- „ te nihil urgebitur, ut pote quæ ſupponit conatum recedendi „ non a centro Terræ, ſed a centro circuli Æquatori paralle- „ li, quo poſito, neceſſum eſt illud ἄτοπον ſequi quod tu in- „ fers, quodque idem *Hobbianæ* hypotheſi pluribus objicit *Hen-* „ *ricus* Morus, *Enchiridii* ſui *Metaphyſici* pag. 115. ſeqq. „ (Edit. prioris). Enimvero, cum iſta ætheris circa Terram ſup- „ poſita gyratio, vorticeſque mundani omnes, ad explicanda „ plurima phænomena alias inexplicabilia valde accommodi, cau- „ ſam naturalem habere non poſſint, ſed ad arbitrium ac ſapien- „ tiſſimam Dei diſpoſitionem veniant reducendi; talis ipſorum „ concipi debet coordinatio, quæ fini obtinendo poſſit apta vi- „ deri.

Digitized by Google

„ deri. Quod ſi ergo vorticum aut orbium iſtorum cæleſtium No. XIX.
„ fluidorum talem gyrationem ſupponamus, qualis in orbibus
„ aut globis ſolidis contingit, ut partes ſingulæ ſingulos etiam
„ circulos, circa ſingula centra deſcribant, totusque adeo vortex
„ non tam circa centrum, quam circa axem aliquem convolva-
„ tur, non ſolum hoc, de quo nunc ſermo nobis, incommodi
„ ſequetur; ſed neceſſum etiam foret, hoc motu vorticoſo ſtel-
„ las & corpora mundana, non ſphærica, ſed cylindrica potius
„ facta; ſub polis gravitatem non eſſe, &c. Quamobrem in vor-
„ ticibus hiſce fluidis, in quibus particulæ ſingulæ gyrare ſuppo-
„ nuntur, ita ſingulorum circulos Æquatori parallelos oportet ſta-
„ tuere, meo judicio, ut omnes tamen gyrationis ſuæ impetum
„ ex uno eodemque Æquatoris centro nactas concipiamus, ea-
„ rundemque adeo conatus recedendi ab uno eodemque puncto de-
„ pendeat: quo poſito, ea quæ te urget difficultas ſponte ſua eva-
„ neſcet; prout adjectam figuram noſtram cum tua comparanti
„ manifeſtum erit. Poſſe autem corporis alicujus motum circula-
„ rem conjunctum eſſe cum conatu recedendi, non ſolum a cen-
„ tro proprio, hoc eſt, puncto in ipſo plano circuli medio, ſed
„ etiam ab alio quodam puncto tanquam polo ſuo, exemplo fundæ
„ conſtare poteſt, qua circumactus (*Fig.* 2.) in orbem IKL, lapis L,
„ non ſolum a centro O, ſed etiam, ac vel maxime, a manu rotan-
„ tis M, recedere nititur, conatu in ipſa manu abunde ſenſibili.

Hæc tum ille. Inſtantia vero, quam huic reſponſioni deinceps oppoſui, his concepta erat verbis: „Quod quæſtionem de natu-
„ ra gravitatis, quam a gyratione materiæ Terram ambientis,
„ ejuſque conatu recedendi ab ejus centro probabiliſſime derivari
„ dixeram, luſum quæris in verbis, *ab ejus centro:* agnoſco non
„ ſatis circumſpecte me locutum, dicendumque fuiſſe, *a centro*
„ *circuli Æquatori paralleli:* utut interim verum ſit, materiam
„ illam non poſſe ab iſto centro recedere in directum, quin ſi-
„ mul a centro Terræ recedat, quamvis oblique: ita dum punc-
„ tum *c* (*Vide Fig.* 3.) recedit a *b*, in directum per lineam *c d*,
„ recedit eadem opera a centro Æquatoris *a*, linea *a d* exiſtente
„ majore quam *a c*: adeo ut quamvis dixerim, ætherem habere

reco-

No. XIX. „ recedendi *a centro Terræ* conatum, ſubintellige *obliquum* ex *c* „ in *d*, eadem tamen maneat difficultas; quare videlicet æther re- „ pellat corpora gravia verſus idem centrum, via directa potius „ per lineam *da*, quam iterum obliqua per lineam *dc*. Ad tol- „ lendam hanc difficultatem, Vorticum diſpoſitionem ais conci- „ piendam eſſe talem, quæ fini obtinendo poſſit eſſe apta, cir- „ culoſque a ſingulis particulis deſcriptos ita ſtatuendos, ut om- „ nes gyrationis ſuæ impetum ab uno ſphæræ centro nactæ intel- „ ligantur. Veriſſime ſane! Atque id unicum eſt, quod concipi „ a me non poſſe conqueror, nec poſſe a quovis alio puto, „ non magis atque concipere poſſumus, ſingula puncta in ſphæ- „ ræ convolutione deſcribere circulos maximos, quorum utrum- „ que Mechanicæ legibus æque adverſari judico: ſive enim Vor- „ tices fingantur ſphærici, ſive cylindrici, ſolidi ſive fluidi, nul- „ la eorum concipi poterit ratio alia, quam quæ fiat circa axem „ immotum, cujus ſingula puncta ſint centra totidem circulorum „ parallelorum in ſuperficie ſphæræ deſcriptorum, atque gyratio- „ nis impetum non a centro ſphæræ, ſed a propriis centris nan- „ ciſcentium; uti patere potuit, granis arenæ in globum velociſ- „ ſime in gyrum actum conjectis, quorum unumquodque reſiliet „ per planum ſui circuli.

„ Ad exemplum Fundæ, dubito illud cum ſucceſſu tentari poſ- „ ſe, ut ſcribis; quin crediderim potius, fruſtraneum fore cona- „ tum rotandi, in manu extra planum circuli a lapide deſcriben- „ di conſtituta; propterea quod hoc caſu mihi perſuadeam, non „ tenſum fore funem, ſed remiſſum, atque eo ipſo probaturum, „ nullum talem eſſe in lapide a manu recedendi niſum; cum ſi „ quis eſſet, is utique funem extenderet. Pone vero funem ex- „ tendi, ſentirique in manu lapidis conatum, cui conſtabit co- „ natum iſtum directe tendere a manu rotantis, non ſecundario „ & oblique tantum, primario niſu facto per planum circuli a „ lapide deſcripti? Sed demus æque fortiter recedere conari la- „ pidem, tum a manu rotantis, tum a centro gyri ſui; nulla „ foret ratio tamen, cur ſi aliud repelleret corpus, id faceret „ verſus manum potius, quam verſus gyri ſui centrum; uti ſup-

„ po-

„ ponimus ab æthere repelli gravia, verſus Terræ centrum dun- No. XIX.
„ taxat, non verſus centrum circuli paralleli. Accipe Clar. Vir, „ quæ mihi inciderunt hac de re conjecturæ. Conſideravi duos „ in ſphæra circulos, in quodam puncto (quod locum habitatio- „ nis noſtræ referat) ſeſe tangentes, alterum maximum, mino- „ rem alterum; quales depicti ſunt in Sphæra Tropicus & Eclip- „ tica: deprehendique ſectionem mutuam planorum utriuſque „ circuli incidere in lineam aliquam, quæ eſt communis utriuſ- „ que circuli tangens: dum ergo punctum contactus, rotari in- „ cipiens juxta ductum Tropici, conatum acquirit recedendi per „ tangentem, hactenus æque æſtimari poterit recedere a centro E- „ clipticæ, atque a centro Tropici; cum eadem ſit utriuſque tangens. „ Deinde attendi, quamvis portio ætheris in loco habitationis noſtræ „ conatum habeat recedendi per tangentem, poſſe tamen fieri, ut „ actualis truſio communicetur non per tangentem quæ horizonta- „ lis eſt, ſed per perpendicularem, ductam a centro circuli maxi- „ mi ad Zenith, uti globus *a* (*Vid. Fig.* 4.) veniens ex *d* conatum „ habet eundi in *b*, trudit tamen globulum *e*, quem oblique offen- „ dit, non juxta lineam *a b*, ſed juxta ſeriem *a c*. Interim non diſ- „ ſimulandum, priſtinam hic redire difficultatem: nam 1°. Nul- „ la eſt ratio, cur pulſio globulorum fiat in plano verticali po- „ tius, quam in plano circuli paralleli, aut quovis alio; cum „ tangens illa, ſecundum quam recedere conatur globulus, in- „ finitis planis ſit communis. 2°. Neque cauſa manifeſta eſt, cur, „ ſi pulſio illa ſit in plano verticali, fiat potius juxta lineam tan- „ gentis *a b* perpendicularem, quam juxta quamvis aliam; eo „ quod globulus *a* undique circundatus infinitis globulorum ſe- „ riebus, ſubinde eos impelleret in alias & alias partes.

Forte non tædebit Lectorem, ſi hic ſubjungam quæſtionem alteram ad propagationem radii viſivi, in eadem poſteriore Epiſtola Cl. Viro propoſitam; quoniam non parvam cauſarum latentium analogiam utrinque intercedere ſuſpicor.

Quæſtio erat; *Cur viſio fiat in inſtanti, ſonus propagetur ſucceſſive? Cur item radius deferatur linea tantum recta, ſonus autem per quaſvis etiam ambages, aures feriat?* „ Cui diſcrimini (ſic ha-

No. XIX. „ bebant verba mea) aliter ſatisfieri poſſe non puto, quam ſi „ corpuſcula, quæ ſunt vehiculum luminis, ſupponantur immediate ſe tangere; quæ vero ſunt vehiculum ſoni, a ſe mutuo „ intervallulis ſeparata eſſe; quod ita concipio: Suppono vehiculum ſoni, particulas ſcilicet aeris ſubtiliores *a*, *a*, *a* (*Vide Fig.* 5.) „ vel ſingulas ſeorſim, vel plures conjunctim, per impetum, „ aut primigenium, aut a materia ſubtili ſibi communicatum, „ deſcribere gyros quoſdam, certæ ac natura præfinitæ magnitudinis 1, 2, 3, 4; ſitque corpus ſonum edens A B, quod concuſſum tremulo motu ſubinde accedat in C D: hoc igitur propellet omnes ſphærulas, 1 in α, 2 in β, 3 in γ, 4 in δ; ubi „ manifeſtum eſt, ſi iſtæ ſphærulæ eandem ſervarent amplitudinem, neceſſum eſſet, ut eodem tempore, quo A B fertur ad „ C D, *m* perveniret in *n*, ibique aurem feriret. Notandum ergo, cum particulæ aeriæ, in circumferentia ſphærulæ rotatæ, „ a corpore A B percutiuntur, illas condenſari primum, ſphærulamque anguſtari; qua coarctata, particulæ debitum ſuæ gyrationi ſpatium repoſcentes, propellunt particulas ſequentis ſphærulæ 2, quæ iterum coarctatur, ſed non adeo valide ac prior; „ coarctata propellit tertiam, hæc quartam, &c. ſic ut præcipuum, quod in ſono fit, ſit aeris condenſatio; major equidem circa corpus ſonorum, minor autem in ſpatio remotiori. „ Hinc enim planum fit, cur ſonus non deferatur in inſtanti ad „ aurem; cur fortior ſit prope corpus ſonorum, & tandem „ langueſcat; cur item feratur oblique, ſiquidem ſphærulæ condenſatæ ex omni parte ſeſe dilatent, atque omnes circumjacentes ſphærulas propellant. In viſu quidem etiam facile capio, „ cur lumen viciſſim deferatur in inſtanti; nam ſi globuli ſecundi „ Elementi E F (*Vide Fig.* 6.) ſint ſolidi, ac ſeſe immediate contingant, condenſari neſcii; ſequitur ut quo momento primus „ globulus impellitur a corpore luminoſo E, eodem ſentiatur impulſus ab oculo G. Sed divinare nequeo, cur oculus conſtitutus in H, quo radii directi propter corpus opacum K interjectum pertingere nequeunt, non videat tamen lumen per radium „ E F H; ſiquidem globulus F non poſſit pergere ad G, quin ſi-

„ mul

„ mul impellat ſeriem F H. Similis fuit difficultas, ubi de deſcen- No. XIX.
„ ſu gravium quæſivi, cur fiat ſecundum lineam perpendicularem
„ potius, quam ſecundum quamvis aliam: atque dubito, annon
„ eadem utriuſque ratio ſit, quam profunde ignoro.

No. XX.

SPECIMEN LIBRI
DE MOMENTIS GRAVIUM &c.
Autore J. F. V. * *Lucenſi.*

INSIGNES Mathematici, Galilæus, Torricellius, Wallis, Marchettus, ac plures alii, exiſtimant eſſe veram hanc Propoſitionem: *Momentum totale gravis, ad momentum quod habet ſuper plano declivi, eſt ut longitudo plani declivis ad perpendiculum:* cujus contradictoriam ſic demonſtro. *Acta Erud. Lipſ.* 1684. Nov. p. 511.

Si grave conformatum in globum, nitatur plano horizontali (*Fig.* 1) radius I K, perpendicularis horizonti, eſt linea directionis per quam centrum I exigit deſcendere perpendiculariter. Si vero idem globus (*Fig.* 2) nitatur duobus planis inæqualiter declivibus X C, Z C (quæ pro hac demonſtratione ſint æqualis longitudinis, & faciant angulum rectum X C Z; cum perpendiculo vero X N, quod ſit æquale rectæ C O parallelæ horizonti, & cum recta N C horizonti parallela, quæ ſit æqualis perpendiculo Z O, conſtituant triangula rectangula X N C, C O Z, invicem æqualia) radius I H, parallelus plano X C, per quem centrum I exigit deſcendere ſuper X C, eſt linea directionis, reſpectu deſcenſus ſuper X C, ac radius I F, parallelus ad Z C, eſt linea directionis, reſpectu deſcenſus ſuper Z C.

Jam, ſicut planum horizontale ſuſtinet pondus æquale momento, quo globus exigit deſcendere perpendiculariter; quia globus momentum ſuum totale cenſetur exercere in radio I K, planum vero horizontale, applicatum in K, ac totaliter impediens deſcenſum perpendicularem, reſiſtit illi momento per virtutem æqualem; ita planum Z C, ſuſtinet pondus æquale momento, quo idem globus exigit deſcendere ſuper X C, quia

 mo-

* Johan. Franciscus Vannius, e S. J.

No. XX. momentum globi ut deſcendat ſuper X C cenſetur exerceri in radio I H; & planum Z C tangens globum in H, & totaliter impediens ejus deſcenſum ſuper X C, toti illi momento (quod reſpectu totalis eſt ſolum partiale) reſiſtit per virtutem æqualem: planum vero X C, ſuſtinet pondus æquale momento, quo globus exigit deſcendere ſuper Z C, quia momentum globi ut deſcendat ſuper Z C, cenſetur exerceri in I F, ac planum X C, tangens globum in F, & impediens deſcenſum ſuper ZC, reſiſtit momento globi per virtutem illi æqualem. Itaque momentum totale globi, ſuſtinetur plano horizontali; momentum ſuper XC, ſuſtinetur plano Z C; momentum ſuper Z C, ſuſtinetur plano X C. Quia vero, *momentum totale globi ſuper plano horizontali, æquatur momentis partialibus ſimul ſumptis ejuſdem globi ſuper planis declivibus* X C, Z C; ſicut pondus globi, quo gravatur planum horizontale, æquatur partibus ponderis ejuſdem globi ſimul ſumptis, quibus gravantur plana Z C, X C: Si momentum totale ad momentum ſuper plano declivi X C, ſit ut X C ad X N; ac momentum idem totale, ad momentum ſuper ZC, ſit ut Z C ad Z O, nimirum ut X C ad N C: (quia ex hypotheſi XC eſt æqualis Z C, & N C eſt æqualis Z O); momentum totale ad momenta partialia ſimul ſumpta, eſt ut hypotenuſa X C, ad latera XN & N C in directum poſita, ejuſdem trianguli X N C. Atqui hypotenuſa X C, non eſt æqualis lateribus X N & N C, ſed eſt illis minor. Ergo ſi totale momentum ad partialia, ſit ut X C ad X N & N C, momentum totale non æquatur, ſed eſt minus momentis partialibus ſimul ſumptis. Ergo momentum totale, ad momentum ſuper plano declivi X C, non eſt ut longitudo plani X C, ad perpendiculum X N.

Hæc demonſtratio non videtur obnoxia ulli exceptioni; quia ſi momentum totale, ac momenta partialia, conſiderentur in uno & eodem globo, vel in globis æqualibus; velocitas, qua globus deſcendit perpendiculariter, ad velocitatem, qua deſcendit ſuper plano declivi X C; impulſus, quo globus conatur deprimere planum horizontale, impediens deſcenſum perpendicularem, ad impulſum quo conatur deprimere planum Z C, applicatum in linea directionis, & impediens deſcenſum ſuper X C; onus quo gravatur planum horizontale, ad onus quo gravatur planum Z C; momentum totale, ad momentum ſuper X C; habent unam, & eandem rationem: quod ſufficiat indicaſſe.

Ex his aliiſque principiis legitime demonſtratis, in *Exegeſi de momentis gravium* deprompta eſt proportio momenti totalis ad partiale, ac cæteræ quæſtiones reſolutæ ſunt. Quum autem tum vectis communis, tum ill., quem continent gravia impedita ne deſcendant ſuper planis declivibus, ſe ipſos non agnoſcant in quorundam libris: idcirco utriuſque natura, in *Exegeſi de vecte*, nova methodo indaganda viſa eſt; ac voto exitus reſpondit. Demum in *Exegeſi de motu æqualiter accelerato*, præ-

ter

Digitized by Google

ter motum ipſum facilius ac brevius expoſitum: propoſitiones, quæ antea nitebantur falſis principiis de momentis gravium, emendatæ ſunt, novæ nonnullæ additæ. No. XX.

* * *

Viri cujuſdam μαθηματικολάτου *Cenſura.*

OBJECTIO Viri, ut apparet, peringenioſi, contra receptum & mea ſententia, demonſtratum Staticorum Theorema, non contemnenda eſt quidem; ſolvi tamen omnino poteſt negando momenta in planis X C & Z C in unum poſſe addi, ut componant momentum gravis abſolutum; & fraudi Viro docto fuiſſe videtur, quod illa vocavit partialia, hoc totale. Quid enim, ſi grave ſuſtentetur a duobus planis, X C inclinato, & A C verticali (*Fig.* 3)? utique momenta in ambobus planis in unum addita non poſſunt æquari uni ex ipſiſmet, totum parti; quod tamen ſecundum objicientis ſententiam fieri deberet: momentum enim in plano verticali utique eſt ipſum momentum gravis abſolutum.

No. XXI.

Dn. BERNOULLI
SOLUTIO DIFFICULTATIS
CONTRA PROPOSITIONEM QUANDAM MECHANICAM,
Authore J. F. V. Lucenſi propoſitæ,
inſertæque Actis Lipſienſibus Menſe Novembri 1684.

Acta Erud. Lipſ. 1686. Febr. p. 96.

PROPOSITUM eſt huic Autori oſtendere, ***Momentum totale gravis, ad momentum quod habet ſuper plano declivi, non eſſe ut longitudinem plani declivis ad perpendiculum***; argumento petito a globo duobus planis declivibus normalibus innixo, cujus momenta partialia, quæ utrumque planum ſigillatim ſuſtinet, excedere deberent ſimul ſumpta momentum ejus totale; id quod Autor judicat abſurdum.

Subjuncta eſt loco citato ad difficultatem hanc brevis Cl. cujuſdam Viri Reſponſio, qua recte quidem negat abſurdum eſſe, momenta in ambobus planis ſimul ſumpta excedere momentum globi abſolutum: at cum negationem deinceps ſuam conatur illuſtrare exemplo duorum planorum, inclinati X C, & verticalis A C; videtur negligere præcipuum objectionis nervum, qui in eo ſitus eſt, ut momentum globi ſuper utrolibet plano ſtatuatur ſuſtineri ab altero ***totaliter & adæquate***; quod hic non fit: Cum enim planum A C (*Vide Fig.* 3.) ſit obliquum ad lineam directionis

tionis I H, ſecundum quam globus exigit deſcendere ſuper X C; No. XXI. itemque ſit obliquum Planum X C ad lineam directionis I F, ſecundum quam globus exigit deſcendere ſuper A C: ſequi videtur, momenta deſcenſuum alterna alternis planis ſuſtineri non tota, ſed *imminuta*; unde quis colligeret, etiamſi *tota* excedant momentum globi abſolutum, *imminuta* tamen illi æquari poſſe: quod Autorem objectionis in ſua potius opinione confirmaret.

Itaque plenius ſolvenda difficultas eſt, dicendo, confundi in illa pondus & momentum ponderis. Poteſt enim fieri, ut pondus maneat unum idemque, variet tamen ſubinde momentum, quod exercet in premendo alio corpore, pro diverſitate applicationis utriuſque, indeque natæ reſpectivæ celeritatis. Ita pondus, applicatum longiori vectis brachio, majus utique exerit momentum in obicem breviori applicatum, quam eſt momentum ſuum abſolutum, cujus menſura eſt ipſummet pondus. Quantum autem momentum exerceat quodcunque pondus in premendo obice, determinatu facile eſt; dummodo conſideretur, quid fieret, ſi deſcenderet pondus. Ita ſi globus I, (*Vide Fig.* 1.) plano horizontali K innixus, deſcenderet in L, ſpatio K L; ipſum planum eodem tempore per idem ſpatium K L ferri deberet; adeoque cum celeritates forent æquales, requiritur in plano, ad hoc ut globi deſcenſum impediat, tanta reſiſtendi vis, quantum eſt ipſum globi pondus; tantumdemque proin æſtimatur momentum quo globus in planum agere intelligitur: unde etiam vocatur momentum abſolutum. At ſi deinceps globus ſuſtentetur duobus planis, res ſecus ſe habebit. Quod ut manifeſtum fiat: ſunto (*in Fig.* 4.) plana X C & Z C, æqualiter declivia, quorum igitur utrumlibet a ſuſtentati globi pondere dimidio premetur; ſed quanto momento, ſic explorabimus. Fingamus globum deſcendere ex I in L; quod dum facit, conatum premendi plana, tranſmittit per rectas I F & I H, planis iſtis perpendiculares: quare globo exiſtente in L, reperientur iſta in Q P & R P, ſitu priori parallelo, ſiquidem cujuſlibet plani reſiſtentia ultra citraque globum æqualiter diffuſa ſupponatur. Eo ergo tempore, quo globus permeat rectam I L æqualem

C P,

Digitized by Google

No. XXI. C P, planum X C non niſi tranſigit ſpatium C Q, breviſſimam videl. diſtantiam inter X C & Q P, id eſt, celeritas globi ad celeritatem plani eſt, ut C P ad C Q. Unde ne loco moveatur planum X C, requiritur in illo tanta reſiſtendi vis, quæ ſit ad dimidium ponderis globi quo urgetur, ut reciproce celeritas globi C P, ad celeritatem plani C Q. Cenſetur autem reſiſtendi vis cujuſque obicis æquipollere momento, quod in illum exercetur. Quare etiam momentum globi ſuper plano X C, eſt ad dimidium ponderis ejuſdem, ut C P ad C Q. Simili ratione momentum ſuper plano Z C eſt ad alteram ponderis medietatem, u t CP ad C R; id eſt, ut C P ad C Q. Adeoque jam momentum globi ſuper utroque plano ſimul ſumptum, eſt ad totum ejus pondus (ſeu momentum abſolutum) ut C P ad C Q. Eſt vero C P major C Q. Igitur momentum &c. Q. E. D.

Concludimus, quo acutiorem angulum ambo plana invicem conſtituunt, eo magis, & quo obtuſiorem, eo minus momenta partialia exceſſura eſſe momentum totale; ratione rectæ C P ad C Q, illo caſu, exiſtente majore; hoc, minore: donec tandem apertura anguli tanta fiat, ut ambo plana coaleſcant in unum horizontale; quo facto, concident quoque rectæ C Q & C R cum C P, ſuſtinebitque planum non niſi ipſum momentum globi abſolutum. Patet etiam hinc, globum inter duo plana ita ſuſtentatum, non male referre cuneum, cujus vim ingentem in findendis corporibus multis vicibus ſuperare notum eſt abſolutum momentum virium, quibus adigitur.

No. XXII.

Digitized by Google

No. XXII.

METHODUS RATIOCINANDI,

SIVE

USUS LOGICÆ

In præclaro aliquo Phænomeno Phyſico enodando,

Speciminis loco

In Academia Patria

IX. *Calend. Aprilis* M. DC. LXXXVI,
Publica Prælectione oſtenſus

A

JACOBO BERNOULLI, Baſil.

Editum primo

BASILEÆ

1686.

Digitized by Google

ALMÆ UNIVERSITATI
BASILIENSI,
MAGNIFICO RECTORI,
SPECTATISS. FACULTATUM DECANIS
CÆTERISQ. ACADEMIÆ PROCERIBUS
AMPLISSIMIS,

Quorum nutu & indultu hæc naſcuntur
nobis otia,

Præſentes Pagellæ ſacræ ſunto!

L E C.

Digitized by Google

LECTORI S.

NON ſemper HUGENIIS ſcribimus, & WALLISIIS, vel Philoſophiæ novis ditandæ inventis operam navamus; ſed quandoque animum a ſeverioribus ad jucundiora & faciliora deflectimus, inque iis, quæ jam novimus, ſtudioſæ Juventuti methodice proponendis vires noſtras experimur, præſertim quando jubet Superiorum voluntas, qui publico deſtinatos ſuorum profectus ſpecimine explorare ſatagunt; ubi non tam in inveniendo acumen & induſtriam, quam in docendo ſolertiam ſpectant. Huc igitur & præſens collimavit Exercitium Academicum, quod cum nata occaſio Dialecticum eſſe voluerit, non potui non, ut ſcopo accommodarem meo, plurima vix alias condonanda Logicalia illi immiſcere. Sed quoniam, hoc non obſtante, benigna ſatis Auditorum judicia expertum eſt, cæteraque, ſi fateri verum licet, totius ſolidioris Philoſophiæ

Digitized by Google

facile fundamenta continet, amicorum quorundam hortatu motus haud gravate, ut videret lucem, & ſi poſſet, etiam prodeſſet exteris, annui. Vale.

MAGNI-

Digitized by Google

Magnifice Domine Rector,

Proceres Academici, Experientiſſimi, Sapientiſſimi, Clariſſimi,

Hoſpites cæteri Reverendi, Exoptatiſſimi, Præſtantiſſimi, Nobiliſſimi.

OMNE Trinum, quod aiunt, perfectum. Tertia jam intra biennium vice has premo cathedras, Specimina Vobis editurus ejus Artis, quæ Rationem formare docet. Ut igitur omne ferrem punctum, & poſtremis hiſce laboribus, quouſque licet, perfectionis colophonem imponerem, omnino conſultum eſſe duxi, ut (qui præcipuus Artium Propædeuticarum ſcopus eſt) abſtractas Ideas, quibus toties aures replevi veſtras, tandem etiam ad praxin aliquam referrem, atque ſic declinarem familiare illud Logicorum fatum, qui poſtquam inanibus technolo- No. XXII.

Digitized by Google

No. XXII. gematis & notionibus ſecundis totam ſæpe ætatem triverunt, nihilo vel in rebus agendis prudentiores, vel in cognoſcendis ſagaciores inde evaſiſſe deprehenduntur. Ab hoc, inquam, ut caveam mihi vitio, conſtitutum mihi eſt, Methodum ratiocinandi, Uſumque Logicæ in præclaro aliquo Phænomeno Phyſico feliciter enodando, hac Prælectione Vobis oſtendere, adhibito ſimul in auxilium alterius Logicæ, cujus *Parallelismum* nuper dedi, puta Algebræ, ratiocinio; partim ut eos, qui non ita pridem calculum iſtum me manuductore addidicerunt, illius quoque applicandi doceam methodum; partim ut aliis etiam ſalivam moveam, ad hanc divinioris auræ particulam ſibi comparandam. Ita vero ad inſtitutum meum iſthæc accommodabo, ut & Uſum vulgaris Logicæ, ratiociniis ſubinde in formam redactis, Vobis commonſtrem. Quod dum facturus ſum, Auditores, attentas præbete dicendis aures, oculoſque in Schemata chalcographica Vobis exhibita defigite.

Phænomenum, quod in Diſſertat. mea *de Gravitate Ætheris*, *p.* 100. *ſeqq.* conciſius pertractavi; nunc vero ut Methodus Uſuſque utriuſque Logicæ eo clarius pateſceret, prolixius enodandum mihi propoſui, iſtud eſt: *Si Fiſtula cylindrica 29 pollicum longitudinem non excedens, una extremitate clauſa, altera patula, repleta ſit ex parte mercurio ſeu argento vivo, reliquo ſpatio aeri conceſſo, eaque poſtmodum obſtructo digiti pulpa orificio invertatur, atque erecta perpendiculariter immergatur cum obſtruente digito in ſtagnantem alicubi mercurium; explorandum eſt, an & quouſque remoto digito mercurius in fiſtula deſcenſurus ſit?*

Quicquid ab humana mente cognoſci poteſt, vel cognoſcitur ut Principium ſeu Axioma, vel ut Principiatum ſeu Concluſio. Illa, quorum veritas adeo eſt in propatulo, ut intellecta ſola terminorum ſignificatione in dubium revocari nequeant, cognoſcuntur priori modo, neque proin ullo ratiocinio vel demonſtratione opus habent. Ex horum autem numero ſatis conſtat non eſſe præſens Phænomenum, cum neminem Veſtrum putem eſſe, Auditores, qui audita & percepta vocum vi, determinare ſtatim auſit Phænomeni eventum. Sequitur ergo, illum non niſi ut concluſio-

ſionem, adeoque prævio ratiocinio, cognoſci poſſe; & quandoquidem omnis concluſio elici debeat ex præmiſſis, quarum veritas ut conceſſa, vel aliunde cognita ſupponitur, hinc utique patet, ad præſens negotium expediendum, neceſſario aliqua debere dari ſive ex inſitis notionibus, ſive ab experientia hauſta principia, ſuper quibus deinceps debito modo ratiocinandum eſt, & ſine quibus quæſiti cognitio obtineri nequit. Si quis enim me juberet divinare numerum, quem quis mente concepit, neque adjiceret conditiones, quibus veſtitus eſſe debeat, quibuſque ceu characteribus ipſe mihi ſeſe prodat, is ἀδύνατον profecto mihi præciperet: Pariter quoque, antequam quis perſpectam habeat naturam Aeris, reliquaque Principia hydroſtatica ad præſentem quæſtionem neceſſaria, is illius ſolutioni fruſtra inſudabit; & ſi paulo ſit moroſior, uſu fere illi veniet, quod antehac celebri cuidam Profeſſori Amſtelodamenſi, * primo CARTESII Diſcipulo, juxtaque Defenſori acerrimo, *Clave Philoſophica* claro, cujus tanto libentius, quanto opportunius mentionem hic injicio. Cum ante quadriennium ſcribendæ modo dictæ diſſertationi in Belgio vacarem, atque inter peregrinandum, experiundi deſtitutus ipſe copia, hærerem circa eventum hujus ipſius, quod nunc præ manibus habemus, Phænomeni; Amſtelodamum conceſſi, conſulturus ibidem hac de re celebre illud Oraculum. Ille, intellecta mei adventus cauſa, ſubticuit primo, ſed ne quid neſcire videretur, argentum in tubo non deſcenſurum, ſed in eadem, qua prius, hæſurum altitudine, magiſtraliter aſſeveravit. Ego, qui deſcenſurum certo prænoveram, & ſcire ſaltem efflagitabam, utrum major minorve Aeris copia in tubo relicta illud humilius detruſura eſſet, modeſte Philoſopho regeſſi; ad quæ ille torvo me ſtatim intueri vultu, dehinc percontari quis eſſem, poſtea indignari, ſtomachari, in Philoſophiam Experimentalem invehi, eamque hiſtrionicam nuncupare, & me tantum non vi ex ædibus ſuis expellere. Hæc erat tum ſolutio celebris iſtius Carteſiani. Nos vero ut minus militariter, ac magis philoſophice rem aggredia- No. XXII.

* Joh. DE RAY.

Digitized by Google

No. XXII. grediamur, ſtabiliemus ante omnia Principia quædam, ſolvendo noſtro Problemati apta, quorum veritatem ab Auditoribus meis ſuppono ut conceſſam, non quaſi probatione non indigeant (agimus enim hic de Problemate aliquo Matheſeos concretæ, puta Phyſicæ vel Hydroſtaticæ, cujus Principia immediata non ſunt Axiomata illa, vel Notiones communes nobiſcum natæ, quæ abſtractæ Principia conſtituunt † :) verum quoniam partim Principiorum horum veritas mille Experientiis, & forte etiam Rationibus probata jam abunde eſt, partim etiam & præcipue, quia Auditorum illi, quos hæ tum experientiæ tum rationes latuerint, ex concluſionis meæ veritate, quam ipſiſmet eorum oculis ſpectandam & uſurpandam exhibebimus, ipſorum quoque Principiorum, ex quibus illa fluxit, veritatem, actu cognitionis, ut ſic dicam, reflexo colligere tuto poterunt. Principia autem ſunt ſequentia :

I. *Omnes partes cujuſcunque liquoris æqualiter a centro Terræ remotæ, a pondere perpendiculariter ſibi incumbente premi debent æqualiter : & ſi premuntur æqualiter, eo ſitu quieſcunt ; ſin minus, non prius componuntur ad quietem, quam res ad æquipondium reducta fuerit, aſſurgentibus hinc partibus quibuſdam, ſubſidentibus inde aliis.* Celebratiſſimum hoc Principium hydroſtaticum fluit ex ipſa natura Liquidi, cujus particulæ non inſtar partium corporis duri ſibi mutuo connexæ, ſed a ſe mutuo ſeparatæ & disjunctæ ſunt, adeoque aliæ aliis cedere aptæ, nimirum minus preſſæ validius preſſis. Ex. gr. Eſto (*Fig. I.*) Vas A, impletum liquore quocunque uſque in BC : dico, liquorem hoc ſtatu quieturum. Aſſumta enim quavis planitie horizontali DE ; quoniam ſingulæ partes hujus planitiei æqualem ſibi ſuperincumbentem habent liquidi molem, æquali quoque urgentur pondere, nullaque proin ratio eſt, cur una alteri cedere debeat. Ponamus jam, concuſſo vaſe aſſurrexiſſe liquorem ex una parte in F, ex altera deſcendiſſe in G : dico, illum in hoc ſitu nequaquam permanſurum ; quoniam planitiei DE pars H majus ſibi nunc incumbens habet pondus, quam

† Vid. nuper ventilatarum mearum Miſcellanearum Theſ. 11. 12. 13. (ſup. pag. 233. 234.)

Digitized by Google

quam pars I: quare huic accedere debet pars quædam alterius ponderis, donec aucta hinc molis incumbentis quantitate, illinc diminuta, liquor priſtinum recuperet ſitum BC, atque ita planities DE utraque ſui parte æqualiter iterum prematur, fiatque perfectum æquipondium. No. XXII.

II. *Atmoſphæricus noſter, quem ſpiramus, Aer, non minus atque argentum vivum, Pondere ſeu Gravitate aliqua inſtructus eſt*; quod infinitis experimentis, & noſtris quoque ſæpius iteratis, compertum eſt. * Mirabimini profecto, Auditores, ſi Vobis dixero, pondus iſtud Aeris, totam Globi terraquei ſuperficiem cingentis, indeque ad extimos atmoſphæræ limites expanſi, adeo non contemnendum eſſe, ut revera centenariorum plus quam ſexagies ſexies mille millionum milliones conficiat.

III. *Aer, ſecus quam alia Fluida, præter Gravitatem inſigni quoque præditus eſt Elaterio, ſeu Virtute ſeſe expandendi & contrahendi.* Ut vero diſtinctam habeamus notionem de iſthoc aeris Elaterio, atque cognoſcamus, in quantum conveniat, & in quantum differat ab ejus Gravitate, res ita concipienda: Fingite vobis ingentem Lanæ acervum, cujus partes quo inferiores, eo compreſſiores exiſtunt, ita tamen ut compreſſio iſta non continuetur in indefinitum, ſed ad certum uſque gradum, quem ubi Lanæ portio attigit, nequit a reliqua mole ulterius comprimi, virtute ejus expanſiva paria tum faciente cum incumbente pondere. Quod enim Lana ſic compreſſa ſuperincumbenti oneri non nude reſiſtat reſiſtentia, ut ſic dicam, paſſiva, quæ ulteriorem duntaxat compreſſionem prohibeat, ſed & efficaci preſſione contranitatur, patet inde, quod ablata deſuper parte oneris, infima Lana ſeſe aliquouſque actualiter expandit, donec debilitati ſic Ela-

* Modus ponderandi aeris ab unoquoque facile inſtituendus talis eſt: Phiala vitrea colli anguſtioris prunis ardentibus admota lente calefiat, rareſacto per calorem & expulſo e phiala maximam partem aere, ejus orificium cera promte & ſollicite obturetur: tum poſtquam lente refriguit, lanci exactæ libræ injecta ponderetur, & perforata poſtmodum cuſpide acus cera, aeri externo introitus permittatur, qui cum ſibilo ingreſſus manifeſte phialam præponderare faciet.

No. XXII. Elateris vires reſiduæ molis incumbentis pondus non amplius ſuperent; tum enim res erit in æquilibrio, nec ulterius dilatabilis eſt Lana, quamdiu hoc onere premitur. Porro & illud animadvertere poteſtis, ſi exiguum Lanæ ſic compreſſæ manipulum ex acervo illo eximatis, manuque concludatis, ita tamen ut ſub eodem compreſſionis gradu maneat, eundem profecto niſum conatumve premendi in volam manus exercebit, atque antea exercuerat in totius ſuperincumbentis Lanæ pondus; exercuerat autem in hoc pondus conatum ipſi ponderi æquivalentem, ut antea innuimus; unde ſequitur, & parvæ iſtius moleculæ manu nunc concluſæ conatum æquipollere toti alias incumbentis Lanæ ponderi. Quæ ſi probe intellexeritis, Auditores, facile quoque Aeris Elaterio applicabitis: Nimirum cum aer hanc Terræ ſuperficiem proxime ambiens ab incumbentis atmoſphæræ pondere valide comprimatur, minima quælibet illius portio tantas acquirit elaterii vires, ut ſive toto atmoſphærico pondere libere circumdata, ſive vaſi vitreo incluſa, aliuſve corporis interventu coercita intelligatur, tantam præciſe preſſionis vim exercere debeat in vaſis latera, vel corpus quodcunque ſe ambiens, quantam in illa vel illud exercere poſſet totum alias atmoſphæricæ columnæ incumbentis pondus. Sed & præterea, ſi pauxillum iſtud incluſi aeris compreſſius adhuc, ſive denſius reddatur aere naturali, vel aere proxime nos ambiente, manifeſtum eſt, preſſionem elaſticam, quam exercet in corpora ambientia, fore etiam majorem; ſin rarius ſeu laxius fiat, fore minorem ea, quæ proficiſci poteſt a volumine aeris naturalis conſiſtentiæ, quæque æquipollet, uti antea indigitavimus, ponderi integræ columnæ atmoſphæricæ.

IV. Neque vero (in quo ultimum noſtrum Principium conſtituimus) Natura incerto hic agit motu, ſed certam obſervat Legem & Proportionem in aeris magis minuſve denſati preſſionibus. Deprehendit enim Illuſtris BOYLIUS eleganti Experimento, nobis etiam feliciter tentato, quod † *Preſſiones aeris ſint in ratione di-*

recta

† Intelligenda Regula ὡς ἐν πλάτει, nam ſi ἀκριβῶς loqui velimus, *Preſſio elaſtica aeris denſioris ad elaſticitatem minus denſi tantillo majorem habere ra-*

recta Denſitatum, *vel reciproca Raritatum illius*, id eſt, Sicut Denſitas unius portionis ad Denſitatem alterius, Ita Preſſio illius ad Preſſionem hujus: vel (quod perinde eſt) Sicut Raritas unius ad Raritatem alterius, Ita reciproce Preſſio hujus ad Preſſionem illius: Explico, Si portio aliqua aeris duplo, triplo, &c. denſior ſit alia, vel etiam ſeipſa alio tempore; duplo, triplo, &c. quoque majorem exercebit preſſionem: Si vero duplo, triplove rarior, toties etiam minor erit ejus preſſio. Tunc autem aerem appello duplo, triplo, &c. denſiorem, quando eadem ejus quantitas in duplo, triplo, &c. minus ſpatium contrahitur: ſicut viciſſim duplo, triplo, &c. rariorem, quando ad duplo, triplo, &c. majus volumen expanditur: Verbi gr. (*Fig.* 2.) Si aer ſpatio A contentus dilatetur, ut repleat poſtmodum ſpatium B duplum ſpatii A; dicetur duplo rarior: ſin contrahatur in ſpatium C, quod ſit dimidium ſpatii A; dicetur duplo denſior. Itaque ſi aer, dum coextenderetur ſpatio A, fuerit naturalis conſiſtentiæ; adeoque, ut ſupra inſinuatum fuit, virtutem habuerit elaſticam æquipollentem ponderi integræ columnæ atmoſphæricæ, preſſionem exercebit æquivalentem duplo dicti ponderis, poſtquam conſtipatus erit in ſpatium C: ſicut e converſo dimidio ſaltem ponderis, ubi dilatatus impleverit ſpatium B. No. XXII.

Stabilitis iſtis Principiis, antequam ad principalem Propoſitionem accedamus, ſequens præmittemus Lemma: *Si Tubus cylindricus ſuperne clauſus in liquore quocunque ſtagnante perpendiculariter erectus, atque eodem ad ſummitatem uſque impletus fuerit, hærebit in illo ſuſpenſus liquor, ſicubi ejus pondus non exuperet pondus cylindri atmoſpharici æque craſſi; ſed ſi exuperet, deſcendet conſque, donec utriuſque cylindri pondus pari paſſu ambulet.* Quod ex Principiis noſtris antea allatis (quæ in poſterum Axiomatum loco nobis erunt) facile demonſtrabitur: Eſto enim (*Fig.* 3.) Fiſtula FI, ſuperne in F clauſa, immerſaque perpendiculariter liquori LM, & eodem

 replcta

tionem deprehenditur, quam denſitas ad denſitatem; cujus rationem pluſquam probabilem exhibui in Diſſert. de Grav. Æth. pag. 93. &c. Interim differentia tanti non eſt, ut ad eam hic loci attendere aut neceſſum, aut conſultum ſit.

No. XXII. repleta uſque ad F: Dico, ſi pondus liquoris F I exæquet pondus cylindri lateralis atmoſphærici N O æque craſſi, & a ſuperficie liquoris N ad ſummitatem atmoſphæræ O protenſi, liquorem eo caſu apici fiſtulæ perpetuo adhæſurum; quod tali Syllogiſmo probo:

Si ſuperficies liquoris L M, utraque ſui parte I & N, premitur ab incumbente pondere æqualiter, tunc eo ſtatu quieſcet, per Ium. Axiom.

Atque in dicto caſu premitur æqualiter.

Ergo quieſcet.

Aſſumptum probatur per hypotheſin: Pars enim ſuperficiei I premitur a ſolo pondere liquoris I F, (excluſa videl. preſſione aeris F G, quæ a clauſo orificio F intercipitur,) pondus autem liquoris I F æquale ſupponitur ponderi aeris N O, quod premit partem ſuperficiei N, (aerem enim habere pondus, patet ex IIo Axiom. utraque ergo pars I & N premuntur ab æqualibus ponderibus, adeoque æqualiter. Perinde quoque ſe res habet, ubi pondus I F minus eſt pondere N O; tum enim prævalens cylindrus N O alterum I F surſum propellere conabitur, qui cum attolli nequeat ob impedimentum clauſuræ F, ſequitur & hoc caſu liquorem ſaltem adhæſurum ſummitati tubi. At ſi pondus I F ſuperet pondus N O, exonerabit ſe pars liquoris in vaſculum, reliquuſque in fiſtula aliquouſque ſubſidet, ex. gr. uſque ad P, donec reſiduus liquoris cylindrus I P pondere exæquet aeris cylindrum N O, quod ipſum ex primo noſtro Axiomate ſponte pariter fluit; tum enim demum partes I & N ab incumbente onere urgentur æqualiter. Quouſque vero quivis liquor in tubo ſubſidere debeat, donec æquipondium fecerit cum ſimili vel æque craſſo cylindro aeris, id quidem nulla ratione a priori, ſed ſola experientia determinabile eſt, cum nec de altitudine atmoſphæræ, nec de ejus ſpecifica gravitate, neque diſpari ubique ſpiſſitudine ſatis adhuc conſtet. Teſtatur vero Experientia, argentum vivum in altitudine circiter 29 pollicum Anglicanorum, aquam vero in altitudine 33 vel 34 pedum ſuſpenſam teneri poſſe; adeoque ſi tubi dictis altitudinibus breviores extiterint, liquores iſtos vertici eorum affixos manſuros; ſin proceriores fuerint, deſcenſuros in iis,

iis, non obſtante ſuperioris orificii clauſura, uſque dum dictas reſpective altitudines occupent. Atque hoc eſt celebre illud Experimentum, ab Auctore ſuo dictum Torricellianum, quod ſicuti non ſine ſtupore a Philoſophis primitus exceptum fuit, ita doctrinæ de Aeris Gravitate felices dedit natales, atque vulgatum errorem, quo Veteres (qui experimentum non tentaverant in tubis longioribus) liquorum ſuſpenſionem in brevioribus fugæ vacui aſcribebant, fortiter profligavit: non obſtante enim prætenſo hoc vacui metu, videmus deſcendere liquores in procerioribus tubis, in quibus per hunc deſcenſum æque metuendum foret vacuum, ac in brevioribus. Notandum autem, altitudinem hanc 29 pollicum, ad quam initio deſcendit hydrargyrum in tubo Torricelliano, neutiquam permanentem eſſe, ſed continuo variabilem (ſi tubus aliquandiu aeri expoſitus relinquatur) variatione quidem vix duos excedente digitos; quod ipſum indicio eſt, gravitatem cylindri aeris NO, qui cum ſuſtentato mercurio æquipondium facit, ſubinde alterari, ſive quod ejus altitudini aliquid accedat aut decedat, ſive quod atmoſphæra ſpiſſetur & rarefiat, vel ejus pondus aliam ob cauſam augeatur minuaturve. Saltem hinc nobis colligere proclive eſt, tubum iſtum, ſi per aliquot menſes annoſve in continuo, ut loqui amant, experimento relinquatur, inſtrumentum fore admodum idoneum indicandi, mediante iſthoc hydrargyri aſcenſu deſcenſuve, alterni incrementi vel decrementi gravitatis atmoſphæricæ; quem ob uſum proin etiam vocari conſuevit Barometrum, vel Baroſcopium. No.XXII.

Præmiſſis iſtis, inſtituti noſtri ratio poſtulat, ut tandem ad Principalem noſtram Propoſitionem accedamus, quæ hæc eſt: *Si fiſtula aliqua cylindrica ſuperne clauſa, & 29 digitis, ſi ita lubet, brevior, non ſolo mercurio, ſed aliqua ex parte etiam aere impleta ſit: quæritur, quid tum ſit futurum, num deſcenſurus mercurius, necne; & ſi deſcendat, quouſque id fiat?* Notanter quæſtionem proponimus in fiſtula 29 dig. breviore; nam ſi longior ſit, dubium nullum eſt, liquorem in illa deſcenſurum, per præcedens Lemma, utpote præponderantem ſimili cylindro atmoſphærico, quo ſuſtentandus eſſet. At ſi dicta altitudine ſit minor, ſaltem

No.XXII. hærere quis aliquandiu poſſet circa Phænomeni eventum; imo etiam forte, non ſine veri ſpecie, colligeret aſcenſurum omnino mercurium, aut ad minimum eadem ſtatione manſurum; eo quod, juxta allatum Lemma, ſuſpenſus etiam maneret, ſi totum repleret tubum; quo tamen utique caſu, ſi ſolum ſpectes pondus, fiſtula majori gravaretur onere, quam nunc, ubi partim mercurio, partim aere, fluido longe leviſſimo, adimpleta eſt. Quin & revera expectationi reſponderet eventus, ſi pauxillum iſtud incluſi aeris ſolo ageret pondere, neque etiam elaterio ſuo efficax eſſet. Quocirca iſthic non tam ponderis, quod in tantilla aeris molecula tuto negligi poterit, quam elaſticitatis, quæ in minima ejus portione haudquaquam contemnenda exiſtit, præcipua habenda eſt ratio: Quem in finem eſto (*Fig.* 4.) Tubus M N, ſuperne in M clauſus, inferne patulus & hydrargyro in vaſe Q ſtagnanti immerſus; pars tubi litera *b* notata impleta itidem ſit mercurio, reliquum vero ſpatium *a* ab aere naturalis conſiſtentiæ occupatum; a latere tubi aſſumatur ſimilis cylindrus aerius R S, ſuper mercurio in vaſe premens. Quibus ita poſitis, ut ordine in quæſiti cognitionem deducamur, ita deinceps nobiſcum ratiocinabimur:

Hydrargyrum tubo concluſum, aut eadem immotum hæret altitudine, aut altius aſcendit, aut humilius deſcendit.

Sed nec eadem hærere altitudine, multo minus altius aſcendere poteſt.

Supereſt ergo ut deſcendat.

Syllogiſmus hic eſt Disjunctivus, qui procedit a remotione duorum membrorum ad poſitionem tertii. Majoris veritas nititur ſufficiente enumeratione partium; neque enim præter aſcenſum, deſcenſum, & in eodem loco permanentiam, quartum aliquod concipi poteſt. Atque hunc argumentandi modum in veritatis inveſtigatione plerunque adhiberi vellem; hac enim ratione circumſpecti reddimur in noſtris ratiociniis, certique eſſe poſſumus, nos nihil eorum, quæ ad rem præſentem conducunt, omiſiſſe. Subſumtio conſtat remotione duorum membrorum: ubi notandum, eum qui ſic ſubſumit, ni temere ſubſumere velit, jam perſpectas habe-

habere debere rationes ſuæ ſubſumtionis; illum vero, qui adhuc- No.XXII. dum in inquirenda veritate occupatus eſt, ſuſpendere teneri tantiſper ſubſumtionem ſuam, donec ordine examinarit ſingula membra, quæ removenda ſunt. Quare & nos, acturi Philoſophos, ſubſumtionem tantiſper pro nondum facta habebimus, conſiderabimuſque prius, quid fieri deberet, ſi ponerentur illa duo membra, quæ modo per anticipationem removimus; id quod ſequenti Sorite efficiemus:

Si Hydrargyrum eadem hæret altitudine, aer naturalis ſuperne incluſus manebit quoque ejuſdem expanſionis ſeu conſiſtentiæ, (quod per ſe clarum.)

Si manet ejuſdem, id eſt, naturalis conſiſtentiæ, preſſionem exercebit in mercurium, æquivalentem ponderi totius columnæ atmoſphæricæ RS, (per Ax. III.)

Si ſola iſta preſſio æquivalet ponderi dictæ columnæ, juncta certe ponderi mercurii incluſi, illi præpollebit:

Si juncta præpollet, ſtagnantis hydrargyri pars N, ab utroque tum pondere, tum elatere, junctim affecta, fortius utique premetur, quam pars S, a ſolo incumbentis aeris pondere ſubacta:

* *Si fortius premitur N quam S, non quieſcet liquor hoc in ſtatu* (per Ax. I.)

Si non quieſcit, non eadem hærebit altitudine.

Ubi obiter moneo, inſigne hic ſeſe obtuliſſe exemplum illius ratiocinii, quod nuper † ventilandum propoſuimus, quo videl. ex aſſertione aliqua, directa & legitima conſequentia, ejus contradictoria infertur; ex eo enim quod ſuppoſuimus, *hydrargyrum eadem hærere altitudine*, concluſimus: *Ergo non eadem altitudine hæret.* Et ſic quidem removimus prius Enunciationis Disjunctivæ membrum: haud multum abſimili ratione probabimus, multo minus aſcen-

* Potuiſſem hic finire Soritem, atque per remotionem ultimi hujus conſequentis ſtatim ſubſumere (velut in ſequenti ratiocinio) *Sed neutra pars altera premi debet fortius*, &c. niſi animadvertiſſem, continuando Soritem reſulraturum ſubtilis illius argumentationis exemplum, cujus hic mentio ſubjungitur.

† Diſp. de Conv. & Oppoſ. Enunc. Th. XIII.

No.XXII. aſcenſurum in tubo liquorem. Nam

Si mercurius aſcendat, aer ſuperne incarceratus in arctius ſpatium condenſabitur :

Si condenſetur, majores acquiret elaterii vires, quam habuerat antea : (per Ax. III.)

Si majus acquirat elaterium, præpollebit ejus preſſio ponderi columnæ atmoſphaericæ R S, ut pote cui antea per idem Axioma æquipollebat.

Si præpolleat, hydrargyri ſtagnantis pars N fortius iterum premetur parte S, præſertim cum illam preſſionem augeat adhuc pondus columnæ mercurialis, tanto inſuper factæ altioris, quanto altius aſcenderit mercurius.

Verum neutra pars altera premi debet fortius: (per Ax. I.)

Non ergo aſcendet mercurius.

Argumentatio hæc eſt ſpecies deductionis ad abſurdum, qua ex hypotheſi adverſarii ratiocinando infertur aliquid notorie falſum; ex eo enim quod ſuppoſuimus, *aſcendere mercurium*, concluſimus, fore, ut *inæqualiter premerentur partes hydrargyri ſtagnantis N & S*: quod cum primo Axiomati, de cujus veritate inter nos convenit, adverſetur; regrediendo ad primam propoſitionem, e qua id fluxit, eam ipſam quoque falſam eſſe inferimus: quam argumentationem hypotheticam procedere dicunt a remotione conſequentis ad remotionem antecedentis.

Atque ſic utrumque Enunciationis Disjunctivæ membrum removimus: quare nunc demum ſubſumere poterimus (quod antea per prolepſin jam feceramus) *Atqui hydrargyrum nec eodem haſurum loco, multo minus aſcenſurum eſt.* Unde optime concludimus: *Ergo omnino deſcenſurum eſſe conſtat.*

Supereſt ut inquiramus adhuc, quouſque ſit deſcenſurum; quod iterum Syllogiſmo Disjunctivo, ſed bimembri, auſpicabimur, videl. iſto:

Argentum, aut deſcendit penitus, ſic ut omne e tubo effluat in vaſculum, aut deſcendit ſaltem aliquouſque: (tertium non datur.)

Atqui non deſcendit penitus: (iterum per prolepſin removemus, quod prius examinandum erit.

Ergo ſaltem ſubſidet aliquouſque.

Aſſumtionem ſic probo: *Si*

Si deſcenderet penitus, & omne e fiſtula efflueret. Aer ſuperne con- No.XXII.
cluſus ſeſe dilatare, totamque fiſtulæ cavitatem replere deberet:

Si dilataretur, debilitaretur ejus elaterium (per Ax. III.)

Si debilitatur ejus elaterium, preſſio illius tanta non eſt, quanta proficiſcitur a pondere columnæ atmoſphaericæ RS, (ut pote cui ante dilatationem ſaltem æquipollebat, per idem Ax.)

Si preſſio elaterii tanta amplius non ſit, ſtagnantis hydrargyri pars N, (quæ, poſtquam argentum omne e tubo decidit, a ſolo aere afficitur) *debilius ſcil. premetur parte S.*

Premi autem debent utraque æqualiter, quæ Liquidorum natura eſt per Ax. I.

Non ergo penitus effluet e fiſtula mercurius.

Quæ argumentatio ſimilis omnino eſt præcedenti: eſt enim Syllogiſmus Hypotheticus; cujus major includit Soritem ſeu complexionem plurium Enunciationum Hypotheticarum; minor, ſeu aſſumtum, removet ultimum conſequens, & concluſio tollit primum antecedens. Atque hoc obiter inſinuo, pleraſque Demonſtrationes geometricas nihil aliud eſſe, quam tales tectos Sorites, ſeu Syllogiſmos Hypotheticos complexos, quorum quidem alii procedunt a poſitione primi antecedentis ad poſitionem ultimi conſequentis; alii vero, qui ad abſurdum ἀπάγουσι, viciſſim a remotione ultimi conſequentis ad remotionem primi antecedentis.

14. Itaque ſcrutinium noſtrum eouſque profecuti ſumus, ut jam certo nobis conſtet, deſcenſurum mercurium, & quidem aliquouſque ſaltem: reliquus noſter labor in eo vertetur, ut præciſe determinemus, quouſque id fiat. Atque hic pulcherrimus demum ſeſe nobis aperit ſpeculationis campus. Prodeant jam vulgares Logici & Phyſici, diſquiſitionem noſtram ulterius, ſi poſſint, proſequantur, omnem mentis ſuæ intendant aciem, undiquaque conquirant ſibi arma, omnia ſua in uſum vertant præcepta; in caſſum laborabunt, nihil proficient, nullam invenient rimam, per quam minima ſibi lux affulgeat arcanum iſtud naturæ penitius perſcrutandi. Adeſto ergo Divina Matheſis, defectui huic opitulante manu ſuccurre, atque imperfectum opus

No.XXII. ad finem perducito! nimirum Tu incipis, ubi vulgaris Logica deſinit; tu Argo perſpicacior, ubi altera cæcutit; Tu contemnis, quo terretur altera; planæ Tibi viæ ſunt, quæ alteri aſperæ & ſalebroſæ videntur Syrtes. Te igitur duce inceptum iter proſequemur. Tentabimus autem primo, an & quouſque per Arithmeticam communem res confici poſſit. Quem in finem ſolvendum nobis proponemus peculiare exemplum:

Eſto (*Fig.* 4) Tubus MN, unum & viginti digitos longus, † hydrargyrum infuſum altitudinem viginti in illo digitorum occupet, ſupremo tantum pollice aeri conceſſo. Quandoquidem jam quæſtio ſit, quouſque deſcendere debeat mercurius, aſſumamus numerum aliquem ad lubitum, tanquam divinaturi veram quantitatem, de qua quæritur, eumque ſic aſſumtum examinemus ordine, quem ipſa cuique natura dictat, juxta conditionem in quæſtione requiſitam. Conditio autem hæc eſt, ut partes ſuperficiei ſtagnantis mercurii N & S æqualiter premantur: quare calculo explorandum eſt, quantam in noſtra ſuppoſitione utraque preſſionem ſubeat; ubi obſervare licet, partem quidem S eodem perpetuo cylindri atmoſphærici RS premi pondere, quod æquipollere diximus in Lemmate noſtro ponderi 29 circiter digitorum mercurialium, pro quibus, majoris evidentiæ ergo, numero rotundo triginta digitos accipiemus; alteram vero partem N diverſimode affici, prout profunditatem deſcenſus argenti in fiſtula majorem minoremve ſuppoſuerimus.

Supponamus itaque primo, argentum uno deſcendere pollice: hærebit ergo adhuc in altitudine 19 pollicum; ſed aer, qui antea unum occupaverat pollicem, nunc duos occupabit, adeoque duplo erit factus rarior, & proinde, per Ax. IV. duplo quoque minor ejus preſſio elaſtica, id eſt, cum antea æquipolleret ponderi cylindri atmoſphærici RS ſive 30 digitorum mercurialium, per Ax. III. nunc æquipollebit 15 digitis mercurialibus, qui

† Non comprehenſa Tubi portiuncula infra mercurii ſtagnantis ſuperficiem latente, utpote cujus nulla habenda ratio; quod & ubique in ſequentibus intelligendum.

qui juncti 19 illis digitis in tubo reſiduis, efficiunt 34 digitorum No. XXII. preſſionem, qua afficietur pars ſuperficiei N (premitur enim hæc tum immediate ab incluſo mercurio, tum mediante hoc ab aeris elaterio.) Sed cum altera S ſuſtineat preſſionem æquivalentem duntaxat 30 digitis, illa premetur fortius hac; quare adhuc humilius in fiſtula ſubſidet mercurius.

Ponamus ergo rurſum, deſcendere per duos pollices; ſic hærebunt in tubo reſidui 18 digiti; aer vero tres nunc occupans, triplo erit factus rarior, quam antea in naturali ſuo ſtatu fuerat; ejus ergo elater æquipollebit ſaltem tertiæ parti 30 digitorum, nim. 10 digitis, qui additi reſiduis 18, efficiunt 28 digit. mercur. quibus premeretur argentum vaſculi in parte N. Debilius igitur jam premeretur parte altera S, quæ preſſionem 30 digitorum ſuſtinet.

Cum ergo deſcenſum mercurii primum juſto minorem, dein juſto majorem aſſumſerimus; aſſumamus nunc medium inter utrumque, ſupponendo deſcendere per unum pollicem & dimidium; reque eodem modo, ſed nunc ob fractionem paulo difficilius examinata, deprehendetur ſuperficies ſtagnantis mercurii parte N fortius iterum premi, quam parte S; ſed non tanto exceſſu, quanto in prima ſuppoſitione, utpote * preſſionem tantum $30\frac{1}{2}$ pollicum ſuſtinens.

Quare ſumto proporro argenti deſcenſu $1\frac{3}{4}$ pollicis, factoque & repetito ſæpius examine, ita continuo numero quæſito appropinquabimus, ut tandem reperiamus vel ipſum verum numerum, vel vero adeo propinquum, ut differentia veri & aſſumpti fiat imperceptibilis, omnemque prorſus ſenſum fugiat. Atque hinc Problema, quod hoc pacto ſolvitur, per *Approximationem* ſolvi dicitur. Patet autem, iſtum ſolvendi modum, tametſi pure mechanicus

* Nam depreſſo per $1\frac{1}{2}$ poll. mercurio, reſidui manebunt ejus digiti in fiſtula $18\frac{1}{2}$; aere nunc ſpatium $2\frac{1}{2}$ dig. occupante; quare per Ax. IV. ſpatium $2\frac{1}{2}$ dig. (volumen aeris rarefacti) eſt ad 1 dig. (volumen aeris naturalis) ſicut reciproce preſſio hujus, 30 dig. merc. æquivalens, ad preſſionem illius, quæ propterea per auream regulam invenitur 12 digitorum, qui juncti illis $18\frac{1}{2}$, efficiunt $30\frac{1}{2}$ dig.

No.XXII. nicus ſit, & nihil peculiaris habeat artificii, nihilominus a nemine inſtitui poſſe, qui vulgaris Arithmeticæ, & in ſpecie Algorithmi fractionum non ſit callentiſſimus.

Accedimus ad alterum ſolvendi modum, inſtituendum per Artem Analyticam, Algebram alias dictam. Hæc eſt illa magna Ars inveniendi, quæ mentem methodo admirabili, artificio ſummo, ſucceſſu certo & infallibili, in quæſiti cognitionem deducit, tanto præſtantior Arithmetica communi, quanto hæc vulgari Logicæ palmam præripit: Hæc Artis ratiocinandi complementum & faſtigium ſummum: Hæc præclarum illud Depoſitum, quod Deus aliquibus ex humano genere, ceu Rationis aliquod Ἐπίμετρον, indulſit, cujus ope ad infinitæ ſuæ ſapientiæ & bonitatis veſtigia in abditiſſimis naturæ receſſibus contemplanda propius admitterentur.

Primus in hac inveſtigandi methodo labor eſt, ut quantitates propoſiti Problematis, tam datæ ſive cognitæ, quam incognitæ ſeu quæſitæ, characteribus quibuſdam a notis numeralibus diverſis deſignentur; & uſus quidem obtinuit, ut id fiat literis Alphabeti, quarum priores melioris diſtinctionis ergo ad cognitas, poſtremæ ad incognitas ſignificandas a Principe Geometrarum CARTESIO adhibentur. Appellemus itaque ſupremum fiſtulæ cylindricæ ſpatium ab aere occupatum a; ſpatium reliquum mercurio impletum b; cylindrum mercurialem æquiponderantem ſimili cylindro atmoſphærico, $b + c$; utpote in hac noſtra hypotheſi (in qua tubus 29 digitis brevior eſt) mercurio fiſtulæ incluſo altiorem; adeo ut per litteram c, indigitetur exceſſus, quo 29 digiti mercurii, * altitudinem mercurii fiſtulæ infuſi ſuperant: profunditatem denique quæſitam, ad quam mercurius in fiſtula ſubſidet, vocemus y. Quod ſi nobis ſolvendum proponeretur ſpeciale exemplum, ſufficeret equidem, ſoli incognitæ quantitati literam aſſignare, retentis quantitatum cognitarum numeris; interim longe præſtabilius eſt,

* Nos hic & in ſequentibus literas adhibemus, ad indigitanda promiſcue ſive ſpatia, ſive altitudines, ſive pondera; quoniam in cylindris æqualium baſium & materiæ homogeneæ omnia hæc tria ſunt proportionalia.

eſt, etiam cognitis attribuere litteras, quoniam hoc pacto non tantum præſens ſolvitur exemplum, ſed eadem opera univerſalis invenitur Regula, omnia ſolvendi ſimilia exempla, in quibus quantitates cognitæ continuo variæ & variæ accipiuntur; unde ſimul patere poterit, quantum habeat prærogativæ præ Algebra Numeroſa Veterum, Recentiorum Specioſa, VIETÆ & præcipue CARTESII induſtria ab interitu vindicata & in lucem reproducta, poſtquam ab antiquiſſimis Mathematicis, ARCHIMEDE, DIOPHANTO, aliiſque, multorum opinione, tecta & diſſimulata fuiſſet, ut propter abſtruſiſſimas res hac methodo a ſe inventas tanto majori poſteris admirationi forent. No. XXII.

Aſſignato ſic cuique quantitati ſuo charactere, percurrenda eſt totius Problematis ſeries, ordine quo omnium patet naturaliſſimo, uſque dum pateat modus, unam eandemque quantitatem duobus modis exprimendi, in quo conſiſtit *Æquatio.* Neque vero (in qua opinione verſantur multi, qui neſcio quæ difficultatum ſpectra hic ſibi fingunt) in incertum palpando hoc negotium expediri opus habet, quaſi nulla de eo conſtans præſcribi poſſit regula. Regula enim unica eademque univerſalis, quam Tyronibus probe inculcatam vellem, hæc eſt, *Quod nihil aliud faciendum nobis ſit cum characteribus iſtis Algebraicis, quam quod faceremus, ſi numero aliquo ad lubitum aſſumto, eum examinare vellemus, an ſit optatus ille, qui quæritur, necne?* Quid faceremus? Id quod fecimus ſupra, ubi per approximationem rem inquiſivimus. Quid fecimus? Examinavimus aſſumtum numerum, an ſatisfaceret conditioni in Problemate requiſitæ. Id ipſum ergo & nunc præſtabimus, hoc ſolo cum diſcrimine, quod cum ibi Algorithmus Arithmeticus in uſum fuerit adhibitus, nunc Algebraicus, quia cum litteris nobis res eſt, venit adhibendus. Sed ut utriuſque operationis analogiam, ſeu convenientiam, eo evidentius perſpiciatis, calculo literali eadem hic opera adjungam numeralem, aſſignato cuilibet literæ certo valore numeris expreſſo: Eſto verbi gr. in fiſtula 21 poll. longa, Altitudo incluſi aeris (quam vocavimus *a*,) 7 digitorum, Altitudo infuſi mercurii (quam diximus

Digitized by Google

No.XXII. b,) 14 digit. Exceſſus quo ſuperatur ejus pondus a pondere ſimilis cylindri atmoſphærici (dictus nobis c) 16 dig. mercur. adeo ut pondus integri cylindri atmoſph. $b+c$, ſit 30 dig. merc. Pro quæſita denique deſcenſus quantitate y, aſſumti ſint pro lubitu 3 digiti. Quo facto uterque porro calculus ſic inſtituitur.

Quoniam ſpatium aere naturali refertum eſt a, (7 dig.) ſpatium vero a mercurio deſcendente deſerendum y, (3 dig.) erit ſpatium ab aere dilatato occupandum $a+y$, (10 dig.) Cumque juxta Ax. IV. Raritates aeris, id eſt, ſpatia ab eadem aeris quantitate ſucceſſive occupata ſint in ratione reciproca Preſſionum, quas in utroque ſtatu exerit, erit volumen aeris dilatati $a+y$, (10 dig.) ad volumen aeris naturalis a, (7 dig.) uti viciſſim preſſio hujus [quæ per Ax. III. æquivalet ponderi atmoſphærico, ſeu per Lemma noſtrum ponderi mercuriali $b+c$ (30. dig.)] ad preſſionem illius; quæ propterea per auream regulam dividendo productum ſecundi & tertii termini per primum, invenitur $(ab+ac):(a+y)$, (21 dig.) cui ſi adjiciamus pondus mercurii poſt deſcenſum in tubo reſidui, nempe $b-y$ (11 dig.) erit tota preſſio, quam ſubit pars mercurii ſtagnantis N, $(ab+ac):(a+y)+b-y$ (32 dig.) altera vero, qua afficitur ſtagnantis mercurii portio S eſt $b+c$ (30 dig.) Inter has duas preſſiones inſtituenda deinceps eſt collatio, utpote quæ per Ax. I. æquari ſibi invicem debent; & quidem quantum ad numeros 32 & 30, quoniam hi inæquales deprehenduntur, ulterius progredi non poſſumus, ſed ex hoc ipſo cognoſcimus, aſſumtum numerum 3 dig. non indigitare veram deſcenſus quantitatem; nihilque aliud nobis agendum relinquitur, quam ut de novo aſſumamus aliquem numerum, eumque ſimiliter examinemus. Sed quod ſpectat quantitates literales $(ab+ac):(a+y)+b-y$ & $b+c$, facile animadvertitis, Auditores, poſſe fieri, ut vel æquales vel inæquales ſint, pro diverſo valore, qui affingi poteſt quantitati incognitæ y. Peculiare igitur ſupereſt negotium ad explorandum, quiſnam præciſe valor huic literæ aſſignandus veniat, ut dictæ quantitates inde æquales reſultent. Quem in finem ſupponenda ſtatim eſt æqualitas inter illas; unde emergit id quod vocari ſolet *Æquatio*, quæ ſic indigitatur,

giratur, $(ab+ac):(a+y)+b-y=$ ſeu *æquale* $b+c$. Proximum dehinc eſt, ut Æquatio iſta reducatur. Artificium *Reductionis* in eo conſiſtit, ut quantitas incognita y ſtatuatur ſola pro uno æquationis membro, tranſlatis omnibus cognitis in alteram partem, citra tamen æqualitatis utriuſque membri alterationem; quod negotium fundatur in ſimpliciſſimis illis axiomatibus: *Si æqualibus æqualia addas, auferas, multiplices, &c. tota, reſidua vel producta, &c. ſunt æqualia*; hac enim ratione fiet, ut valor incognitæ y inveniatur in puris cognitis. Quocirca cum in utroque inventæ æquationis membro ſeſe offerat lit. b, illa ante omnia expuncta relinquetur $(ab+ac):(a+y)-y=c$. Porro quia in propoſita æquatione deprehendo fractionem, illam reduco ad integra, multiplicando utrumque æquationis membrum per fractionis denominatorem; ſic habebo $ab+ac-ay-yy=ac+cy$. Poſtmodum ablata utrinque quantitate ac, quæ utrobique communis reperitur, reſtabit $ab-ay-yy=cy$. Deinde, ut quantitas yy, quæ negata exiſtit, affirmata fiat, addatur utrique membro, eritque $ab-ay=cy+yy$. Et ut ab una parte remaneat ſola, auferatur pariter cy, ut ſit $yy=-ay-cy+ab$. Quandoquidem autem quantitas incognita ad duas hic dimenſiones aſcendat, conſulendæ ſunt † æquationum quadratarum Formulæ, quarum beneficio invenitur * $y=-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}c+\sqrt{(\frac{1}{4}aa+\frac{1}{2}ac+\frac{1}{4}cc+ab)}$; ſic ut tandem valor ignotæ quantitatis in quantitatibus pure cognitis repertus fuerit. Quo pacto Additiones, Subtractiones, Multiplicationes & Diviſiones Algebraicæ ad hunc calculum ineundum neceſſariæ peragi debuerint, oſtendere conſulto prætermiſi; quoniam ii, in quorum præcipue gratiam hanc ſubjunxi Analyſin, Algorithmum iſtum privatim jam a me edocti ſunt, ſic ut aliud nihil ſupereſſe videretur, quam ut ejus quoque uſum No. XXII.

† Eas videſis in principio Geomet. Cartesii.

* Juxta enim haſce formulas valorem quæſitæ quantitatis indicat binomium, conſtans ex dimidio quantitatis cognitæ, rectangulum cum radice incognitæ in propoſita æquatione conſtituentis (quod dimidium hic eſt $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}c$) & ex latere quadrato aggregati reſultantis e quadrato hujus dimidii (nempe $\frac{1}{4}aa+\frac{1}{2}ac+\frac{1}{4}cc$) & quantitate pure cognita (quæ hic eſt ab.)

Digitized by Google

No.XXII. uſum & applicationem in præclari cujuſdam, facilis tamen Problematis ſolutione conſpicerent. Ex invento autem quæſitæ quantitatis valore, talis tandem ſtrui poteſt univerſalis Regula, & verbis ita concipi:

* *Si quadratum dimidiæ altitudinis incluſi aeris* ($\frac{1}{4}$aa), *& quadratum dimidii exceſſus, quo pondus atmoſphæricum ſuperat pondus mercurii incluſi* ($\frac{1}{4}$cc), *una cum illo, quod provenit ex altitudine incluſi aeris bis multiplicata, ſemel in dimidium dicti exceſſus,* ($\frac{1}{2}$ac), *ſemel in altitudinem mercurii incluſi,* (ab), *in unam ſummam conjiciantur; & ab aggregati latere quadrato* ($\surd$($\frac{1}{4}$aa + &c.) *ſubtrahatur dimidium altitudinis incluſi aeris* ($\frac{1}{2}$a), *una cum dimidio dicti exceſſus* ($\frac{1}{2}$c), *reſiduum indicabit, quouſque deprimendus ſit mercurius.*

Si cui jam volupe ſit, is poterit hanc Regulam extemplo ad plures ſpeciales caſus applicare, inque ſingulis calculo ſubducere quæſitam deſcenſus quantitatem: Ut ſi in Fiſtula 21 poll. longa relicti fuerint 7 aeris digiti, gravitaſque atmoſphæræ æquiponderare deprehenſa ſit $29\frac{1}{4}$ dig. mercur. qualiter illam domi in Baroſcopio ante bihorium ſaltem obſervavi, ſignificabit lit. *a*, 7. dig. *b*, 14 dig. *c*, $15\frac{1}{4}$ dig. adeoque

$\frac{1}{4}aa = 12\frac{1}{4}$	A ſummæ latere quadr.	$= 14\frac{7}{8}$. proxime
$\frac{1}{4}cc = 58\frac{9}{64}$	ſubtr. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$	$= 11\frac{1}{8}$.
$\frac{1}{2}ac = 53\frac{3}{8}$	Relinquitur y	$= 3\frac{3}{4}$ proxime
$ab = 98$	pro futura quantitate deſcenſus mercurii.	
Summa $= 221\frac{49}{64}$		

Atque hoc modo conſtructa eſt ad ſingulos caſus ſequens Tabella.

*. Eandem vid. in Diſſ. *de Gr. Æth.* p. 101. 102.

Tabella

Tabella pro cognoſcenda quantitate deſcenſus mercurii ; in Fiſtula 21 digit. longa, eo tempore, quo atmoſphæra $29\frac{1}{4}$ digitis mercurii æquiponderat : No. XXII.

Quantitas aeris in tubo relicta.	Quantit. deſcenſus mercurii.	
dig.	*dig.*	*part. ſedec. dig.*
1.	— 1.	11. paulo min.
2.	— 2.	9. p. plus.
3.	— 3.	2. p. min.
4.	— 3.	7. p. pl.
5.	— 3.	10. p. pl.
6.	— 3.	12.
7.	— 3.	12. p. pl.
8.	— 3.	11. p. pl.
9.	— 3.	10. p. min.
10.	— 3.	7. p. pl.
11.	— 3.	4. p. pl.
12.	— 3.	1. p. min.
13.	— 2.	13. p. min.
14.	— 2.	8. p. pl.
15.	— 2.	4. p. min.
16.	— 1.	14. p. pl.
17.	— 1.	9. p. min.
18.	— 1.	3. p. pl.
19.	— 0.	12. p. min.
20.	— 0.	7. p. min.
21.	— 0.	0.

Inſpiciendo hanc Tabellam non ſine delectatione obſervabit Lector, quo pacto deſcenſus quantitas initio gradatim accreſcat, & poſtmodum ſenſim iterum decreſcat. Quare cum deſcenſus omnium maximus producatur a 7 aeris pollicibus, in hoc Experimentum ſumere conſtitui, ut effectus eo magis redderetur conſpicuus.

(Hic factum eſt Experimentum cum optato ſucceſſu.)

Ex iſtis omnibus, velut documenti loco, colligere poteſtis Auditores, quantum momentum conferat Matheſis Phyſicæ, cui aliquid amplius, quam majorem ſaltem perfectionis ſuperaddit gradum, ut nuper quoque Theſibus meis IX & X miſcell. innui ; eo quod deſtitutus ejus ope Phyſicus ſupputare nequeat, qua præ-

No. XXII. ciſe quantitate effectus ex ſuis principiis ſequi debeat, quod tamen omnino requiri videtur ad hoc, ut ſuarum aſſertionum certus eſſe poſſit. Pone namque, Phyſicum aliquem Matheſeos ignarum idem ſibi Phænomenum explicandum ſuſcepiſſe, vagis autem & nimis generalibus, aut etiam falſis uſum eſſe principiis, ex quibus nihilominus ratiocinando nobiſcum collegerit, nec aſcenſurum, nec eadem altitudine ſuſpenſum hæſurum, ſed aliquouſque deſcenſurum mercurium; tametſi iſte deſcenſus, ſi ab aliquo hujus rei gnaro ſub calculum revocaretur, deprehenderetur differre ab illo, quem nos calculo ſubduximus, & experientia confirmavimus. Talis namque Phyſicus ſibi aliiſque perſuadebit, ſe genuinam Phænomeni dediſſe cauſam, poſtquam inſtituto experimento deſcendere repererit mercurium; quamvis illum & ſibi & aliis imponere, evidenter iis liqueat, qui deſcenſus iſtius quantitatem calculo examinare noverint.

Ita demum, Auditores optimi, valete.

F I N I S.

Digitized by Google

No. XXIII.

Dni. BERNOULLI

NARRATIO CONTROVERSIÆ

Inter Dn. Hugenium *& Abbatem* Catelanum *agitatæ de* Centro Oſcillationis *quæ loco Animadverſionis eſſe poterit in Reſponſionem* Dn. Catelani, *num.* 27. *Ephem. Gallic. anni* 1684, *inſertam.* †

Excerpta ex Litteris Dn. Bernoulli Lipſiam miſſis.

MENSE Septembri Anni 1681, Abbas Catelanus propoſitionem quandam tractatus Cl. Hugenii, quem de *Horologio Oſcillatorio* incripſerat, adortus eſt, formata contra illam objectione; in qua, quia mentem ſuam minus feliciter expreſſit, anſam dedit iſti controverſiæ, quæ huc uſque fere inter illos viguit. *Acta Erud. Lipſ. 1686. Jul. p. 356.*

Verum quidem eſt eum, initio Anni 1682, objectionis ſuæ paucis additis lineis variationem quandam induxiſſe; ſed quoniam ejus partes ſatis adhuc male cohærentes reliquit, eam in mente Lectoris ſui excitavit opinionem, quaſi perſuaſum haberet ſummas altitudinum, e quibus pondera alicujus penduli junctim deſcendunt,

† *Supra* No. X.

N.XXIII. cendunt, & ad quas poſtmodum ſeparatim aſcendunt, inæquales eſſe debere, hanc ſolam ob cauſam, quod, *priores altitudines ſint proportionales ipſis ponderum celeritatibus, poſteriores vero non niſi quadratis iſtarum celeritatum.* Quare etiam HUGENIUS, id unicum CATELANO ſcrupulum movere ratus, reſpondere abſtinuit, uſque in menſem Junium, quo tandem calamum arripuit, ac exemplo duorum numerorum 5 & 10, duorumque aliorum 3 & 12, breviter monſtravit fieri utique poſſe, ut binæ quantitates eandem cum binis aliis conficiant ſummam, etiamſi diverſam ab illis rationem habeant; neque tum temporis in dubium revocavit πρῶτον CATELANI ψεῦδος, quod tamen in prima jam objectionis impreſſione manifeſte ſatis prodiderat, dum ſuppoſuit: *Pendulum ex duobus ponderibus compoſitum, eandem acquirere celeritatem, quantam acquirat ſumma pendulorum ſimplicium:* id vero ſicco pede præteriit HUGENIUS, vel quod non penetrarit ſtatim, ob nullam periodorum connexionem, quorſum falſa iſta CATELANI ſuppoſitio tenderet, vel potius quod illi, ceu veriſimili admodum, tum ipſemet adſtipularetur. CATELANUS interea *Hugeniano* reſponſo non contentus, excepit 20 Julii 1682, ac terminis algebraicis rem aggreſſus eſt, eodem innixus fundamento: *Quod totalis celeritas penduli compoſiti aquet ſummam celeritatem partium ejus ſeparatarum.* Quo facto, controverſia iſta ultra annum ſopita jacuit.

Me quod ſpectabat, cui HUGENII liber tum nondum viſus, nedum lectus fuerat, ſcopum alium non habebam, quam illuſtrare ejus reſponſionem, remque examinare, qualiter ab ipſo examinata, atque in Actis recenſita fuerat. Animadvertens itaque CATELANI principium ab HUGENIO non refutatum eſſe, & ego illud intactum reliqui; ſufficere mihi ratus, ſi *Hugenianum* reſponſum ſimpliciter applicarem ad præſentem controverſiam, propoſito eum in finem exemplo penduli, e duobus æqualibus ponderibus compoſiti; ubi innuere ſaltem volui quod, ſuppoſito pro totali ejus celeritate numero ternario, (quidquid ſtatuatur de celeritatibus utriuſque ſeparatim ſpectati ponderis, dummodo eæ ſint in ratione 2 ad 1) quadrata $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$ ex mente HUGENII ſignifi-

ſignificare debeant non niſi *rationem altitudinum*, ad quas aſcen- N. XXIII.
dant ſeparata pondera, minime vero *ipſas altitudines* (quod ipſe quoque poſtmodum indigitavit HUGENIUS in ſecunda Reſponſione, 8 Jun. 1684;) partim quoniam celeritates atque altitudines, utpote quantitates heterogeneæ, ſe mutuo menſurare non poſſunt; partim etiam quia ipſe CATELANUS urgere ſaltem videbatur, altitudines eſſe *proportionales* quadratis, vel *ſicut* quadrata celeritatum; tametſi in proxime ſequenti calculo quadrata iſta pro ipſis altitudinibus adhibuerit. Comparato mihi paulo poſt, & perlecto HUGENII libro, animadvertebam, Propoſitionem controverſam ex priore Hypotheſium, quas Auctor initio ſtabiliverat, adeo evidenter inferri, ut neutra infringi poſſit, quin ſimul evertatur altera: quo circa judicabam, ſi CATELANO falſa fuiſſet viſa Propoſitio, eum potius ipſam adoriri debuiſſe Hypotheſin, magnumque illud inibi contentum Principium Mechanicum. Verum enim vero, cum hujus Principii veritatem nullo jure in dubium revocare poſſem, atque ſimul etiam ſeriem ratiocinii a CATELANO ſatis confuſe propoſiti evolvere cœpiſſem; errorem ejus illico detexi, falſamque cognovi eſſe, qua nitebatur, regulam, nimirum: *Celeritatem totalem penduli compoſiti æqualem eſſe ſummæ celeritatum partium ejus ſeparatarum.*

Atque ut oſtendam animadverſum mihi fuiſſe errorem, priusquam HUGENII Epiſtola die 8 Jun. lucem aſpexiſſet; offeram hic cauſam phyſicam, omiſſam ab HUGENIO, qua fit, ut penduli compoſiti celeritas perpetuo minor ſit celeritate partium ejus ſeparatarum: Ponamus, majoris evidentiæ ergo, pondera penduli A & B in linea inflexili DB libere hinc inde moveri poſſe; ſic ut linea hæc, dum rotatur circa axem D, quamvis ſecum rapiat pondera, non tamen impediat deſcenſum illorum in linea recta verſus centrum Terræ. Quo poſito, conſtat utrumlibet pondus, ſigillatim dimiſſum, eadem celeritate latum iri, qua ferretur abſque virga DB; ut pote nec a virga, nec ab ejus axe ullo modo impeditum; ideſt, ſi pondus A abſque virga certo tempore conficit ſpatium AH, & pondus B ſpatium æquale BN, utrumque etiam cum virga, ſed ſigillatim, dimiſſum eodem tempore

 idem

N XXIII. idem ſpatium AH & BN conficiet. Conſtat inſuper quod, ſi gravitas in utrumque pondus ageret viribus, quæ proportionatæ forent ipſorum reſpectivis ab axe diſtantiis, virga nullum adhuc ipſorum deſcenſui afferret impedimentum; propterea quoniam, exacto certo tempore, unum eorum reperiretur in H, & alterum in I, vel prius in L, poſterius in N, ſive abſque virga, ſive cum virga, ſive ſigillatim, ſive conjunctim dimitterentur. Verum enim vero, quoniam gravitas in utrumque pondus agit viribus æqualibus, ſic ut pondera eodem tempore æqualia ſpatia AH & BN tranſigere annitantur; & tamen interea pondus A junctim dimiſſum, ob inflexilem virgam, nequit pertingere niſi ad L, dum pondus B jam eſt in N, hinc ſequitur, gravitatis vim in pondere A non eſſe exhauſtam; adeoque reſiduum harum virium, ex una parte urgere debere corpus B, ex altera ipſum axem D, eundemque premendo aliquam ſui partem ibidem inſumere & deperdere; ſiquidem virga, hocce caſu, inſtar vectis conſiderari poſſit: prout extra dubium eſt, quod ſi corpus B infinite tarde moveri, ideſt, firmum & ſtabile eſſe intelligatur, ſicut axis D; corpus A partem ſui ponderis, æque in axem D, atque in corpus B transferret. Ex hactenus dictis colligere proclive eſt, ſi quis examinare vellet quantam partem celeritatis ſuæ pondus A in premendo axe D conſumere debeat; cum exinde, imitando Dn. Catelani ratiocinium, veritatem aut falſitatem *Hugenianæ* Hypotheſeos, inque hac fundatæ propoſitionis detegere poſſe.

Rogantur hac occaſione Eruditi, ut examinent, qualem legem communicationis celeritatum obſervent corpora mota, quæ ex una parte innituntur firmo fulcimento, ex altera alii corpori itidem, ſed tardius moto: ſi namque celeritatis exceſſus, qui hinc inde communicandus eſt, in eadem ratione diſtribueretur, in qua diſtribuitur onus aliquod, quod vecti duobus ſuſtentato fulcris impoſitum eſt, nimirum in reciproca diſtantiarum mobilis a fulcris; tum imitando ratiocinium Dn. Catelani, deprehenderemus ſummam altitudinum, ad quas aſcendunt ſeparata penduli pondera, viciſſim nunc minorem eſſe ſumma altitudinum, e quibus antea

Digitized by Google

antea conjunctim deſcenderant, quod iterum *Hugenianam* Propoſitionem everteret. N.XXIII.

En calculum: Eſto altitudo A L $= 1$ ped.
altitudo B M $= 4$ ped.

Celeritas ponderis A acquiſita in puncto L, ubi deſcendit ſeparatim $= 1$

Celeritas ponderis B acquiſita in puncto N, quando cadit ſeparatim $= 2$

Celeritas ponderis A acquiſita in puncto L, quando deſcendit conjunctim $= x$

Igitur exceſſus celeritatis ponderis A, qui tam in axem, quam in pondus B redundat $= 1 - x$

Et pars hujus exceſſus, quæ ſoli ponderi B communicatur $= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$

Tota ergo celeritas ponderis B in puncto N cum conjunctim cadit $= 2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$

Atqui vero $2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x : x = 4 : 1$. Igitur $x = \frac{9}{17}$ & $4x = \frac{36}{17}$ eorumque quadrata $\frac{81}{289}$ & $\frac{1296}{289}$ quorum ſumma $4\frac{13}{17}$ minor eſt $1 + 4 = 5$.

Antequam finiam, in favorem Dn. Catelani hoc moneo, quod etiamſi commune gravitatis centrum, juxta illum, altius aſcendere deberet, quam deſcendit; nondum tamen ſequatur, repertum fore motum perpetuum, ut ſibi perſuadet Ill. Hugenius; quoniam in iſtis abſtrahi ſolet ab aeris reſiſtentia, a diminutione celeritatis, quæ neceſſario ſequitur diſruptionem vinculi, quo connectebantur partes penduli, aliorumque obſtaculorum; prout ipſa quoque hæc aeris reſiſtentia in cauſa eſt, cur ſimplex pendulum motum ſuum non continuet, ut maxime in Hypotheſi *Hugeniana* ad eandem aſcendere debeat altitudinem, a qua deſcendit.

Videantur Num. XLIV. *&* XLV.

No. XXIV.

N°. XXIV.

D^{N.} BERNOULLI

DEMONSTRATIO

Rationum, quas habent ſeries numerorum naturali progreſſione ſeſe inſequentium, vel quadratorum, cubicorum, &c. item trigonalium, pyramidalium &c. ad ſeries numerorum totidem maximo æqualium,

Excerpta ex iiſdem litteris.

Acta Erud. Lipſ. 1686. Sept. p. 360.

WALLISIUS in Arithmetica Infinitorum, id ſola inductione inveſtigare docet; cui demonſtrandi modo, cum parum ſcientificus ſit, alium eumque facillimum hic ſubſtituam: Exempli gratia; Explorandum ſit, an ratio ſeriei numerorum naturali progreſſione ſe excipientium & a cyphra inchoantium, ad ſeriem totidem maximo æqualium ſemper ſit ſubdupla. Pono rem examinatam eſſe aliquouſque; terminumque ultimum, in quo examinando ſubſtiti, appello a: eritque numerus terminorum, ob initialem cyphram, unitate major, nempe $a+1$: adeoque ſumma totidem ultimo æqualium $aa+a$; cui cum ſumma progreſſionalium inductione ſupponatur reperta fuiſſe ſubdupla, erit hæc $(aa+a):2$. Augeatur jam ſeries progreſſionis uno termino; eritque adjectus terminus $a+1$, qui junctus ſummæ præcedentium $(aa+a):2$ producit $(aa+3a+2):2$, ſummam totius progreſſionis: ſed cum numerus terminorum jam ſit $a+2$, erit

erit ſumma totidem adjecto ultimo æqualium, $aa + 3a + 2$, quæ N. XXIV.
ſummæ progreſſionalium itidem dupla exiſtit. Quod ſi iſte terminus, qui modo vocatus erat $a + 1$, appelletur a, inſuperque novus progreſſioni adjiciatur, qui erit $a + 1$, eadem valebit demonſtratio. Cum ergo conſtet, rationem ſubduplam, in qualibet ſerie deprehenſam, inferre eandem in ſerie uno termino auctâ, atque hinc etiam in ſerie duobus, tribus, &c. infinitis terminis auctâ; ſequitur univerſim, quod ſi hæc proprietas in paucis ſeriebus inductione reperta fuerit, pariter communis ſit omnibus. Q. E. D.

Ad eundem modum demonſtrabitur, rationem ſummæ ſeriei quadratorum a cyphra incipientium, ad ſummam totidem maximo æqualium eſſe ſubtripla majorem, exceſſu quem indigitat ea ratio quam habet unitas ad ſextuplum radicis quadratæ termini maximi: item ſummam ſeriei trigonalium a duabus, pyramidalium a tribus &c. cyphris inchoatorum, ad ſummam totidem maximo æqualium eſſe ſubtriplam, ſubquadruplam &c. ſupponendo nimirum, id aliquouſque ſaltem inductione compertum eſſe, illudque deinceps demonſtrando de ſerie uno termino auctâ.

No. XXV.

EXAMEN
PERPETUI MOBILIS,
PARISIIS PUBLICATI,
Et in Novellis Reipublicæ literariæ Roterodamenſibus *menſe Nov.* 1685. *Art.* VII. *ad diſcutiendum propoſiti.*

Acta Erud. Lipſ. 1686. Dec. p. 623.

P*OTUISSEMUS deſcriptione Machinæ hujus ſuperſedere; quippe cujus defectus in memoratis* Novellis hujus anni, Articulo VII, menſis Aprilis, p. 444. *ex* Tranſactionibus Anglicanis, menſis Decembris 1685, pag. 1240. a D. PAPINO, *Regiæ Societatis Anglicanæ Socio, jam dum detectus habetur: niſi a Clariſſimo Viro* JAC. BERNOULLI *nobis ſubmiſſa peringenioſa Machinæ dictæ diſcuſſio, utramque Lectoris B. ulteriori inquiſitioni exponere nos admonuiſſet. Deſcriptionem vero machinæ non ipſius* Auctoris *verbis exhibemus, ſed laudati* D. PAPINI, *ex Anglico in Latinum idioma tranſlatis; adjecta ejuſdem cenſura, quam* Bernoullianum *deinde* Examen *excipiet. Sic vero* D. PAPINUS:

Propoſitionem de motu quodam perpetuo, non ita pridem in Galliis impreſſam, cum ita involuta ſit, ut non niſi difficillime ab iis poſſit intelligi, qui non magnopere ejuſmodi deſcriptionibus aſſuevere, ſequenti modo conatus ſum explicare.

D E F, (*Fig.* 1.) eſt follis 40 pollices longus, qui deductis alis F ab E, expandi poteſt. Sit vero idem undique exacte occluſus, præterquam ad foramen E, cui tubus E G, 20 aut 22 pollices longus, exactiſſime adferruminandus; hujus vero altera extremitas vaſculo G, pleno mercurii, & prope medium follis conſtituto, immittenda.

A, eſt axis, circa quem follis revolvi poteſt.

B, ſacoma inferiori parti follis affixum.

C, pondus cum pinna, retinendo folli in ſitu erecto.

Jam

Jam ſi ſupponatur, follem ſic erectum, tantum tertia aut quarta ſui parte diſtentum, plenumque mercurii eſſe; perſpicuum eſt, mercurium 40 pollices altum, deſcenſurum ad 27 circiter pollices, juxta experimentum Torricellianum: conſequenter follis ſe verſus E expandet, relinquetque ibi ſpatium vacuum: ſpatium hoc replebitur mercurio, in vaſculo G contento, qui per tubum G E aſcendet, cum tubus hic non niſi 22 pollices longus ſit: ob hanc cauſam follis magis magiſque ſe divaricabit, uſque dum mercurius aſcenſum continuans, ſupremum follis tam grave reddat, ut inferior pars a pinna C ſe expediat, folliſque ad inverſum prorſus ſitum revolvatur; niſi vaſculum G ita convenienter collocatum eundem in ſitu horizontali, juxta Figuram 2 detineret: pars etiam F alia pinna C ſiſtenda eſt. Tunc mercurius pondere ſuo ex folle, per tubum E G, defluet in vaſculum G; ipſeque follis eo uſque ſe contrahet, ut pars E F ita levis evadat, ut ſacoma B valeat partem F a pinna C liberare: tum follis ſe iterum eriget, ut in Figura 1; mercurius in eo reſiduus, deſcendet denuo ad altitudinem 27 pollicum, & conſequenter cæteri effectus omnes ſupra memorati contingent, motuſque in perpetuum continuabitur. Huc uſque Auctor Gallicus. No. XXV.

Ad hoc notandum eſt: quod follis ſe non diſtendere poſſit, per preſſionem interiorem, niſi hæc preſſio fortior ſit exteriore: jam vero in hoc caſu pondus atmoſphæræ libere premit exteriorem follis partem; verum ad interiorem pervenire non poteſt, niſi per tubum G E; qui continens 22 pollices perpendiculares mercurii, ita contranititur preſſioni aeris, ut ſupponendo hanc preſſionem eſſe 27 pollicum mercurii, eadem hæc non poſſit premere interiorem partem follis, niſi pondere quinque pollicibus mercurii perpendicularibus æquipollenti.

Unde concludere licet, preſſionem atmoſphæræ intra follem plus debilitatam eſſe, quam ut mercurium in dicto folle contentum poſſit adjuvare; id quod calculo facile oſtendi poteſt, dictumque follem, juxta Fig. 1. erectum, clauſum potius perſtiturum, quam ſe expanſurum. Ut ita, nullo laboris ſumptuumve periculo facto, quivis certus eſſe poſſit, machinam ejuſmodi omnino fore fruſtraneam. *Hactenus* D. Papinus.

Digitized by Google

N°. XXVI.

EXAMEN BERNOULLIANUM.

Acta Erud. Lipſ. 1686. Dec. p. 625.

MACHINA hæc peringenioſa eſt, & cum legibus hydroſtaticis prima fronte egregie conſpirare videtur: ſed hoc habet peculiare, quod qua parte eam optime cum iis conſentire putes, eadem ſi penitius inſpexeris, quam maxime iis repugnare deprehendas. Conſiſtit autem in ſpecie quadam Follis, 40 digitos alti, impletique mercurio, cuſpide ſua deorſum, baſe ſurſum verſa, & circa axem horizontalem, alterutrius alæ medio applicatum, mobilis. Exiſtimat enim Inventi hujus Auctor (ſed falſo, ut mox videbimus) argentum vivum in folle deſcenſurum ad conſuetam, quam in experimento Torricelliano obtinet, 27 digitorum altitudinem, atque hoc ſuo deſcenſu dilataturum alas follis, relicto in ſummitate ejus vacuo, quod alio deinceps mercurio, mediante aeris preſſione, adimplendum ſit. Anſam erroris haud dubie captavit inde, quod videret hydrargyrum non tantum in fiſtulis cylindricis, ſed in tubis quoque inferne acuminatis & conum referentibus, deſcendere ſolere: non conſiderans, aliam longe hac in parte rationem eſſe mercurii ſuſpenſi in cono firmorum laterum & acuminis perforati, per quod defluere poſſit in vaſculum; aliam rationem mercurii in folle ejuſmodi, ſeu cono ſubtus impervio, detenti, & viciſſim per ſolam laterum aperibilium expanſionem deſcenſum molientis. Dico namque, multo majorem requiri quam 40 digitorum in tali cono incluſoque mercurio altitudinem, ad æquipondium faciendum cum externo aere, latera coni introrſum premente; nedum, ad ejus preſſionem ſuperandam. Cujus aſſertionis veritatem, ſimplicioris calculi, & majoris evidentiæ ergo, oſtendam ſolum in tri-

an-

angulo, facile poſtmodum accommodando ad pyramides conoſve, in quibus, ob dimenſionum pluralitatem, demonſtratio valebit a fortiori. N. XXVI.

Eſto itaque Triangulum Iſoſceles ABC, (*Fig.* 3) perpendiculariter erectum, cujus angulus, ſeu vertex B, deorſum proſpiciens libere aperiri claudique poſſit; ſic ut ejus crura AB, CB repræſentent quaſi duos vectes mobiles circa punctum B, ceu hypomochlium ſuum. Area porro trianguli tota repleta ſit mercurio, qui diviſus concipiatur in filamenta innumera, qualia ſunt *db*, *db*, tum inter ſe, tum axi DB parallela, quæ pondere ſuo agant in crura AB, CB, eaque divaricare conentur; dum totidem filamenta atmoſphærica *eb*, *eb*, extus urgentia, eadem comprimere annituntur: ubi ſtatim apparet, tametſi filamentum mercuriale DB, 40 digitos longum, pondere exſuperet æque craſſum filamentum atmoſphæricum; bene tamen fieri poſſe, ut omnia filamenta mercurialia ſimul ſumpta, ut pote continue verſus A & C decreſcentia, multo minus habeant momentum atmoſphæricis omnibus ſimul ſumptis, ceu pondere & longitudine ad ſenſum æqualibus. Sed ut palam fiat, quanta debeat eſſe altitudo trianguli ſeu longitudo filamenti DB, ut momenta utrobique reddantur æqualia; conſiderandum, pondera filamentorum mercurialium *db*, *db*, conſtituere ab A verſus B [perinde ut ex altera parte quoque] infinitam ſeriem arithmetice progreſſionalium, o, 1, 2, 3, 4, &c. uſque ad DB, cujus pondus appellemus x: diſtantias vero eorundem reſpectivas ab hypomochlio B [poſita AB $= a$] eſſe a, $a - 1$, $a - 2$, $a - 3$, $a - 4$, &c. uſque ad $a - a$; adeoque momenta, utpote ex ratione ponderum & diſtantiarum compoſita, o, $a - 1$, $2a - 4$, $3a - 9$, $4a - 16$ &c. uſque ad $ax - ax$, quæ ſeries eſt primanorum, diminuta ſerie ſecundanorum, cujus proin ſumma eſt $aax : 6$. Nam quanquam momenta revera minora ſint, propter obliquam filamentorum actionem in crura trianguli, hoc tamen non officit calculo; quoniam, ex altera parte, filamenta atmoſphærica actione ſua reflexa eodem obliquitatis angulo latera iſta feriunt, atque ita eorum momenta in eadem ratione minuuntur. Conſtituunt autem iſto-

N. XXVI. rum filamentorum atmoſphæricorum pondera ſeriem æqualium; quorum ſingula vocentur p; diſtantiæ eorum ab hypomochlio B, eædem ſunt quæ ſupra: unde reſultat ſeries momentorum, pa, $pa - p$, $pa - 2p$, $pa - 3p$, $pa - 4p$, &c. uſque ad $pa - pa$, cujus ſumma exiſtit $paa : 2$. Et quoniam momenta hinc inde ſupponuntur æqualia, erit igitur $aax : 6 = aap : 2$, ſive $x = 3p$: quod indigitat, pondus filamenti mercurialis DB triplo majus eſſe debere pondere ſimilis filamenti atmoſphærici; id eſt, [ſi pondus atmoſphæricum, numero rotundo, 30 digitis mercurialibus æquivalere ſupponamus] follem triangularem 90 digitos altum requiri, antequam incluſus mercurius æquilibrium duntaxat cum aere conſtituat, nedum illi prævaleat. Quod ſi vero in pyramide vel cono ſimilis calculus inſtitueretur: deprehenderetur, omnino quadruplo majorem, ſcilicet 120 digitorum in illis altitudinem depoſci.

Sed & porro, etiamſi follis triangularis 90, aut pyramidalis conicus-ve 120 digitis fieret altior, non tamen exiſtimandum eſt, deſcenſurum propterea in illo mercurium ad dictos uſque 90, vel 120 digitos: hærebit enim iis adhuc notabiliter altius, ob rationem quod deſcendendo deſerit ſupremam alarum follis partem: in quam pergit agere aer externus, qui majori hac ratione ſuſtinendæ altitudini par eſt. Si (*Fig.* 4) Latus trianguli AB vocetur l; altitudo mercurii BD, [quam obtinet in triangulo ABC,] $mp > 3p$; & altitudo ejuſdem BE [ad quam deſcendit in folle expanſo aBc,] y; reperietur æquatio $y^4 - 3plly + mmppll - m^4p^4 = 0$ *. Quo circa, poſita altitudine DB, ſeu

mp

* Quoniam in folle expanſo non major eſt mercurii quantitas quam in contracto, erit $BD \times DA = BE \times EF$, ſeu [poſito $BF = x$] $mp \times \sqrt{(ll - mmpp)} = y\sqrt{(xx - yy)}$. Momenta autem filamentorum atmoſphæricorum in totum latus Ba, efficiunt ſummam $= \frac{1}{2}pll$ [hic enim latus vocatur l, quod ſupra dicebatur a]. Momenta vero filamentorum mercurialium in partem BF [x] lateris BA agentium, & quorum maximum eſt BE [y], efficiunt ſummam $= \frac{1}{6}xxy$ [Scil. hic x idem eſt quod ſupra a, & y idem quod ſupra x]. Ergo, ob æqualia momenta, habemus $\frac{1}{2}pll = \frac{1}{6}xxy$, vel $xx = 3pll : y$; quo ſubſtituto, æquatio ſuperior $mp\sqrt{(ll - m^2p^2)} = y\sqrt{(xx - yy)}$, mutatur in $mp\sqrt{(ll - mmpp)} = y\sqrt{(3pll : y - yy)}$; quadrando $llmmpp - m^4p^4 = 3llpy - y^4$, ſeu $y^4 - 3llpy + llmmpp - m^4p^4 = 0$.

Digitized by Google

$mp = 4p = 120$ digit. Si latus follis $AB = l$, ſtatuatur digitorum, erit $y = 106$ fere: & ſi $l = 140$; erit $y = 101$ fere, utrobique ſcilicet major quam 90. Sin $l = 150$; erit quidem $y = 90$, præciſe, ſed tum nullum in folle relinquitur vacuum, mercurio replente totam ejus cavitatem, utpote quæ expanſis ultra rectum angulum alis iterum diminuitur, ſicuti antea accreverat. Si $l = 150$, deſcendet mercurius, dilatabiturque follis ultra angulum rectum, quouſque nullum in illo ſuperſit vacuum, ſiquidem hoc per ejus aperibilitatem liceat; ſecus enim relinquetur quidem vacuum, ſed utroque caſu argentum in majore quam 90 digitorum altitudine hærebit. Si denique $l > 170$, nec deſcendet mercurius, nec dilatabitur follis omnino; quoniam alias volumen ejus contraheretur, nec argentum haberet, quo cederet. N.XXVI.

Illud etiam inſuper non prætereundum eſt, quod in allato calculo ſolius aeris lateralis in comprimendis cruribus vires contemplati ſumus, excluſa adhuc conſideratione aeris baſi trianguli AC imminentis, eamque deſuper deprimentis introrſum, atque ita alarum AB, CB diſtenſionem tanto fortius prohibentis: quo fit, ut ad mercurii deſcenſum promovendum altitudo trianguli aſſignata multo adhuc major requiratur. Si & hujus habenda foret ratio, id accuratius quidem non aſſequeremur, quam ſi calculum noſtrum fundaremus ſuper Principio illo Mechanico, quo ſtatui ſolet, *Nullum produci poſſe motum naturalem, niſi eo motu, centrum commune gravitatis corporum in ſe agentium deſcendat.* Hunc enim in finem concipiendum eſſet triangulum ABC [*Fig.* 4.] incluſum Rectangulo HI, latitudinis arbitrariæ, altitudinis vero ultra fines Atmoſphæræ HL tantiſper productæ; cogitandumque, dum dilatato triangulo ſubſidit mercurius in FG, neceſſum eſſe, ut aer exundet in MN; adeoque ut centrum gravitatis hujus attollatur, illius deprimatur: unde id ſolum calculo explorandum relinquitur, utrum commune utriuſque centrum gravitatis eo motu elevetur deprimaturve; & ſi reperiatur deprimi, quouſque devaricanda ſint crura AB, CB, donec illud loco omnium humillimo conſiſtat. Quod Problema ut jucundum, ſic Viris Analyſtis non prorſus indignum cenſebitur. Ubi id ſolum moneo, aerem baſi

N. XXVI. baſi trianguli AC incumbentem, diverſos plane habiturum effectus, prout baſin hanc vel rigidam & ſolutam, vel, ut eſt, introrſum plicatilem & punctis A, C affixam conceperis; priori namque caſu conatum mercurii in divaricandis cruribus juvat; poſteriori, in iiſdem contrahendis, aeri laterali auxilium feret.

Cum itaque ex hactenus dictis ſatis pateat, follem (ſepoſito etiam aeris baſin deprimentis impedimento) minimum 90 digitos altum requiri, ut in illo tantillus mercurii ſequatur deſcenſus: facile deinceps capiet Lector, nequicquam ejus medio adaptari exterius vaſculum cum tubo ad ſummitatem follis pertingente, ad replendum, ſi quod ibi extiterit vacuum: quoniam enim tubus cum in finem ad minimum 45 digitos longus ſit oportet, manifeſtum eſt fluxum mercurii per illum ſuccedere non poſſe.

Si quis vero malo huic medelam allaturus, elevatione vaſculi tubum abbreviare vellet, is novæ difficultati ſe intricatum ſentiret: nam flueret tum quidem mercurius ex vaſe in follis ſummitatem; ſed, iſto poſtmodum circa axem medio ſui applicatum rotato, ſitumque horizontalem adepto, argentum ex folle in vaſculum ſe elevatius retrofluere amplius non poſſet. Tacco alia, quæ Machinam hanc urgent incommoda, ita comparata, ut ſi unam ejus partem perfeciſſe credideris, alteram continuo mancam & claudicantem deprehendas.

Videatur Nus. XXVIII.

N°. XXVII,

N°. XXVII.

Q. D. B. V.

SOLUTIONEM
TERGEMINI PROBLEMATIS,
ARITHMETICI, GEOMETRICI,
ET
ASTRONOMICI;

Una, cum adnexis ex univerſa Matheſi

COROLLARIIS;

Pro vacante Sede Mathematica,

Ad diem 4 *Februarii Anni* M. DC. LXXXVII.

Ventilandam ſiſtit

JACOBUS BERNOULLI, *L. A. M.*

Editum primo

BASILEÆ

1687.

Digitized by Google

Digitized by Google

PROŒMIUM.

QUANQUAM in hoc ſtudii genere, de quo promovendo ſolliciti nunc ſunt Ampliſſimi Proceres, vires meas qualeſcunque jam frequenter ſatis publico oſtenderim, haud ægre tamen, ſpeciali hac occaſione, nova iſthæc profectuum ſpecimina aggreſſus ſum, ut laudabili Academiæ noſtræ conſuetudini, quantum in me foret, ſatisfacerem. Id interim in hac materia cavendum eſſe duxi, ne qui alias Exercitiorum iſtiusmodi Academicorum mos eſſe conſuevit, magnum Propoſitionum numerum aliunde congererem, Theſiumque loco ventilandum proponerem; partim quia veritates mathematicæ ejus ſunt certitudinis & evidentiæ, ut non, ſicut pleraque alia, diſputantium rixis & altercationibus obnoxiæ ſunt; partim vero, & quidem præcipue, quoniam Propoſitiones multas ab aliis inventas & demonſtratas in promptu habere ac oſtentare, memoriæ potius vim, quam ingenii mathematici acumen redolet. Mathematici namque partibus defungitur, non qui aliorum inventa exſcribere, memoria tenere, aut recitare data occaſione poteſt; ſed qui ab aliis propoſita, divinæ ope Algebræ, invenire & eruere novit ipſe. Hæc illa Magna Ars inveniendi eſt, qua deſtitutus non magis dicen-

Digitized by Google

dus quis eſt Mathematicus, quam qui Melodias omnifarias memoriter cantare didicit, propterea ſalutari ſolet Muſicus, aut Arti muſicæ docendæ præfici. Quemadmodum enim talis, ut appoſito hoc ſimili utar, melodias omnes memoriæ mandatas prompte quidem ſæpe, & canora voce canere novit, ſed iis decantatis exhauſta ſimul omnis ejus eſt ſcientia; contra vero ille, qui Muſicam ex artis principiis addidicit, non opus habet ullam memoriæ imprimere, cum eaſdem illas quas novit alter, & infinitas alias ſibi oblatas, ex notis, ut ſolemus loqui, decantare ſciat: Ita etiam qui Algebra imbuti ſunt, arte ſua confiſi, non magna Theorematum & Problematum ab aliis inventorum ac demonſtratorum farragine memoriam ſuam onerari patiuntur, cum ipſimet vel ignotas ſibi, vel oblivioni traditas Propoſitiones de novo inveniendi & demonſtrandi artificium ac methodum norint. Quocirca officii mei ratio poſtulare videbatur, ut meas quoque in præſentiarum vires in præclara hac inveniendi Arte experirer; quem in finem tria ſelegi, non a me efficta, ſed ab aliis propoſita Problemata, Arithmeticum, Geometricum, *&* Aſtronomicum, *ex totidem Matheſeos partibus, quæ in Academia noſtra hactenus pro cathedra communiter tractari ſolebant. Illorum vero ſolutioni ſubjunxi, ex univerſa Matheſi cognatiſque diſciplinis, nonnulla Corollaria; ut Lector de nobiliſſima hac ſcientia, ejuſque uſu latiſſimo dignas concipere diſcat ideas, Deoque O. M. pro rebus tam præclaris, tamque utilibus, quas generi Mortalium revelare voluit, debitas perſolvat gratias.*

SOLUTIO

SOLUTIO
TERGEMINI PROBLEMATIS.

I. PROBLEMA ARITHMETICUM:

Invenire, abſque Algebræ ſubſidio, ſolius Arithmeticæ Numeroſæ ope, Numerum, qui 12 & 36 ita dividat, ut ſi quotorum utrique addantur 8, ſummæ hinc emergentes ſint in ratione 3 ad 5.

CUM Problema iſtud, antehac ventilatum, Auctorem habeat inſignem, Amico referente, N.XXVII Mathematicum, cui præter Algebram, per ſolam Numeroſam Arithmeticam, vix ſolvi poſſe viſum fuerit; omnino dignum cenſui nodum hunc, in quo ſolvendo vires meas experirer.

Hoc vero antequam præſtem, ſequentia præmonenda habeo.

I. Per *Algebram* intelligunt Mathematici Logiſticam illam ſymbolicam, quæ loco numerorum ſymbolis quibuſdam, videlicet litteris Alphabeti, aliiſque characteribus, in ſuis calculis uti ſolet. Ejus præcipua & principalis pars vocatur *Analytica*, *Ars Reſolutoria*, in eo conſiſtens, ut quantitati quæſitæ, ſeu incognitæ, aſſignetur littera, & tum juxta Propoſitionis tenorem procedatur, nullo inter cognitas & incognitam facto diſcrimine; donec, varia inſtituta reductione, quantitas incognita æquetur alicui pure cognitæ. Atque hic calculus non confundendus eſt cum alio cal-

N.XXVII culo ſymbolico, vel algebraico, qui Syntheticus magis eſt, quique in Theorematibus demonſtrandis ut plurimum adhibetur, qualis ille eſt, quo mox proprietatem Regulæ Falſi demonſtratam dabimus: *Analyſis* enim plerumque in Problematibus ſolvendis (quale noſtrum eſt) in quibus aliquid faciendum vel inveniendum præſcribitur, locum habet; adeo ut Auctoris noſtri mens haud dubie non ſit, a ſolutione hujus Problematis ſymbola algebraica omnino arcere, ſed innuere duntaxat, illud aliter quam *Analytice* ſolvi non poſſe.

II. Probe obſervari velim, Arithmeticam Numeroſam non ita ab Algebra independentem eſſe, ut Regulas ſuas ſuiſmet debeat principiis, aut eas ex alio quam Algebræ fundo hauſerit. Ipſæ enim pleræque vulgaris Arithmeticæ Regulæ, ut ſunt, Regulæ falſi, Virginum, Alligationis, Societatis, imo ipſa Regula Trium, Algebræ ſubſidio aut primitus inventæ ſunt, aut ſi neſciantur, vel oblivioni tradantur, ſaltem inveniri denuo & demonſtrari poſſunt; omneſque Æquationes algebraicæ, quarum numero infinitæ ſunt, nil aliud præſtant, quam totidem novas ſuppeditare Regulas, quibus Arithmetica Numeroſa quodammodo in immenſum ditari poſſet. Et quidem ut talis Regula omnibus ejuſdem generis exemplis accommodanda Analytice inveniatur, opus eſt, ut non tantum incognitæ, ſed & cognitæ, datæque quantitates Alphabeti litteris deſignentur; quod ut in noſtro exemplo palam fiat, ſic proponi poterit.

Invenire numerum aliquem (v) *qui duos datos* (a & b) *ita dividat, ut ſi quotorum utrique addatur datus numerus* (c,) *ſumma hinc emergentes ſint in data ratione* (d *ad* e).

Analyſis

Analyſis ſic habet : $\frac{a}{v}+c : \frac{b}{v}+c = d : e,$

$$\frac{a+cv}{v} : \frac{b+cv}{v} = d : e,$$

$$a+cv : b+cv = d : e$$

$$ae+cev = bd+cdv$$

$$cev-cdv = bd-ae$$

tandemque $v = (bd-ae) : (ce-cd)$

In quibus octo litteris univerſalis involvitur Regula, omnibus ſimilibus exemplis ſolvendis inſerviens, quæ quidem verbis ſic enunciabitur:

Regula: *Datos numeros* (a & b) *duc in alternos data rationis terminos* (c & d): *productum minus a majori ſubtrahe; quod reliquum eſt* (bd — ae) *erit Dividendus. Similiter numerum addendum* (c) *duc ſigillatim in utrumque rationis terminum, iterumque productum minus a majori ſubtrahe: reliquum* (ce — cd) *erit Diviſor, per quem ſi dividatur Dividendus, indigitabit Quotiens numerum optatum* (v).

Ad hunc modum pro quolibet exemplorum genere, ope Algebræ, peculiaris invenitur Regula; interque infinitas iſtas Regulas hæc ſola differentia eſt, quod paucæ admodum illarum tantum, illæ videlicet quæ in vita civili inſignem & frequentem præbent uſum, vulgo in Syſtemata Arithmetica referri ſoleant; adeo ut vulgaris Arithmetica Numeroſa, proprie loquendo, nihil aliud ſit quam Complexio quinque vel ſex Æquationum algebraicarum ſive Regularum, præ cæteris in vita civili eximium & frequentem uſum habentium.

Itaque cum quæſtio eſt, *An aliquod exemplum ſolvi poſſit ope Arithmetica Numeroſa?* ſenſus hic eſt, *An præter Regulam, quam unumquodque Exemplorum genus peculiarem ſibi depoſcit, ſolvi quoque poſſit per aliquam illarum in Syſtematibus vulgo receptarum?* Ubi manifeſtum eſt, ut iſtud fieri queat, Exemplum propoſitum conditionem Problematum illa Regula ſolvendorum habere debere;

Digitized by Google

N.XXVII re; vel ſi non habeat, eo reducendum eſſe, ut conditionem hanc acquirat.

Quod jam præſens noſtrum ſpectat Problema, cuivis tentanti facile patebit, illud, ex. gr. per *Regulam Falſi* ſolvi non poſſe; quod quidem indicium præbet, deficere ipſi conditionem, quam requirunt Exempla per Regulam Falſi ſolvenda; interim vero levi opera eo reduci poterit, ut hanc conditionem induat.

Proprietas Regulæ Falſi vult; Ut *differentiæ numeri veri & numerorum aſſumptorum inter ſe exiſtant ut mendacia.*

Demonſt. Eſto enim v, Numerus verus, qui quæritur: $v \pm m$, $v \pm n$, numeri aſſumpti; adeoque m & n differentiæ veri & aſſumptorum, p & q mendacia: Demonſtratio ſic habebit:

$$\left.\begin{array}{ll} v+m & +p \\ v+n & +q \end{array}\right\} p-q \qquad\qquad \left.\begin{array}{ll} v-m & -p \\ v-n & -q \end{array}\right\} p-q$$

$$vq+mq \quad vp+np \qquad\qquad vq-mq \quad vp-np$$

$$v=\frac{vp+np-vq-mq}{p-q} \qquad\qquad v=\frac{vp-np-vq+mq}{p-q}$$

$$vp-vq=vp+np-vq-mq \qquad\qquad vp-vq=vp-np-vq+mq$$

$$np=mq \qquad\qquad np=mq$$

$$\left.\begin{array}{ll} v+m & +p \\ v-n & -q \end{array}\right\} p+q$$

$$vq+mq \quad vp-np$$

$$v=\frac{vp-np+vq+mq}{p+q}$$

$$vp+vq=vp-np+vq+mq$$

$$np=mq$$

Quoniam ſemper deprehenditur $np=mq$, erit $m:n=p:q$. id eſt, differentiæ veri & aſſumptorum, ut mendacia. Q. E. D.

Ut igitur in noſtro Problemate requiſita conditio adſit, & differentiæ iſtæ mendaciis ſuis proportionales fiant, deſignentur aſſumpti

Digitized by Google

ſumpti numeri falſi per f, & g: verus per v, adeoque differentiæ per $f-v$, & $g-v$. Jam quia mendacia debebunt eſſe, ut $f-v$, & $g-v$, erunt, ſubſtituto valore ipſius v reperto ſupra, ut $f-(bd-ae):(ce-cd)$ & $g-(bd-ae):(ce-cd)$, id eſt, ut $(cef-cdf-bd+ae):(ce-cd)$ & $(ceg-cdg-bd+ae):(ce-cd)$, id eſt, ut $cef-cdf-bd+ae$ & $ceg-cdg-bd+ae$, id eſt, ſi pro uno mendaciorum ponatur $cef-cdf-bd+ae$ [nempe differentia inter $ae+cef$ & $bd+cdf$] erit alterum pariter mendacium $ceg-cdg-bd+ae$ [videlicet differentia inter $ae+ceg$ & $bd+cdg$.] Mendacia autem iſta habentur, ſi exploretur, num $a+cf: b+cf = d: e$. item $a+cg: b+cg = d: e$, id eſt, num producta ex $a+cf$ in e, & $a+cg$ in e ſint æqualia productis ex $b+cf$ in d, & $b+cg$ in d. Si enim producta iſta ſint inæqualia (quod ſemper fiet, quando aſſumpti f & g a vero v, abludunt) eorum differentiæ indigitabunt mendacia; quibuſcum, ſi rite juxta præcepta Regulæ Falſi duarum poſitionum opereris, obtinebis quæſitum. N.XXVII

Liquet hinc, quam levi mutatione opus ſit, ut Problema noſtrum naturam Exemplorum per Regulam Falſi ſolvendorum induat. Sic enim tantum proponendum foret:

Quæritur Numerus ita comparatus, ut ſi numeris 12 *&* 36 *ſeorſim addatur productum ex quæſito & dato* 8, *ſummæ hinc emergentes ſint in ratione* 3 *ad* 5.

Aliter quoque rem expedivi hac ratione: Conſideravi, quotos (quos Problema innuit) eandem habere debere ad invicem rationem, quam habent ipſi numeri dati 12 & 36, adeoque etiam unum quotorum + 8, ad alterum quotorum + 8, eandem habere rationem, quam habet numerus 12 + numero cv (toties ſcilicet continente octonarium c, quoties alteruter dividendus continet ſuum quotum) ad 36 + eodem numero cv, per 15.V. El. Unde ſequitur, ſi unus quotorum + 8, ad alterum + 8, eſt ut 3 ad 5; fore quoque numerum 12 + numero cv, ad 36 + numero cv, ut 3 ad 5. Poſitis ergo, pro hoc numero cv, duobus quibuſvis, inſtitui poterit per illos examen juxta Regulam Falſi; propterea quia mendacia differentiis veri & aſſumpto-

Digitized by Google

N.XXVII rum iterum erunt proportionalia, id quod facile demonſtrari poſſet, ſi prolixitate hac foret opus. Reperietur autem in noſtro Exemplo pro numero *cv*, 24: qui quia ter continet octonarium *c*, ſequitur etiam ipſos dividendos 12, & 36, continere ſuos quotos ter; ideſt, numerum quæſitum *v* eſſe *ternarium*.

I I.

PROBLEMA GEOMETRICUM.

CUM verſarer Amſtelodami, Geometra quidam in plateis publicis ſequens affixit Problema, invitato (qui Mathematicorum mos eſt) ad ejus ſolutionem Lectore.

Fig. 1. 2. 3. *Op een pladt ABC, in de welcke AB* 50, *BC* 100, *en den hoek ABC regt, ſijn opgeregt de loodtry hangenden AB* 200, *BE* 150, *en CF* 100, *in'tzelve plat te vinden alte ſtippen G, H, enz. alſoo dat (wanneer in een vierhoek IKLM de hoecken IKM en ILM in't beſonder regte zijn, KL* 33, *beyde IK en IL t'ſamen* 77, *en beyde KM en LM t'ſamen* 99) *beyde IK en IM t'ſamen tot KM de ſelve reden hebben, als DG tot FG, DH tot FH, enz. Deſgelijks alſo dat (wanneer in een geliik beenigen driehoek NOP, wiens geliicke NO en NP in't beſonder* 100, *en de groond-ſtreep OP* 56, *drie aan-een-rakende ronden ingeſchreven zijn) d'halfmid ſtreep QR des ongelijken rondts tot d'halfmidſtreepen ZY en VY der gelijcke ronden in't bijſonder heeft een tWeevoudige reden der gene, die EG tot FG, EH tot FH, enz. heeft. Te vinden, ſeg ik DG, DH, enz. EG, EH, enz. en FG, FH enz.*

id eſt:

Erectis ſuper plano ABC, (*in quo* AB 50, BC 100, *anguluſque* ABC *rectus*) *tribus perpendicularibus*, AD 200, BE 150 & CF 100, *invenire in plano illo omnia puncta* G, H, &c. *ita comparata, ut* (*exiſtentibus in quadrangulo* IKLM *angulis* IKM & ILM *ſigillatim rectis*, KL 33, *ambabus* IK, IL, *ſimul ſumptis* 77, & *ambabus* KM, LM *ſimul ſumptis* 99) *amba* IK, IM *ſimul ſumpta ad* KM *eam rationem habeant, quam* DG

DG *ad* FG, DH *ad* FH *&c. Similiter, ut [Inſcriptis triangulo Iſoſceli, cujus crura* NO *&* NP *ſigillatim ſunt partium* 100, *&* *baſis* OP 56, *tribus circulis ſeſe mutuo tangentibus] ſemidiameter inaqualis circuli* QR *ad ſemidiametrum alterutrius aqualium circulorum* ZY *vel* VY, *habeat rationem duplicatam ejus, quam habet* EG *ad* FG, EH *ad* FH, *&c. invenire, inquam,* DG, DH, *&c.* EG, EH, *&c. &* FG, FH, *&c.* N.XXVII

Patet, Problema iſtud tria diſtincta Problemata in ſinu fovere, quorum duo priora tertio principaliori Lemmatum inſtar præmittenda ſunt.

L E M M A I.

D*Atis in Quadrilatero* IKLM, [Fig. 1.] *latere* KL, 33; IK+IL, 77; KM+LM, 99: *anguliſque* IKM, ILM *rectis; invenire ſeorſim latera* IK, KM, IM: *& proinde etiam* IK +IM, *rationemque quam habet* IK+IM *ad* KM.

S O L U T I O : Conſtat ante omnia, circumferentiam circuli ſuper diametro IM deſcripti tranſituram per puncta K & L, ob angulos IKM, ILM rectos; adeoque circa quadrilaterum IKLM circumſcribi poſſe circulum. Quare IL in KM = IK in LM + KL in IM.

Sunto jam $KL = a$ Item $KM = x$

$IK + IL = b$ $IL = y$

$KM + ML = c$ $IM = z$

adeoque $IK = b - y$

$LM = c - x$

$$IKq + KMq\,[IMq] = LMq + ILq$$

$$bb - 2by + yy + xx = cc - 2cx + xx + yy$$

$$bb - 2by = cc - 2cx$$

$$2cx = cc - bb + 2by \;\&\; x = (cc - bb + 2by) : 2c. \odot.$$

$$2by = bb - cc + 2cx \;\&\; y = (bb - cc + 2cx) : 2b.$$

$$\odot.\; xx = (c^4 + b^4 + 4bbyy - 2bbcc + 4bccy - 4b^3y) : 4cc. Б$$

Atqui etiam $IKq + KMq = IMq$

$$bb - 2by + yy + xx = zz$$

N.XXVII Subſtituto igitur in hac Æquatione valore ipſius x x ♄. Erit
$zz = (c^4 + b^4 + 2bbcc - 4b^3y - 4bccy + 4bby + 4ccyy) : 4cc$, ♃.
Porro KM in IL = KL in IM + IK in LM

$$xy = az + bc - cy - bx + xy$$
$$bx + cy - bc = az$$
$$z = (bx + cy - bc) : a,$$

poſitoque valore ipſius x ⊙, habebitur

$$z = (2bby + 2ccy - b^3 - bcc) : 2ac$$

$zz = (4b^4yy + 4c^4yy + b^6 + bbc^4 + 8bbccyy - 4b^5y - 8b^3ccy - 4bc^4y + 2b^4cc) : 4aacc = (c^4 + b^4 + 2bbcc - 4b^3y - 4bccy + 4bbyy + 4ccyy) : 4cc$, ♃.

Facta utrinque multiplicatione per $4aacc$,
$4b^4yy + 4c^4yy + b^6 + bbc^4 + 8bbccyy - 4b^5y - 8b^3ccy - 4bc^4y + 2b^4cc = aac^4 + aab^4 + 2aabbcc - 4aab^3y - 4aabccy + 4aabbyy + 4aaccyy$.

Tranſponatur yy in unam partem,
$(4b^4 + 4c^4 + 8bbcc - 4aabb - 4aacc)yy = (4b^5 + 8b^3cc + 4bc^4 - 4aab^3 - 4aabcc)y - b^6 - bbc^4 - 2b^4cc + aac^4 + aab^4 + 2aabbcc$

Fiat diviſio per quantitatem cognitam ipſi yy adhærentem, eritque $yy = by - bb : 4 + aacc : (4bb + 4cc - 4aa)$

$$y = \tfrac{1}{2}b + ac : 2\sqrt{(bb + cc - aa)}$$
$$x = \tfrac{1}{2}c + ab : 2\sqrt{(bb + cc - aa)}$$
$$z = (bb + cc) : 2\sqrt{(bb + cc - aa)}$$

Ergo poſitis $KL = a = 33$
$IK + IL = b = 77$
$KM + ML = c = 99$
reperitur $KM = x = 60$
$IL = y = 52$
$IM = z = 65$

unde $IK = b - y = 25$
$LM = c - x = 39$
& $IK + IM = b - y + z = 90$
adeoque
$IK + IM : KM = 90 : 60 = 3 : 2$

Conſtr. Geom. [Figura 4.] Ductis normalibus AC, BL, abſcindatur OL = b, & OA = c; ſubtenſa AL fiat diameter ſemicirculi AKL, in quo applicetur data LK, ducaturque KA. Fiant anguli OLC & OAB = LAK. Biſecentur BL & AC, in D & E;

& E; ſuper KL erigantur ΔKLI & KLM, ut ſit LI $=$ LD, KI $=$ DO, KM $=$ AE, LM $=$ EO, jungaturque IM. Erit IKLM optatum quadrilaterum. N. XXVII

LEMMA II.

In Triangulo Iſoſcele NOP [Fig. 2.] *cujus omnia latera data ſunt*, NO [NP] 100, & OP 56; *inſcribere tres circulos ſe mutuo & trianguli latera tangentes, eorumque invenire centra & radios; & proinde tum rationem, quam hi radii inter ſe habent, tum rationis hujus ſubduplicatam.*

SOLUTIO. Obſervandum 1°. circulos ad baſin eſſe neceſſario æquales: 2°. illos tangi debere a demiſſa perpendiculari NS. 3°. in hac perpendiculari fore centrum circuli ad verticem.

Sunto jam SP $= a$	Item SW $=$ VW $= y$
SN $= b$	QR $= z$
PN $= \sqrt{(aa+bb)} = c$	adeoque WP $= a - y$

PX $=$ WP $= a - y$, ob congruent. Triang. VPX, VWP

SP : PN $=$ SW : NT ♃	SP : SN $=$ PW : WT
$a : c = y : \frac{cy}{a}$	$a : b = a - y : b - \frac{by}{a}$

Hinc VT [WT — WV] $= b - y - by : a$ ☿

& VT$q = bb + yy + bbyy : aa - 2by - 2bby : a + 2byy : a$

TXq(VTq—VXq)$= bb + bbyy : aa - 2by + (2byy - 2bby) : a$, *

SP : SN $=$ VX : TX ♀

$a : b = y : \frac{by}{a}$

Pro inveniendis centris circulorum ad baſin:

Modus I.

TX$q =$ ♀ $bbyy : aa =$ * $bb + bbyy : aa - 2by + (2byy - 2bby) : a$

$2byy : a = 2bby : a + 2by - bb$

$2byy = 2bby + 2aby - abb$

N.XXVII

$$yy = by + ay - \tfrac{1}{2}ab$$

$$y = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b - \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}bb)}$$

hoc eſt $y = (a + b - c) : 2$, propter $\sqrt{(aa + bb)} = c$

Aliter brevius.

NY [NS—SY] = NX [NP—PX], ob congr. Tr. NVY, NVX

$$b - y = c - a + y$$

adeoque $y = (a + b - c) : 2$

Modus II.

♃. NT + ♀ TX + XP = NP

$$cy : a + by : a + a - y = c$$

$$cy + by + aa - ay = ac$$

$$cy + by - ay = ac - aa$$

$$y = (ac - aa) : (c + b - a)$$

Modus III.

SP : PN = VX : ☿ VT

$$a : c = y : b - y - \frac{by}{a}$$

$$cy = ab - ay - by$$

$$cy + ay + by = ab$$

$$y = ab : (c + a + b).$$

Pro inveniendo centro circuli ad verticem.

Eſto $NX = d$, quæ cognita y, latere nequit, utpote = NT + TX = $(cy + by : a)$

PS : SN = QR : NR

$$a : b = z : \frac{bz}{a}$$

Hinc RX [NX — NR] = $d - bz : a$ ☾

QV$q = zz + 2yz + yy$

QIq = (QR — VX)$q = zz - 2yz + yy$

IVq = QVq — QI$q = 4yz = dd - 2bdz : a + bbzz : aa$ = ☾ RXq

$$4aayz = aadd - 2abdz + bbzz$$

$$bbzz = 2abdz + 4aayz - aadd$$

$$zz = (2abdz + 4aayz - aadd) : bb$$

$$z = (abd + 2aay - 2a\sqrt{(abdy + aayy)}) : bb.$$

Sive

Sive ſubſtituto valore ipſius $d = (cy + by) : a$ & $aa + bb = cc$ N. XXVII.

$$z = (ccy + aay + bcy - 2ay\sqrt{(bc + cc)}) : bb$$

Ergo poſitis SP $= a = 28$	Invenitur VW $= y = 12$
SN $= b = 96$	NX $= d = 84$
adeoque PN $= c = 100$	QR $= z = 16\frac{1}{3}$

Hinc QR : VX $= 16\frac{1}{3} : 12 = 49 : 36 = 7 : 6$ bis.

Conſtr. Geom. Producta perpendiculari NS, (*Fig.* 5.) SE $=$ SP, abſciſſaque NC $=$ NP, dimidio reſidui CE aſſumatur æqualis SY, ſuper qua deſcriptis quadratis SV & SZ, erunt puncta V & Z centra circulorum ad baſin; quæ quidem reperiuntur aliter, biſecando angulos NSP & SPN; per 4. IV. EUCL. Deinde, protracto latere quadrati YV, uſque ad I interſectionem NP, factaque NG $=$ SY, ducantur rectæ IM, FGH, illa perpendiculari NE, hæc baſi OP parallela: ipſi vero FH aſſumatur æqualis YA, & agatur AB etiam parallela baſi OP. Huic AB ſtatuatur æqualis SD, centroque D, radio DS, deſcribatur arcus SM ſecans rectam IM in M: iterumque centro V, radio IM, alius deſignetur arcus, ſecans perpendicularem in Q. Erit Q, centrum circuli ad verticem.

PROPOSITIO PRINCIPALIS.

Erectis ſuper plano ABC: (Fig. 3) (*in quo* AB 50, BC 100, *anguluſque* ABC *rectus*) *tribus perpendicularibus*, AD 200, BE 150, *&* CF 100, *invenire in plano illo omnia puncta* G, H, *&c. ita comparata, ut* DG *ſit ad* FG, DH *ad* FH, *&c. in ratione ſeſqui-altera* (*ea videlicet quam habet in quadrilatero* Schem. 1, IK + IM *ad* KM.) *Et ut* EG *ad* FG, EH *ad* FH, *&c. habeat rationem ſeſquiſextam* (*ſubduplicatam nempe ejus, quam in Iſoſcele* Schem. 2, QR *habet ad* VX.)

Sunto	AD $= a$	DG : FG $= m : o$	BT $= x$
	CF $= b$	EG : FG $= n : o$	TG $= y$
	BE $= c$		RT $= d - x$
	AB $= d$		CS $= e - y$
	BC $= e$		

AGq,

N.XXVII $AGq\ (ATq + TGq) = dd - 2dx + xx + yy$

$DGq\ (AGq + ADq) = dd - 2dx + xx + yy + aa$

Pariter $FGq\ (CSq + SGq + CFq) = ee - 2ey + yy + xx + bb$

Unde Proportio

$$DGq: \qquad FGq$$

$$dd - 2dx + xx + yy + aa : ee - 2ey + yy + xx + bb = mm : oo$$

eaque ad æqualitatem reducta

$$mmee - 2mmey + mmyy + mmxx + mmbb = oodd - 2oodx + ooxx + ooyy + ooaa$$

$$mmyy - ooyy - 2mmey = - mmxx + ooxx - 2oodx + ooaa + oodd - mmbb - mmee$$

$$yy - 2mmey : (mm - oo) = - xx - (2oodx - ooaa - oodd + mmbb + mmee) : (mm - oo)$$

Pro inveniendo loco Æquationis, conſule Element. Curvarum *Joh.* De Witt, inſerta poſter. Parti *Geom.* Cartes. Lib. 2. Cap. III. pag. 196. Quod ita fit:

$$z = y - mme : (mm - oo), \text{ aut } y = z + mme : (mm - oo)$$

$$yy = zz + 2mmez : (mm - oo) + m^4ee : (mm - oo)^2$$

$$2mmey : (mm - oo) = 2mmez : (mm - oo) + 2m^4ee : (mm - oo)^2.$$

Ergo $yy - 2mmey : (mm - oo) = zz - m^4ee : (mm - oo)^2$

Hinc $zz - m^4ee : (mm - oo) = - xx - (2oodx - ooaa - oodd + mmbb + mmee) : (mm - oo)$

$$zz + xx + 2oodx : (mm - oo) = (ooaa + oodd - mmbb - mmee) : (mm - oo) + m^4ee : (mm - oo)^2$$

Poſitoque $x + ood : (mm - oo) = u$ ſeu $x = u - ood : (mm - oo)$

$$zz + uu - o^4dd : (mm - oo)^2 = (ooaa + oodd - mmbb - mmee) : (mm - oo) + m^4ee : (mm - oo)^2$$

$$zz = - uu + (ooaa + oodd - mmbb - mmee) : (mm - oo) + (m^4ee + o^4dd) : (mm - oo)^2$$

Poſitoque $(ooaa + oodd - mmbb - mmee) : (mm - oo) + (m^4ee + o^4dd) : (mm - oo)^2 = ff$

Erit $zz = - uu + ff$.

Unde

Unde apparet, æquationem eſſe reductam ad formulam Theorematis XIV, Locumque quæſitum eſſe Circumferentiam Circuli, quæ quidem determinatur ita: N.XXVII

Figura 6. Producta BC, fiat $BK = mme : (mm - oo)$, ut CK ſit $mme : (mm - oo) - e$ ſeu $ooe : (mm - oo)$. Per K ducatur LK parallela ipſi AB, fiatque $KM = ood : (mm - oo)$, producta ſcilicet AC in LM, ut ſit $CB : BA = CK : KM$, ſeu e ad d, ut $ooe : (mm - oo)$ ad $ood : (mm - oo)$. Super M, radio $MG = f$, deſcribatur circulus, cujus peripheria GNH eſt Locus optatus. Aſſumpto enim in illa puncto utcunque, veluti P, actaque in BA protractam, ſi opus ſit, perpendiculari PS, ſi BS vocetur x, & SP, y; erit LP $(SP - SL)$ $y - mme : (mm - oo) = z$, & quoniam LM $(LK + KM) = x + ood : (mm - oo) = u$, hinc $zz + uu$ $(LPq + LMq) = MPq = MGq = ff$. quare $zz = - uu + ff$. Q. E. D.

Quod ſi in Loci hujus inveſtigatione punctum G extra angulum ABC, vel ſuperne, vel inferne, vel a parte dextra, vel ſiniſtra aſſumptum fuiſſet, in eandem perpetuo æquationem incidiſſemus, variatis tantum omnifariam ſignis + & − quantitatum $2mmey : (mm - oo)$ & $2oodx : (mm - oo)$. Interim determinatio & conſtructio Loci prorſus manet eadem.

Fig. 3. & 6. Pro determinando Loco altero, qui reſpondet rationi EG ad FG, ſeu n ad o, haud abſimili calculo reperitur Æquatio: $yy - 2nney : (nn - oo) = - xx + (oocc - nnbb - nnee) : (nn - oo)$. Poſitoque $z = y - nne : (nn - oo)$ ſive $y = z + nne : (nn - oo)$ habetur $zz = - xx + (oocc - nnbb - nnee) : (nn - oo) + n^4 ee : (nn - oo)^2$

Unde colligitur, Locum ipſum iterum eſſe Circumferentiam Circuli ita deſcribendi: In producta BC, cape $BO = nne : (nn - oo)$ ſeu $CO = ooe : (nn - oo)$, faciendo ſcilicet $CK : CO = nn - oo : mm - oo$, & ſuper O, radio $OG = \sqrt{((oocc - nnbb - nnee) : (nn - oo) + n^4 ee : (nn - oo)^2)}$, fac peripheriam GQH, in qua optatus Locus eſt; cumque

N.XXVII hic circulus priorem non niſi in duobus punctis G & H interſecare poſſit, ſequitur non niſi duo hæc puncta ſatisfacere junctim utrique rationi m ad o, & n ad o; hoc eſt *ita eſſe comparata, ut ducta ad illa a perpendicularium extremitatibus* D, E, F, *recta* DG, EG, FG, *&* DH, EH, FH, *ſint ad ſe invicem in rationibus m, n, o.*

Quoniam vero Problema noſtrum in numeris propoſitum fuit, omnes iſtæ lineæ etiam numeris exprimendæ ſunt:

Poſitis autem $AD = a = 200$
$CF = b = 100$
$BE = c = 150$
$AB = d = 50$
$BC = e = 100$

Ratione vero $\frac{m}{\frac{n}{o}} = \frac{9}{\frac{7}{6}}$

Inveniuntur $BK = mme : (mm - oo) = 180$
$CK = ooe : (mm - oo) = 80$
$KM = ood : (mm - oo) = 40$
$BO = nne : (nn - oo) = 376\tfrac{12}{13}$
$CO = ooe : (nn - oo) = 276\tfrac{12}{13}$
MG vel $MH = f = \sqrt{32000}$
OG vel $OH = \sqrt{((oocc - nnbb - nnee) : (nn - oo) + n^4 ee : (nn - oo)^2)} = \sqrt{128994\tfrac{14}{169}}$

Sed quod in hoc ſpeciali exemplo meretur obſervari, eſt, Quod altera interſectionum utriuſque Circuli præciſe cadat in ipſam hypothenuſam anguli recti ABC. Cum enim radius MG circuli GNH, centro M deſcripti, ſit $\sqrt{32000}$, & $CMq = CKq + KMq = 6400 + 1600 = 8000$; ideoque $CM = \sqrt{8000}$; erit CM rectæ GM ſubdupla, quia illius quadratum ſubquadruplum hujus quadrati: Proinde $GC = CM$. Ergo & demiſſa in latus BC perpendicularis $GR = 40 = KM$, & $RC = 80 = CK$; unde $RB = 20$, adeoque RO $(BO - BR) = 356\tfrac{12}{13}$, cujus Quadratum $21529600 : 169$, junctum $GRq = 1600$, pro-

producit $2180000 : 169 = 128994 \frac{14}{169} =$ quadrato hypo N·XXVII thenuſæ OG in Triang. Rectang. ORG: hinc ipſa hypothenuſa $OG = \sqrt{128994 \frac{14}{169}}$, cui cum æqualis præciſe ſit radius circuli GQH, centro O deſcripti, ſequitur peripheriam ejus tranſituram per idem punctum G, ibidemque communem eſſe utriuſque circuli interſectionem.

Et quoniam $AG : AC = BR : BC$, at $BR = \frac{1}{5} BC$, erit quoque $AG = \frac{1}{5} AC$. Inſuper perpendicularis BG, demiſſa ex angulo recto in hypothenuſam AC, cadet in hoc ipſum punctum G. Cum enim $BC : AB = BG : AG = GC : BG$; at $BC = 2 AB$, erit etiam $BG = 2 AG$ & $GC = 2 BG$; ac proin ſegmentum $GC = 4$ ſegm. AG: unde $AG = \frac{1}{5}$ totius AC: quare ambo circuli & perpendicularis BG hypothenuſam AC, in eodem puncto G, interſecant.

Quod ſi luberet, puncta quæſita G & H, abſque inventione Locorum integrorum aliter determinare, poſſemus, facilioris operationis ergo, loco duarum ſupra inventarum æquationum indeterminatarum litteralium ſubſtituere ipſarum æquivalentes numerales, videlicet iſtas, $yy - 360 y = - xx - 80 x - 2000$, & $yy - \frac{9800}{13} y = - xx - \frac{170000}{13}$ juxta quarum priorem invenitur $y = 180 - \sqrt{(- xx - 80x + 30400)}$, juxta poſteriorem vero $y = \frac{4900}{13} - \sqrt{(- xx + 2180000 : 169)}$; atque tunc inter diverſos iſtos valores quantitatis y, pro determinanda x, denuo æquationem inſtituere, quæ duas admittet radices, unam affirmativam $+ 40$, numerandam ex B in T, alteram negativam $- 176 \frac{72}{853}$ capiendam in AB protracta, ex B in V: unde ſimul innoteſcet geminus valor ipſius y, nempe $TG = 20$ & $VH = 63 \frac{761}{853}$. *Quod erat inveniendum.*

III. PRO-

N.XXVII

III.

PROBLEMA ASTRONOMICUM.

PRæcedenti Problemati ſubjunctum fuit in eadem ſcheda ſequens Aſtronomicum, cujus proinde ſolutionem & hic adnectam, ſed omiſſo, ne prolixior fiam, calculo, quem jam alibi * publici juris feci:

Yemant peylende de Son te 6 uuren na de middagh 12 *graden boven den Horizon, en een uur en* 12 *min. na de ſe tijdt onder te gaan. Vrage op vvat Aardrijks breete dito peyling geſchiedt is.*

Id eſt:

Obſervatur alicubi hora ſexta pomeridiana Solis altitudo ſupra Horizontem 12 *graduum, elapſis autem poſt momentum obſervationis hora una &* 12 *minutis occidit Sol. Quæritur, ſub qua latitudine* [adde, *& quo anni tempore*] *inſtituta fuerit obſervatio?*

Eſto (*Fig.* 7.) Arcus Horizontis CB, Æquatoris CD, Paralleli AE: Locus Solis hora ſexta A, ejuſdem punctum occaſus E, altitudo Solis ſupra Horizontem hora ſexta AB, ejus Declinatio AC vel ED, Tempus elapſum a momento obſervationis ad occaſum Solis, reſpondens arcui Æquatoris CD, 1h. 12.

Poſitis jam Sinu toto - - - - - - $a =$ partium 10000.
Sinu altitudinis Solis AB, 12. grad. $b =$ - - 2079.
Sinu temporis elapſi (horæ ſcilicet unius, cum 12. min.) in gradus Æquatoris 18 converſi - - $c =$ - - 3090.
Sinu quæſitæ declinationis Solis AC vel ED - - - x.

Reperitur Æquatio $x^4 = aaxx + bbxx - aabbxx : cc - aabb$: cujus radices $x = \surd((aa+bb) : 2 - aabb : 2cc \pm \surd((a^4 - 2aabb + b^4) : 4 - (a^4bb - 2ab^4) : 2cc + a^4b^4 : 4c^4)$

Quarum valor in numeros reſolutus dabit, $x = 7106$ fere & 2926 fere. Illius arcus in canone invenitur 45 gr. 17 min. hujus

* *Diſſert.* De Gravitate Ætheris. *pag.* 160. *ſeq.*

hujus 17. gr. 1 min. pro quæſita Solis declinatione; e qua re- N.XXVII
perta, nec non & data Solis altitudine in Triang. A B C, vulgari Trigonometria innoteſcit angulus elevationis poli A C B, qui viciſſim reperitur vel 17 gr. 1 min. vel 45 gr. 17 min. adeo ut ad ſatisfaciendum Problemati, gemino modo reſponderi poſſet, nimirum obſervationem inſtitutam eſſe, vel ſub latitudine 45 gr. 17 min. Sole declinationem obtinente 17 gr. 1 min. vel etiam ſub latitudine 17 gr. 1. min. Solis declinatione viciſſim exiſtente 45 gr. 17 min. ſi modo poſſibile eſſet, ut unquam tanta exiſteret.

COROLLARIA.

I. *Ex Logica.* Sex ſunt Univerſalia, ſeu Prædicabilia: Genus, Species, Differentia, Proprium, *Commune*, & Accidens.

II. *Ex Phyſica.* Si gyratio Terræ Gravitatis cauſa ſit, difficile dictu eſt, cur lapſus gravium non fiat in plano Æquatori parallelo? (*a*).

III. *Ex Meteorologia.* Pro captanda altitudine nubium novam inveni methodum ex obſervato momento diſparitionis coloris rubicundi, qui nonnunquam poſt occaſum Solis aliquandiu in nubibus conſpici ſolet. (*b*).

IV. *Ex Geometria Incommenſurab.* Unum idemque *Binomium* poteſt eſſe vel primum, vel ſecundum, vel tertium; item quartum, quintum, vel ſextum, non obſtantibus *Propp.* 55. 56. 57. *Lib.* X. EUCL. Idem intellige de *Apotomis*.

V. *Ex Stereometria.* Pro dimetiendis Conis & Pyramidibus decurtatis, ſaltem iis, quæ baſes habent parallelas & ſimiles, hanc Analyſis Regulam ſimpliciſſimam ſuppeditat: *Summam baſium mediique proportionalis inter illas duc in tertiam partem altitudinis;* pro-

(*a*) Videatur Numerus XIX. (*b*) Videatur Num. XXX.

Digitized by Google

N.XXVII productum manifeſtabit quæſitum (*c*).

VI. *Ex Mechanica.* Perpetuum illud Mobile, Pariſiis non ita pridem publicatum, inque *Nov. Reip. Litt. Art.* 7. *Menſ. Sept. An.* 1685. deſcriptum, quod conſiſtit in ſpecie quadam Follis 40 dig. alti, & mercurio repleti, Perpetuum ſtabile eſt. Neque enim in clauſo ejuſmodi Folle, etiam 100 digitorum poſſidente altitudinem, mercurius adhuc deſcenſurus foret (*d*).

VII. *Ex Dioptrica.* Quæritur ratio, cur per vitrum plano planum ad axem viſionis valde oblique poſitum objecta dextra appareant ſiniſtra & viciſſim? (*e*).

VIII. *Ex Perſpectiva.* Frontales, Fugientes & Perpendiculares in eadem ſectione exiſtentes neutiquam æque fortiter tingendæ ſunt, contra Regulam Dn. DES-ARGUES, & Praxin Dn. DE LA BOSSE, in eorum *Perſpectiva*, Tom. I. pag. 296.

IX. *Ex Gnomonica.* Diviſio in partes æquales Inſtrumenti illius nocturni, quod deſcripſit MUNSTERUS, & ex illo Cl. STURMIUS *parte* 3, *Gnom. Welp. cap.* XI. æque vitioſa eſt, atque foret delineatio horologii æquinoctialis in plano verticali.

X. *Ex Balliſtica.* Globi tormentorum bellicorum longiſſime progrediuntur ex elevatione 45 gr. exploſi, ſiquidem ab aeris reſiſtentia abſtrahatur; hac enim poſita, exploſio maxima ſub angulo tantillo minore contingere debet. Interim reperio, ſi vis gravitatis pluſquam vicies ſemel ſuperet vim reſiſtentiæ aeris, globum ex 45 gr. emiſſum adhuc paulo longius ferri, quam ex 44. gr. Cæterum ſuperflua eſt Practicorum opera in examinandis ad ſingulos elevatio-

(*c*) Sit b diameter vel latus baſis majoris; c, diameter vel latus baſis minoris; a, altitudo, ſeu diſtantia baſium: x, altitudo coni (vel pyramidis) integri. Erit $b : c = x : x - a$, Ergo $cx = bx - ab$, aut $x = ab : (b - c)$, & $x - a = ac : (b - c)$. Conus integer $= \frac{1}{3} bb . ab : (b - c)$. Conus reſectus $= \frac{1}{3} cc . ac : (b - c)$. Conus decurtatus $\frac{1}{3} a (b^3 - c^3) : (b - c) = \frac{1}{3} a (bb + bc + cc) =$ tertiæ parti altitudinis ductæ in ſummam baſium & medii proportionalis inter illas.

(*d*) Videantur N°. XXV. XXVI. XXVIII. XXXII. XXXIII.

(*e*) Credibile eſt Autorem falſa quadam ſpecie deceptum, objecta reflexa pro refractis habuiſſe: neque enim idem experimentum tentantibus ſucceſſit.

elevationis gradus explosionibus, quandoquidem, ex obſervata N.XXVII unica, reliquæ omnes calculo ſubduci poſſunt (*f*).

XI. *Ex Arte conjecturandi.* In Urnis ſortium [Gallis *Lotteries*, nobis *Glückſtopff oder Glückhäfen*] quamdiu albæ tantum ſchedæ exeunt, noſtris nominibus in capſa reſtitantibus, expectationes creſcunt in progreſſione Harmonica: ſed in Urna nupera, in qua 16000 ſchedulæ, augmentum iſtud tam erat exile, ut 348 ſchedæ albæ abſque interruptione extrahendæ fuiſſent, antequam valor expectationis in quamlibet ſchedam creviſſet unico ſextante, & 333 aliæ, antequam duobus, iterumque aliæ 319 priuſquam creviſſet tribus; adeo ut in univerſum 1000 ſchedæ albæ continua ſerie exire debuiſſent, priuſquam ſuam quis in capſa adhuc latitantem ſchedam, quæ initio valebat 7 aſſibus cum ſemiſſe, alteri 8 aſſibus vendere potuiſſet.

XII. *Ex Arithmetica figurata.* Numerus diei menſis Januarii, quo huic diſputationi conſcribendæ ultimam impoſui manum, eſt Radix *Pentakismyriohexakischiliotetracoſiohexacontapentagonalis* ex 1580972. Quæritur dies? (*g*)

(*f*) De hoc argumento videantur quæ commentati ſunt HUGENIUS, *Diſcours de la cauſe de la peſanteur*, ſub finem; NEWTONUS *Princip. Phil. Nat. Math.* Lib. II. Sect. 1. & 2. VARIGNONIUS Comment. Acad. Reg. Scient. An. 1708. & 1709. HERMANUS *Phoronom.* Sect. IV. imprimis JOH. BERNOULLI *Acta Erud.* 1719. *Mai.* & 1721. *Mai.* & EULERUS *Mechan.* Tom. I, Cap. 6.

(*g*) Reſp. 8. Problema eſt, Datur 1580972, Numerus Polygonus, angulorum 56465. Quæritur latus? Solutionem hujus Problematis dat WOLFIUS Element. Analyſ. finit. §. 213.

F I N I S.

No. XXVIII.

N°. XXVIII.

JACOBI BERNOULLI

Mathematum Profeſſoris Baſileenſis,

GEMINA APPENDIX

AD EXAMEN PERPETUI MOBILIS,

inſertum menſe Decembri Actorum Anno 1686.

Acta Erud. Lipſ. 1686. Jun. p. 314.

PRIOREM *harum Appendicum a Clariſſimo Autore ſubmiſſam, ineunte Januario Anni* 1687 *accepimus: quo ipſo & De*cember Novellarum Batavarum *ad nos perlatus, machina a* D. PAPINO & PUJOLA *impugnata defenſionem, ab Auctore ſuo ſuſceptam, nobis exhibuit. Non ingratam ergo* Appendicis *Autori fore putavimus publicationis eo uſque moram, dum ipſe de novo hoc reſponſo quantocius certior redderetur, una fortaſſis opera iterato Machina defenſa examine defuncturus. Sed dum ſcheda Batava* Lipſia Baſileam *perferuntur, ejuſque littera, ſegnius a latore curata, ad nos remeant, unus & alter menſis lapſus eſt: ut priori* Appendici, *Auctoris voto Menſe Aprili publicanda, altera ſuperveniret, junctim nunc cum illa publicanda. Caterum qua in* Novellis Batavis *Menſibus* Maio, Junio, Septembri & Decembri A. 1686. pag. 577. 671. 1004. 1378. *in utramque partem de perpetuo hoc mobili diſceptata ſunt, vel ideo huc transferre neglximus, quod ea in compendio referant* Appendices Bernoullianæ. *Sic autem illa.*

I. Mi-

I.

Num. XXVIII.

Mirabitur procul dubio Lector, quod poſtquam materiæ in diverſis *Eruditorum Actis* ad ventilandum propoſitæ ſatis diu inter Doctos agitatæ fuerunt; Ego de novo & poſtliminio quaſi earum examen aggredi ſoleam, prout jam aliquoties uſu mihi venit. Sed mirari deſinet, cum perceperit, *Acta* iſthæc ſero admodum, nempe *Novellas Reipublicæ litterariæ*, *Actaque Lipſienſia* bis duntaxat in anno, *Pariſienſia* elapſo demum anno, *Londinenſia* nunquam ad manus noſtras pervenire; iterúmque aliquot præterlabi menſes, priuſquam Actorum Collectores ſchedarum mearum fiant participes. Tranſmiſeram illis, inſtantibus ultimis nundinis Francofurtenſibus, *Examen* alicujus *Perpetui Mobilis* in *Novellis* publicati, iiſdemque demum finitis perlati ad nos Menſes *Novellarum Aprilis*, *Majus*, *Junius*, e quibus a D. PAPINO & D. PUJOLAS in examine iſtius Machinæ præventum me eſſe cognovi. Sed quoniam diverſam ab illis in hoc negotio viam inivi; nolo campum hunc prius deſerere, quam quæ præterea, tum circa utriuſque reſponſionem, tum circa inſtantias Autoris Machinæ, notanda mihi occurrerunt, publico impertivero.

Omnes tres in eo convenimus, quod in iſtiuſmodi folle, qualem proponit Autor, nulla ſequi poſſit alarum expanſio, vel mercurii deſcenſus. Ad hoc oſtendendum, illi quidem tum pondus mercurii incluſi, tum partem preſſionis atmoſphæricæ, quæ mediante tubo mercurium incluſum afficit, junctim contemplantur: Ego, ſepoſita hujus acceſſione, follem ut undique clauſum conſideravi, oſtendique, ſolius incluſi mercurii pondere alas follis dilatari non poſſe: quo ipſo ſatis refelli puto Autoris opinionem, ſaltem illam, qua perſuaſum habet, per hydrargyri deſcenſum in ſummitate follis vacuum genitum iri: ut maxime enim preſſio illa acceſſoria 5 digitorum mercurialium, juncta ponderi incluſi hydrargyri, tanta ſupponeretur, quæ dilatando folli ſufficeret; iſta tamen tunc dilatatio produceretur, non per ſubitaneum hydrargyri lapſum, ſed per ejus detruſionem, ſuccedente continuo per tubum alio mercurio, qui vacuum fieri impediret.

Digitized by Google

Num. XXVIII. Sed hoc obiter; neque enim vacuum ad experimenti ſucceſſum neceſſarium eſſe exiſtimo. Reſponſio interim PAPINI huc redit: Preſſionem, quam atmoſphæra exercet intra follem, a longitudine intervenientis tubi plus diminui, quam augeri eadem poſſit a pondere mercurii incluſi. Si quæras, qui hoc fieri queat, cum diminuatur 22 tantum, augeatur vero 40 digitis mercurialibus; adjicit ille, aſſerti ſui veritatem facili ſubduci poſſe calculo: qua ſua reſponſione anſam mihi præbet ſuſpicandi, quod exiſtimet incluſum mercurium in follem agere pro ratione ſolius ſuæ molis, ſive ponderis: cum evidens admodum ſit, ſi ſolam ſpectes molem, pyramidem 40 digitos altam minorem eſſe priſmate in eadem quidem baſi, ſed altitudine 22 digitorum conſtituto: meus namque veriorque calculus, qui alas follis pro gemino vecte habet, viresque incluſi mercurii in premendis alis æſtimat ex rationibus ponderum ſimul & diſtantiarum, tametſi ſatis planus ſit & facilis, non tamen uſque adeo obvius eſt, quin meruiſſet apponi a PAPINO, ſi huc digitum intendiſſet. Cum itaque non appoſuerit, omnino conjicio, in hac illum eſſe ſententia, quod in folle undique clauſo, non niſi triplo major, quam 27 digitorum altitudo requiratur, ad conſtituendum æquilibrium inter mercurium & externum aerem; cum ex calculo meo nupero † pateſcat, quadruplo majorem in illo altitudinem depoſci. Id eum in finem moneo, ut conſtet, quod ſi parva illa 5 digitorum acceſſio, qua vires incluſi ponderis augentur, juxta PAPINI calculum, dilatando folli 40 digitos tantum alto non ſufficiat, multo minus illa, in mea hypotheſi, effectui huic producendo ſuffectura ſit. Ex dictis autem porro liquet, mirum non eſſe, quod reſponſio D. PAPINI minus ſatisfecerit Auctori Machinæ; qui duo regeſſit; quorum alterum [nam in priori quod mutationem quarundam partium machinæ concernit, fateor me ejus mentem non aſſequi] huc redit, quod follis utique non dilataretur, ſi mercurius in illum ageret pro ratione molis ſuæ, more corporum ſolidorum, non vero pro ratione altitudinis, ut ſolent liquida; centies namque ſe expertum eſſe ait, ſi follis

† Supra N°. XXVI. pag. 288.

folliſ ſuperne apertus intra liquidum aliquod aliquouſque demergatur, accidere, ut liquor internus, vel ad eandem cum externo ſe componat altitudinem, ſiquidem homogeneus illi ſit, vel ut altius humiliuſve conſiſtat, ſi eodem vel levior, vel gravior fuerit. Unde colligere vult, quoniam 27 digiti mercuriales æquiponderent altitudini atmoſphæricæ, follem mercurio repletum, dictamque excedentem altitudinem, in aere perinde dilatatum iri, atque dilataretur ſi ſtagnanti alicubi mercurio immergeretur ad 27 digitorum profunditatem. Ad inſtantiam hanc diluendam, ſciendum, longe aliam eſſe rationem follis aeri expoſiti, quam follis in hydrargyrum demerſi, prout ex mea explitione evidentiſſime liquere poteſt. Si follis aeri exponatur, omnia alarum puncta premuntur a filamentis atmoſphæricis ejuſdem altitudinis, quorum ſingula æquiponderant 27 pollicibus mercurii; ſin demergatur in hydrargyrum, puncta, quo propiora baſi follis, eo minori extrinſecus pondere afficiuntur, filamentis mercurialibus ſenſim decreſcentibus verſus ſuperficiem ſtagnantis hydrargyri, ubi tandem plane evaneſcunt: adeoque follis homogeneo liquore adimpletus neceſſario eouſque, ſive dilatabitur, ſive conſtringetur, donec liquor intra extraque illum in eadem planitie horizontali conſtiterit; ut pote quo caſu, ſingulis ejus punctis intra extraque follem ejuſdem reſpective altitudinis & ponderis filamenta incumbunt. Hæc hactenus. Num. XXVIII.

Quantum ad D. PUJOLAS refutationem; ſic ille ad evertendam hanc Machinam ratiocinatur: Argentum, inquit, in folle 40 digitos alto, non poteſt delabi ad 27 digitorum altitudinem, quin eo uſque dilatetur follis, ut in ejus ſummitate plus relinquatur vacui ſpatii, quam antea occupatum fuerat a tredecim mercurii digitis, qui deſcenderunt. Vacuum iſtud impleri denuo, nec per mercurium tubi, nec per materiam ſubtilem poteſt; quoniam neutrum horum fluidorum aliis viribus in follem impelli poſſet, quam iiſdem, quibus follis expanderetur: quæ vires non æſtimandæ forent ex omnibus 40 digitis incluſi mercurii, ut pote quorum 27 ob atmoſphæræ æquilibrium irriti redderentur, ſed a reliquis duntaxat tredecim: hæ vires autem non poſſent adigere

 in

Num. XXVIII. in ſummitatem follis, niſi 13 alios mercurii digitos, qui non ſufficerent ad implendum vacuum. Ergo &c. Verum enim vero, præter quam quod nulla in hoc ratiocinio evidentia eſt mathematica, multa quoque occurrunt, quæ vix admitti poſſunt.

Primo, cum dicitur, delapſo ad 27 digitos mercurio, vacuitatem naſci majorem ſpatio a 13 delapſis digitis antea occupato; id perpetuo & abſolute verum non eſt: poſſet enim nunc major, nunc minor eſſe dicto ſpatio, pro diverſa ratione amplitudinis baſis ad altitudinem follis.

Secundo, non neceſſum eſſet ut mercurius per tubum impelleretur in follem iiſdem illis viribus, quibus dilatatur follis; numquid impelli poſſet pondere columnæ atmoſphæricæ tubi vaſculo incumbentis? Videtur hic Autor revocare velle circulum *Carteſianum*; conſtat autem, phænomena hydroſtatica longe melius & felicius explicari per PASCALII columnas, quam per circulum CARTESII.

Tertio, ſi res foret explicanda per circulum, dicendo mercurium impelli per tubum in follem a pauculo aere folli circunfuſo, qui per follis dilatationem loco pulſus fuit; tum ſequitur pariter, in ſyphone cujus crus longius exæquat 40 digitos, argentum ex breviori pelli in longius, vi pauxilli aeris, qui per effluxum argenti e longiori exundavit; adeoque aſcenſum mercurii per crus brevius, tempore correſpondere debere cum deſcenſu ejus per longius; quod experientiæ refragatur, cum lapſus ejus per longius ſit momentaneus, aſcenſus per brevius lentior & ſucceſſivus.

Quarto, non tantum 27 digitis mercurii incluſi, ſed tota ejus altitudo, etiamſi 100 exæquaret digitos, irrita redderetur a contrapondio atmoſphæræ, ut ex noſtra explicatione liquet.

Quinto, nulla evidens ratio eſt, cur tredecim digiti mercurii non poſſint impellere in follem tantum argenti, quantum ſufficit ad replendum totum vacuum; tametſi enim amplitudo hujus vacui major ſit ſpatio, quod occuparant tredecim delapſi digiti, ejus tamen altitudo 13 digitis neceſſario minor eſſe debet. Conſtat vero, vires liquidorum æſtimandas eſſe ex ſola altitudine, nulla habita ratione molis; prout parva liquoris alicujus quantitas anguſtiori

guſtiori ſiphonis cruri infuſa, ad eandem attollit altitudinem multo majorem ejus molem in ampliori crure contentam. Atque hæc de inſufficientia reſponſionis D. Pujolas. Num. XXVIII.

Idem refutavit objectionem ab Autore Machinæ ſibi motam. Quoniam vero rationes ejus in *Novellis* non recenſentur; ſupereſt, ut & hanc inſtantiam ex hypotheſi mea diluam. Memorat Autor experimentum ſe cepiſſe cum folle 10 digitorum, cujus baſi adaptatus erat tubus 30 digitorum mercurio repletus & ſuperne ſigillatus; follem enim ſibi relictum expanſum fuiſſe, deſcendente mercurio tubi ad conſuetam altitudinem 27 digitorum.

Sed quotuſquiſque eſt qui in noſtra explicatione non videat rationem diſparitatis inter utrumque follem? In folle 40 digitorum, univerſa mercurii moles externi aeris preſſioni, mediantibus alis compreſſibilibus, expoſita eſt; in folle vero breviori, ſoli infimi 10 digiti ab aere laterali afficiuntur, totaque mercurii portio incluſa tubo, ob firmitudinem laterum ejus, a laterali aeris preſſione immunis præſtatur: unde cum ſolius longitudo tubi 27 digitos exſuperet, mirum non eſt, ſubſidere in illo mercurium. Num vero præciſe ad 27 digitorum altitudinem deſcenſurus ſit, ſubdubito; calculo diverſitatem nonnullam exhibente.

Eſto follis ABC, (*Fig.* 1.) cui adaptetur tubus DE. Ex hydroſtaticis principiis notum eſt, a pauxillo liquore tubi DE, licet anguſtiſſimi, tantundem premi ſubjectam baſin latiſſimam AC, quantum premeretur a multo majore ejus copia in tubo AG, ejuſdem quidem altitudinis cum DE, ſed amplitudinis longe majoris, nempe baſi AC adæquatæ, contenta. Loco igitur tubi DE ſubſtituatur alius AG, repletus itidem mercurio, qui fingatur deſcendiſſe in I, ibique æquilibrium conſtituere cum externo aere L, qui alas AB, BC comprimit. Sunto autem in folle pyramidali ABC, altitudo BD $= a =$ 10 digitis, BA vel etiam DA $= b$, circumferentia baſis $= c$, altitudo mercurialis 27 digitorum æquivalens altitudini atmoſphæricæ L $= d$, altitudo quæſita DI $= x$. Deprehenduntur momenta infinitarum ſuperficierum priſmaticarum (circa communem axem IB conſtitutarum & exhaurientium ſoliditatem follis ABC, tubique AM) conſtituere ge-

 minam

Num. XXVIII. minam ſeriem ſecundanorum, diminutam ſerie tertianorum, cujus ultimus terminus $bcx + abc - abc$; adeoque ſumma momentorum $\frac{1}{3}bbcx + \frac{1}{3}abbc - \frac{1}{4}abbc = \frac{1}{3}bbcx + \frac{1}{12}abbc$ (a). Momenta filamentorum atmoſphæricorum L, alas A B, B C comprimentium conſtituunt ſeriem ſecundanorum, cujus ultimus terminus bcd, adeoque ſumma momentorum $\frac{1}{3}bbcd$ (b). Unde $\frac{1}{3}bbcd = \frac{1}{3}bbcx + \frac{1}{12}abbc$ & $x = d - \frac{1}{4}a = 27 - 2\frac{1}{2} = 24\frac{1}{2}$ digitis. Patet ergo, altitudinem argenti poſt deſcenſum fore $34\frac{1}{2}$ digitorum, ſi follis altitudinem una comprehendas; ſin minus, tantum $24\frac{1}{2}$ digitorum; illo nempe reſpectu majorem, hoc minorem 27 digitis.

Non nego tamen, altius in tubo ſuſtentari poſſe, imo debere, ſi & ratio habeatur aeris externi, baſi follis incumbentis, alarumque divaricationem tanto fortius prohibentis; cujus quidem nos conſiderationem hic neglceximus.

I I.

JUbes, ut examini ſubjiciam iteratam Reſponſionem, quam Auctor Perpetui Mobilis, ſub finem ſuperioris anni, animadverſioni

(*a*) Etenim ſi diſtantiæ ab hypomochlio conſtituant ſeriem arithmetice progreſſionalium, 0, 1, 2, 3, &c. uſque ad $b =$ B A; baſes ſuperficierum priſmaticarum mercurialium conſtituent pariter ſeriem primanorum 0, $(1c:b)$ $(2c:b)$ $(3c:b)$ &c. uſque ad $bc:b = c$: altitudines vero earundem ſeriem æqualium minutam ſerie primanorum, 0, $(x + a - 0)$ $(x + a - 1a:b)$ $(x + a - 2a:b)$ $(x + a - 3a:b)$ &c. uſque ad $(x + a - ba:b = x$. Quare momenta efficiunt [0, $(1.1.cx:b + 1.1.ca:b - 1.1.1.ca:bb)$ $(2.2.cx:b + 2.2.ca:b - 2.2.2.ca:b^2)$ &c. uſque ad $bcx + bca - bca$] ſeriem geminam ſecundanorum minutam ſerie tertianorum: cujus proinde ſumma $= \frac{1}{3}bbcx + \frac{1}{3}bbca - \frac{1}{4}bbca = \frac{1}{3}bbcx + \frac{1}{12}bbca$.

(*b*) At vero momenta filamentorum atmoſphæricorum habentur, ſi priores duæ ſeries primanorum per ſeriem æqualium *d*, *d*, &c. multiplicentur; unde naſcitur ſeries [0, $(1.1.cd:b)$ $(2.2.cd:b)$ $(3.3.cd:b)$ &c. uſque ad bcd] ſecundanorum, cujus ſumma eſt $\frac{1}{3}bbcd$.

Digitized by Google

verſioni D. PAPINI oppoſuit, cujuſque me nuperrime participem fecisti, tranſmiſſis *Novellarum Batavarum* ex menſe *Decembri* foliis nonnullis. Id nunc, expedito quod noſti negotio, eo lubentius in me ſuſcipio, quod ex diſcuſſione Reſponſionis hujus maximopere illuſtrari & confirmari videam illam meam hypotheſin, quæ defectum Machinæ e vectis ratione deduxit. Num. XXVIII.

Duabus Reſponſio memorata partibus abſolvitur: in priore Auctor, inverſione totius Machinæ; in altera partium quarundam immutatione, priſtino retento ſitu, objectioni ſatisfacere ſtuduit. Quantum ad inverſionem Machinæ, quo jam in ſua prima Reſponſione digitum obſcure intenderat Auctor, huc ejus conjicio redire mentem. Exiſtimat perinde eſſe, quantum ad incluſi mercurii vires, quo ſitu erigatur Machina; itaque ſi externi aeris preſſiones debiliores forte judicentur, invertendam duntaxat eſſe pyramidem, applicandumque tubum ſurſum ſpectanti vertici; inverſum namque follem, a prævalente aere, non aliter atque in altero ſitu, compreſſum iri, extruſo per tubum mercurio in vaſculum; compreſſo folle, præponderaturum ejus verticem, atque ad ſitum horizontalem ſe demiſſurum; poſtmodum refluxurum eſſe e vaſculo mercurium, follemque de novo dilatatum iri [quandoquidem tubi vaſculum, 22 tantum digitis a vertice follis diſtans, altius conſiſtat axe motus, qui, prope centrum gravitatis machinæ conſtitutus, 30 circiter ab eodem vertice digitis abeſt;] denique folle ſic dilatato, erecturum ſe verticem, præponderante ſcilicet jam iterum baſi; atque ita Machinam, recuperato priſtino ſitu, alternas rotationis vices perpetuo continuaturam. Sic Auctor. At Ego, revocato ad examen ratiocinio iſto, deprehendo eandem cauſam, quæ follis dilatationem nuper prohibuit, cum baſis ſurſum ſpectabat, contraria nunc ratione, baſe deorſum verſa, ejuſdem compreſſionem impedire; adeo invida natura Protei ad inſtar contrarias induere ſolet formas, velut omni ſtudio conatus noſtros in tam nobili indagine deluſura.

Cujus quidem diverſitatis rationem neſcio an dare poterit Cl. PAPINUS, qui ſolam hydrargyri molem ſpectare ſolet, cum hæc, in utroque follis ſitu, una eademque maneat. In noſtra certe hypo-

Num. XXVIII. hypotheſi, diſcriminis cauſa evidens admodum eſt, quandoquidem, in priori follis ſitu, longiora filamenta mercurialia, quæ præcipuum machinæ momentum conferre deberent, inutilia & inertia exiſtunt, incumbentia quippe ſolum ipſi follis vertici, ſeu vectium hypomochlio, partibuſque illi viciniſſimis; cum eadem, in ſitu altero, premendo partes a vertice remotiſſimas, inſigne valde in divaricandis alis robur acquirant. Hinc enim fit, ut eadem mercurii incluſi quantitas, quæ uno in ſitu ſuſtinendæ preſſioni atmoſphæricæ neutiquam par fuit, in altero ei multum prævaleat, follique dilatando abunde ſufficiat. Ne vero quod dixi de inſignibus viribus, quas mercurius in alas inverſi follis exerat, ſcrupulum movere poſſit apud ignaros hydroſtaticæ Scientiæ, qui ſibi forte perſuadent alas iſtas ab intercepto mercurio omnino non affici, utpote cujus filamentis nullatenus ſubjacent; obſervandum perinde ſe hic rem habere, atque cum ſitula aqua repleta, qualis repræſentatur *Figura* 2. ubi filamenta aquea *ab*, *ab* &c. nativo gravitatis impetu directe quidem fundum feriunt, ſed ab ejus rigiditate repercuſſa quaſi, ad latera ſitulæ deflectunt, eaque in ſingulis punctis non minore afficiunt preſſione, quam qua afficerent, ſi directe ſingulis incumberent: quod vel exinde colligitur, quia inſertis hinc inde perforato utrique lateri tubis *cd*, *cd*, aqua in ſingulis ſurſum impellitur ad altitudinem æqualem ei, quam intra cavitatem ſitulæ obtinet. Ad eundem ſcilicet modum in Folle perpendiculariter erecto, cujus baſis ima reſpicit, ſingula alarum puncta *g*, *g* &c. (*Fig.* 3.) intelligenda ſunt premi extrorſum a totidem filamentis mercurialibus *mn*, *mn* &c. inde ad verticem follis *n* protenſis: nec alia utrobique differentia eſt, quam quod baſis follis non ſit rigida materia inſtar fundi ſitulæ, ſed corium plicatile; e quo tamen aliud videtur nihil ſequi, quam corium iſtud primo detrudendum eſſe ab incumbente pondere mercurii, donec expanſo per detruſionem, quantum fieri potuit, & rigeſcente jam corio, conatus prementis hydrargyri in utramque deinceps, uti dictum, follis alam redundet; prout nullum dubium eſt, quin, ſi loco rigidi fundi ſitulæ ſubſtituatur flexilis quædam materia, nihilominus aqua in tubis *cd*, *cd* &c. ad eandem,

eandem, cum incluſa, altitudinem aſſurrectura ſit, poſtquam flexile fundum, quouſque potuit, ab illa detruſum & extenſum fuerit. Num. XXVIII.

Ut jam, conſueto noſtro calculo, determinemus accuratam preſſionis quantitatem, qua utraque pyramidalis follis ala, tam intus a mercurialibus, quam extus ab aeris urgetur filamentis; notetur momenta harum preſſioni componi ex tribus rationibus; ex ratione videlicet altitudinum filamentorum, latitudinum alarum follis, & diſtantiarum denique a vertice ejus, ceu hypomochlio. Altitudines filamentorum mercurialium mn, mn &c. [*Fig.* 3.] incipiendo a vertice n, conſtituunt ſeriem primanorum, cujus ultimus terminus eſt altitudo $np = 40$ digitis $= a$; atmoſphæricorum autem gh, gh &c. altitudines, ſeriem æqualium, quarum ſingulæ æquivalent 27 digitis mercurii $= b$; latitudines alarum, ut & diſtantiæ ab hypomochlio, conficiunt duas itidem ſeries primanorum, quarum ultimi termini ſunt maxima alæ latitudo ad baſin, quæ ſit c, & ejuſdem longitudo on, vel potius recta op, directioni filamentorum hg, hg &c. perpendicularis, quæ vocetur d. Erit itaque ſumma momentorum omnium totius mercurii $\frac{1}{4}acdd$, quæ ſe habet ad ſummam momentorum atmoſphæræ $\frac{1}{3}bcdd$, ut $3a$ ad $4b$, id eſt, ſubſtituto valore ipſarum a & b, ut 120 ad 108, ſeu 10 ad 9 (*c*). Fortior igitur preſſio eſt ab intra profecta a mercurio, preſſione ab extra, quam producit

(*c*) Poſito, quod diſtantiæ ab hypomochlio conſtituant ſeriem primanorum, 0, 1, 2, 3, &c. uſque ad d; quod altitudines efficiant pariter ſeriem primanorum, 0, $(1a:d)$ $(2a:d)(3a:d)$ &c. uſque ad $da:d = a$; & quod latitudines alarum ſimiliter efficiant ſeriem primanorum, 0, $(1c:d)(2c:d)(3c:d)$, &c. uſque ad $dc:d = c$; Momenta filamentorum mercurialium conſtituunt ſeriem tertianorum, 0, $(1.1.1ac:dd)(2.2.2ac:dd)(3.3.3ac:dd)$ &c. uſque ad dac; cujus itaque ſumma eſt $\frac{1}{4}ddac$.

Momenta vero filamentorum atmoſphæricorum habentur, ſi loco ſeriei altitudinum, quæ ſecunda eſt, ſcribatur ſeries æqualium b, b, &c. Hæc igitur momenta conſtituunt ſeriem ſecundanorum 0 $(1.1bc:d)$ $(2.2bc:d)$ $(3.3bc:d)$ &c. uſque ad dbc; cujus ſumma $\frac{1}{3}ddbc$.

Digitized by Google

Num. XXVIII. aer; quare dilatabitur follis, non conſtringetur, contra quam exiſtimat ejus inventor. Quod ſi follis non pyramidalis, ſed triangularis fiat [qualem conſtrui poſſe non eſt dubium] tunc preſſio ab intra ad preſſionem ab extra erit, ut 2 *a* ad 3 *b*, hoc eſt, in folle 40 digitis alto, ut 80 ad 81 (*d*): adeo ut hac tantillo majore exiſtente, comprimi quidem valeat ejuſmodi follis ab ambiente aere; id quod obtinendi motus perpetui ſpem aliquam facere poſſet, niſi tum nova a longitudine tubi & collocatione vaſculi oboriretur difficultas, quæ ex nunc dicendis plenius elucebit. Reperi namque, eodem duce calculo, ſequens generale Theorema, obſervatu valde dignum, ut pote quod omnem hac de re quæſtionem ſtatim dirimit: *In quovis folle perpendiculariter erecto, ſeu triangulari, ſeu pyramidali, cujuſcunque ſit altitudinis & quocunque adimpletus liquore, ſive baſis ſurſum, deorſumve ſpectet; preſſio liquoris incluſi tanta eſt, quanta proficiſci poteſt ab uniformi columna ejuſdem liquoris, cujus altitudo ſit æqualis diſtantiæ ſummitatis a centro gravitatis follis: adeoque ſi tubus ſummitati follis applicatus e regione centri gravitatis terminetur, repræſentabit machina ſiphonem crurum æqualium, intercedente utrinque perfecto partium æquilibrio.* (e)

Hinc

(*d*) At ſi follis triangularis ſit, alæ æqualem ubique latitudinem habent, ideoque ſeries latitudinum, quæ inter præcedentes tertia erat, mutatur in ſeriem æqualium, 1, 1, 1, &c. Unde fit, ut momenta filamentorum mercurialium conſtituant ſeriem ſecundanorum, 0 ($1.1a:d$) ($2.2a:d$) ($3.3a:d$) &c. uſque ad da, cujus ſumma $\frac{1}{3}dda$; momenta verò atmoſphæricorum filamentorum, conſtituant ſeriem primanorum 0, $1b$, $2b$, $3b$, &c. uſque ad bd, cujus ſumma $\frac{1}{2}bdd$. Eſt autem $\frac{1}{3}dda : \frac{1}{2}bdd = 2a : 3b$.

(*e*) Theorema iſtud non ſolum valet, quando follis eſt triangularis, vel pyramidalis, id eſt, quando alæ ſunt parallelogramma vel triangula; ſed univerſaliter, quacumque figura ſint præditæ. Nam ſit AMLN, vel A*ml*N, follis erectus, vel inverſus, liquore plenus uſque ad QRT: Sitque S, centrum gravitatis liquoris; C, centrum gravitatis ſuperficiei QRLM, quam premit liquor; A, hypomochlium, per quod ducantur AC, & AS liquoris ſummitati occur- Tab. x b. N°. 28.

Hinc conſtat primo, ſi baſis follis ſurſum reſpiciat, in triangulari requiri ter 27, id eſt, 81; in pyramidali quater 27, hoc eſt, 108 digitorum altitudinem, ad conſtituendum æquipondium, inter externam atmoſphæram & incluſum hydrargyrum: quandoquidem Num. XXVIII.

occurrens in P. Et, ſi concipiatur liquor diviſus per innumera plana horizontalia EFG, efg; momentum liquoris in trapeziolum EFfe æquale cum ſit producto ex pondere columnæ baſin EFfe [EF. Dd] altitudinem PI habentis, in diſtantiam AD ab hypomochlio; erit ſumma momentorum omnium, ſive preſſio totius liquoris in ſuperficiem QRLM $= \int(EF.\ Dd.\ PI.\ AD)$ quæ ſumma ita ſumi debet, ut evaneſcat, quando AI evadit æqualis AP. Nunc, ſi ponamus ſuperficiei QRLM inſiſtere columnam uniformem ejuſdem liquoris, cujus altitudo ſit PS; ejus momentum æquale erit producto ex AC [diſtantia centri gravitatis ab hypomochlio] & [pondere columnæ] PS. QRLM: quod momentum ut ſupputetur, neceſſe eſt invenire magnitudines AC & PS. Per vulgarem methodum inveſtigandi centra gravitatis, AC invenitur, ſi ſumma momentorum omnium particularum ſuperficiei QRLM dividatur per ipſam ſuperficiem. Igitur $AC = \frac{\int(EF.Dd.AD)}{QRLM.}$

Et, eadem lege, $PS = \frac{\int(EF.FG.Ii.PI)}{\int(EF.\ FG.\ Ii)}$

quæ omnes ſummæ evaneſcere debent, cum AI ſit æqualis AP.

Ergo preſſio columnæ uniformis; altitudinem PS habentis, eſt $=$

$$\frac{\int(EF.Dd.AD)}{QRLM}\ QRLM\ \frac{\int(EF.FG.Ii.PI)}{\int(EF.\ FG.\ Ii)}$$

$$= \frac{\int(EF.\ Dd.\ AD) \times \int(EF.FG.Ii.\ PI)}{\int(EF.\ FG.\ Ii)}$$

Jam vero, Ii eſt ad Dd, ut AK ad AB; & FG [aut DH] ad AD, ut Bb ad AB: hoc eſt $Ii = \frac{AK}{AB} Dd$

& $FG = \frac{Bb}{AB} AD$: quibus ſubſtitutis, fit $\int(EF.\ FG.\ Ii.\ PI) =$

$\int(EF. \frac{Bb}{AB} AD. \frac{AK}{AB} Dd.PI) = \frac{Bb.AK}{AB.AB} \times$ $\int(EF.\ AD.Dd.\ PI)$ & $\int(EF.\ FG.\ Ii)$

$= \frac{Bb\ .\ AK}{AB.\ AB} \int(EF.\ \ AD.\ \ D\ \ d)$

Ergo preſſio columnæ uniformis altitudinẽ PS habentis $= \int(EF.Dd.AD)$

$\times \frac{Bb\ .\ AK}{AB\ .\ AB} \int(EF\ .\ AD.\ Dd\ .\ PI)$:

$\frac{Bb\ .\ AK}{AB\ .\ AB} \int(EF.AD.Dd.) = \int(EF.$ $AD\ .\ Dd.PI)$ æqualis preſſioni liquoris in folle contenti.

Num. XXVIII. quidem tum centrum gravitatis, ibi tertia, hic quarta ſolum parte altitudinis a ſummitate diſtat: ſin vero baſis deorſum ſpectet, ſufficere in triangulari folle $40\frac{1}{2}$, in pyramidali 36 digitos, quoniam tum centrum gravitatis, ibi duabus tertiis, hic tribus quartis partibus altitudinis, utrobique ſcilicet 27 digitis a ſummitate abeſt; adeoque hoc in ſitu ſufficere illi ſubduplam, huic ſubtriplam ejus, quæ in priori ſitu requirebatur, altitudinem.

Conſtat etiam ſecundo, mercurium follis triangularis 40 digitos alti, cujus baſis ſurſum ſpectat, æquipollere non niſi $13\frac{1}{3}$ digitis; pyramidalis vero paris altitudinis, duntaxat 10 digitis; [non 20, ut putat Cl. PAPINUS:] ſin viciſſim baſis deorſum vergat, illius mercurium æquivalere $26\frac{2}{3}$, hujus 30 digitis.

Conſtat denique tertio, quod ubicunque ſtatuatur tubi vaſculum, Auctor Machinæ neceſſario ſpe ſua fruſtrandus ſit. Nam in folle, cujus baſis ſurſum converſa eſt [*Fig.* 4.] ſi vaſculum *r*, humilius collocetur axe motus, ſive huic vicino centro gravitatis *ſ*; præponderabit ex natura ſiphonis argentum tubi; comprimetur ergo follis, non dilatabitur, ut vellet Auctor: ſin altius conſtituatur, præponderabit equidem argentum in folle, cumque dilatabit; ſed rotata poſtmodum circa axem, & ſitum horizontalem adepta machina, non poterit argentum e folle in vaſculum elevatius retrofluere. Vice verſa in folle cujus baſis ima reſpicit, [*Fig.* 5.] ſi vaſculum ſupra axem ſtatuatur, prævalebit hydrargyrum in folle; quare dilatabitur, non conſtringetur, ut optaret Auctor: ſin infra axem, conſtringetur quidem, ſed facta deinceps rotatione nullus jam mercurii, e loco humili in altiorem, e vaſculo in follem, dabitur refluxus.

Atque ita confido, me non tantum abſolutam impoſſibilitatem conſequendi hac ratione motus alicujus perpetui, ex meo principio Sole clarius oſtendiſſe; ſed & Regulam ſimul univerſalem exhibuiſſe, pro æſtimandis quibuſlibet in Triangulo vel Pyramide compreſſibili contentorum liquorum preſſionibus: id ipſum eſt, quod Auctor Machinæ in fine diſſertationis ſuæ a Doctis indagari deſiderat, quodque contemplationis inſignis & uſus fore non exigui recte conjicit. Hæc de prima reſponſionis parte.

Quod

Digitized by Google

Quod jam ad alteram attinet qua, priſtino retento ſitu, vel prolongatione follis, vel abbreviatione tubi, Machinæ ſuæ medelam offerre ſtuduit; ei non eſt cur immoremur: quandoquidem non meum, ſed *Papinianum* calculum enervat: quocirca, quid ad correctionem hanc ex ſuis principiis ſibi reſpondendum ſit, ipſe viderit PAPINUS. Quod ad me ſpectat; prolonget, abbreviet Auctor, quantum volet; quid profecturus ſit, unico ſupra allato dilemmate edoceri poterit. Nolo etiam bina Experimenta de Folle in aquam demerſo, alioque adaptatum in baſi tubum habente, quorum mentionem iteratam in Reſponſione ſua injicit, hic recoquere; poſtquam diſparem, inter hos folles & controverſam Machinam, rationem in prima mea *Appendice* liquido oſtendi. Num. XXVIII.

Unicum eſt quod non poſſum quin occaſione dictæ Appendicis memorem; me videlicet parumper juſto æquius in illa de PAPINI calculo ſenſiſſe: conjecturabam enim illum, ſepoſita vectis conſideratione, Mercurii preſſionem in folle juxta molem æſtimaſſe, adeoque ſubtriplam ejus, quæ a columna uniformi & æque alta proficiſcitur. Video autem, ab ipſo ſtatui omnino ſubduplam: cum tamen ignorare non debuerit, pyramidem ſubtriplam eſſe, non ſubduplam æque alti priſmatis ejuſdem baſis.

Videantur Numeri XXXII & XXXIII.

N°. XXIX.

SOLUTIO ALGEBRAICA
PROBLEMATIS
de Quadriſectione Trianguli Scaleni, per duas Normales rectas.

Autore JAC. BERNOULLI *Math. Profeſſ. in Academia Baſileenſi.*

Acta Erud. Lipſ. 1687. Novemb. *pag. 617.*

PRoblema hocce, quod ſummum hujus ævi Mathematicum non ita pridem occupatum tenuit, tam parum ex voto eidem ſucceſſiſſe audio, ut ultra quadrageſimam poteſtatem, ſi bene memini, & credere fas eſt, aſſurrexerit. At, cum intra octo dimenſiones illud coerceri poſſe deprehendam, operæ pretium eſſe duxi, ut tanti diſcriminis pateret ratio, viam, quam in ejus analyſi ingreſſus ſum, publico exponere. Quam in rem ſequentia præmitto Lemmata:

LEMMA I. *Utraque linearum quadriſecantium biſecat Triangulum*; quod per ſe clarum.

II. *Neutra quadriſecantium normalium terminari poteſt in angulo Trianguli Scaleni:* DEM. Si fieri poteſt, cadat una quadriſecantium AD, in angulum A; tum altera terminabitur vel in utroque crure anguli A, vel in alterutro tantum: Terminetur *primo* in utroque crure, ut recta EF. Quoniam igitur Triang. AEL ponitur = Triang. ALF, erit EL = LF; & propter commune latus AL, anguloſque interceptos ALE, ALF rectos, ang. EAL = LAF, ſive BAD = DAC: quare BA: AC =

Fig. 1.

Digitized by Google

A C = B D : D C; & quia B A > vel < ponitur A C, erit quoque B D > vel < D C, ac Triang. B A D > vel < Triang. D A C; quocirca recta A D non biſecat Triang. B A C; propterea per *Lemma* I. non poteſt eſſe quadriſecantium una. Terminetur autem *ſecundo*, in alterutro crure tantum, ut recta G H, ducanturque rectæ IC, IB; quoniam Trapezium A I H C = Tr. I D H erit Tr. AIC < Tr. CID, & A I < I D: haud ſecus, quia Tr. A I G = Trapez. I G B D, erit Tr. A I B > Tr. I B D; & A I > I D: igitur A I ſimul > & < I D. *Q. E. A.* N.XXIX

III. *Neutra quadriſecantium normalium parallela vel perpendicularis eſſe poteſt ulli lateri Trianguli Scaleni*: DEM. Eſto, ſi fieri poteſt, recta F G, parallela lateri B C; cadetque perpendicularis D E, in alterutrum latus A C vel A B; nec enim angulo A occurrere poteſt, per præcedens *Lemma*: Occurrat itaque priori in D, & ducatur D F, quæ producta offendat productam E B in I. Quoniam igitur Triang. G H D = Trap. C D A F, erit Tr. G H D > Tr. H D F, & recta G H > H F, & C F > E I, unde C E multo > E B. Cum ergo in Trap. G G H E & H E B F, duo latera G H, C E majora ſint duobus lateribus H F, E B, utrumque utroque, & perpendicularis H E communis, erit Trap. C G H E > Trap. H E B F: Igitur non quadriſectum eſt Triangulum A B C, contra hypotheſin. Fig. 2.

IV. *Binæ rectæ quadriſecantes Triangulum quodcunque, non terminantur duabus extremitatibus in uno Trianguli latere, & duabus aliis in alio.* DEM. Terminentur, ſi fieri poſſit, in latere A B extremitates D & F, ac in latere B C extremitates G & E, junganturque D G, F E. Quoniam Triangula D H F & G H E ponuntur æqualia, habebunt latera circum verticales angulos reciproce proportionalia, F H : H G = H E : H D; & quia F H > H G, [quandoquidem Tr. F H D = quinquangulo A D H G C, ac proinde > Tr. D H G] erit quoque H E > H D; quare & Tr. H E F > Tr. H D F, ſeu Trap. H E B F, pars toto. *Q. E. A.* Fig. 3.

Coroll. Cum igitur Trianguli non niſi tria ſint latera, duarum autem quadriſecantium quatuor extremitates, quarum nulla terminari

N. XXIX. minari poteſt in angulo, nec binæ in uno, binæ in alio latere; neceſſe eſt, ut duæ illarum occurrant uni lateri, ſingulæ vero reliquarum ſingulis reliquis lateribus. Illud vero latus, cui duæ occurrunt quadriſecantium extremitates, ex inventa æquatione cognovi, plerumque tantum eſſe medium, nunquam maximum, raro minimum; nempe tum demum, cum Triangulum Scalenum quam proxime ad Iſopleuron accedit. Sequitur nunc ipſa Propoſitionis

ANALYSIS.

Fig. 4.5.6. Sit factum, eſtoque Triangulum Scalenum ABC [Fig. 4.5.6.] quadriſectum per rectas DE, FG, ſe mutuo ſecantes ad rectos angulos in H. Demiſſis in latus AC [productum ſi opus ſit,] tribus perpendicularibus BK, EL, GI, ductiſque ex puncto H aliis tribus rectis ad ſingulos angulos figuræ, HA, HB, HC; ſunto

$AC = a$	$KB = d$	$CD = x$
$CB = b$	$KC = e$	$AF = y$
$BA = c$	$KA = f$	

erit Tr. ABC $= \frac{1}{2}ad$, Tr: DEC [Tr. FAG] $= \frac{1}{4}ad$, Tr: DHF [Tra. HEBG] $= \frac{1}{8}ad$

$$EL = \frac{\text{Tr DEC}}{\frac{1}{2}DC} = \frac{ad}{2x}, \quad GI = \frac{\text{Tr. FAG}}{\frac{1}{2}AF} = \frac{ad}{2y}$$

$$BK : EL = BC : EC = KC : LC$$

$$d : \frac{ad}{2x} = b : \frac{ab}{2x} = e : \frac{ae}{2x}$$

$$BK : GI = BA : GA = AK : AI$$

$$d : \frac{ad}{2y} = c : \frac{ac}{2y} = f : \frac{af}{2y}$$

Hinc

Hinc in 4 & 6 *Fig.* ...... in 5. *Fig.* N. XXIX.

$$DL(CD-CL) = x - \frac{ae}{2x},\ DL(CD+CL) = x + \frac{ae}{2x}$$

... in 4 & 5 *Fig.* ...... in 6 *Fig.*

$$IF(AF-AI) = y - \frac{af}{2y},\ IF(AF+AI) = y + \frac{af}{2y}$$

$$DF : DC = \text{Tr. } DHF : \text{Tr. } DHC$$

$$x+y-a : x = \frac{ad}{8} : \frac{adx}{8x+8y-8a}$$

$$\text{Tr. } DEC - \text{Tr. } DHC = \text{Tr. } CHE$$

$$\frac{ad}{4} - \frac{adx}{8x+8y-8a} = \frac{adx+2ady-2aad}{8x+8y-8a}$$

$$EC : EB = \text{Tr. } CHE : \text{Tr. } EHB$$

$$\frac{ab}{2x} : b - \frac{ab}{2x} = \frac{adx+2ady-2aad}{8x+8y-8a} : \frac{2dxx+4dxy-5adx-2ady+2aad}{8x+8y-8a}$$

Similiter $DF : AF = \text{Tr. } DHF : \text{Tr. } AHF$

$$x+y-a : y = \frac{ad}{8} : \frac{ady}{8x+8y-8a}$$

$$\text{Tr. } FAG - \text{Tr. } AHF = \text{Tr. } AHG$$

$$\frac{ad}{4} - \frac{ady}{8x+8y-8a} = \frac{2adx+ady-2aad}{8x+8y-8a}$$

$$AG : GB = \text{Tr. } AHG : \text{Tr. } GHB$$

$$\frac{ac}{2y} : c - \frac{ac}{2y} = \frac{2adx+ady-2aad}{8x+8y-8a} : \frac{4dxy+2dyy-5ady-2adx+2aad}{8x+8y-8a}$$

$$\text{Tr. } EHB + \text{Tr. } GHB = \text{Trap. } HEBG$$

$$\frac{2dxx+4dxy-5adx-2ady+2aad}{8x+8y-8a} + \frac{4dxy+2dyy-5ady-2adx+2aad}{8x+8y-8a} = \frac{ad}{8}$$

 unde

N.XXIX. unde reperitur $yy = 4ay - 4xy - 2\frac{1}{2}aa + 4ax - xx$ pro priore Æquatione.

Rurſus quia Triangula G I F, D L E ſunt ſimilia, cum habeant angulos ad I & L rectos, ac præterea angulum D E L [qui anguli E D L complementum exiſtit] æqualem angulo G F I qui ejuſdem quoque E D L eſt complementum, ob angulum D H F rectum; hinc erit

$$\begin{array}{ccccccc} GI: & & IF & = & DL & & :EL \\ \frac{ad}{2y} & : & y \pm \frac{af}{2y} & = & x \pm \frac{ae}{2x} & : & \frac{ad}{2x} \end{array}$$

& proportione ad æqualitatem reducta

$$yy = \pm \frac{1}{2}af + \frac{aadd}{4xx \pm 2ae}$$

ſive in omni Triangulo ſubſtitutis loco perpendicularis d, & ſegmentorum baſis, e, f, eorum valoribus [ut pote qui ex datis Trianguli lateribus a, b, c, facile innoteſcunt] habebitur pro altera Æquatione,

$$yy = \frac{aaxx - bbxx + ccxx - \frac{1}{3}a^4 + \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{2}aacc}{4xx - aa - bb + cc}$$

Qua porro cum priore debite collata, obtinetur ſequens Æquatio determinata octo dimenſionum, ſolutumque eſt Problema:

$$\begin{array}{llllllll} x^8 - 8ax^7 & + 17aax^6 & - 10a^3x^5 & - 4\frac{1}{4}a^4x^4 & + 5a^5x^3 & - \frac{1}{4}a^6xx & - \frac{1}{2}a^7x & + \frac{1}{16}a^8 = 0 \\ \quad + 3bb & - 2abb & - 9\frac{1}{2}aabb & + 12a^3bb & - 1\frac{3}{4}a^4bb & - 2\frac{1}{2}a^5bb & + \frac{3}{4}a^6bb & \\ \quad - 3cc & + 2acc & + 6aacc & - 6a^3cc & + aab^4 & + a^5cc & - \frac{1}{8}a^6cc & \\ & & - \frac{3}{4}b^4 & + ab^4 & - 1\frac{1}{4}aabbcc & - 2a^3b^4 & + \frac{3}{4}a^4b^4 & \\ & & + 1\frac{1}{2}bbcc & - 2abbcc & + \frac{1}{4}aac^4 & + 2\frac{1}{2}a^3bbcc & - \frac{3}{4}a^4bbcc & \\ & & - \frac{3}{4}c^4 & + ac^4 & & - \frac{1}{2}a^3c^4 & + \frac{1}{16}a^4c^4 & \end{array}$$

Quod ſi expuncta littera c, æquatio inſtituatur in litteris a, & e; tunc quindecim membris evadet brevior, ultimuſque terminus trium tantum erit membrorum: Si loco incognitæ x ponatur F C, pro A C vero $2a$; C B, $2b$; B A, $2c$; rurſus devenietur ad

ad Æquationem totidem dimenſionum, ſed ſecundo termino, & fractionibus carentem; &c. N. XXIX.

Schol. I. Si rectæ DE, FG (*Fig.* 4, 5, 6.) ſigillatim biſecent Triangulum ABC, ſitque $DF = AD + FC + \sqrt{(2ADq + 2FCq)}$, tunc quadriſecabunt Triangulum; & ſi quadriſecent, erit $DF = AD + FC + \sqrt{(2ADq + 2FCq)}$. Fluit hoc Poriſma ex priore Æquatione indeterminata, quæ quadriſectionem reſpicit, $yy = 4ay - 4xy - 2\frac{1}{2}aa + 4ax - xx$. Etenim ſi ponatur $AD = p$, $FC = q$, $DF = z$; adeoque $y = p + z$, $x = q + z$, $a = p + q + z$: atque hi valores loco litterarum y, x, a in æquatione hac ſubſtituantur, prodibit $z = p + q + \sqrt{(2pp + 2qq)}$.

Quare ſi quadriſectum ſit Triangulum per rectas DE, FG, ſitque $AD = FC$, erit $DF = 4AD$, & tota $AC = 6AD$: Si vero $AD = 1$, $FC = 7$, erit $DF = 18$: ſi illæ $= 7$ & 17, erit hæc $= 50$: ſi illæ $= 7$ & 23, erit hæc $= 64$, &c. Sequitur etiam, ſi data quædam recta linea AC, modo quo requiritur, ſecta ſit in D & F, & qualecunque Triangulum ſuper data AC conſtitutum fuerit, poſſe ex punctis ſectionis duas inflecti rectas, quæ Triangulum illud quadriſecent.

II. Ex collatione porro utriuſque æquationis indeterminatæ conſtare poteſt, latus illud Trianguli, in quo terminantur duæ quadriſecantium normalium extremitates, nunquam poſſe eſſe maximum: Nam AD exiſtente $= p$, & $FC = q$, DF eſt $= p + q + \sqrt{(2pp + 2qq)}$ per 1. *Schol*; adeoque tota AC $[a] = 2p + 2q + \sqrt{(2pp + 2qq)}$; CD $[x] = p + 2q + \sqrt{(2pp + 2qq)}$; AF $[y] = 2p + q + \sqrt{(2pp + 2qq)}$: hinc poſita $b < a$, ſeu $bb < aa$, quantitate aliqua l, ut ſit $bb = aa - l$; ſi pro litteris a, b, x & y, aut aa, bb, xx, yy, hi valores, eorumve quadrata in æquatione altera

$$yy = \frac{aaxx - bbxx + ccxx - \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{2}aacc}{4xx - aa - bb + cc}$$

ſubrogentur, & æquatio ita ordinetur, ut cc ab una parte extet ſola,

N. XXIX. ſola, reperietur $cc = (32p^3q + 52ppqq + 56pq^3 + 34q^4 + 3ppl + 2pql + (24ppq + 40pqq + 24q^3 + 2pl)\sqrt{(2pp + 2qq)}) : (2pq + 3qq + 2q\sqrt{(2pp + 2qq)})$, & quandoquidem valore ipſius aa ad fractionem ejuſdem nominis redacto, inveniatur tantum $aa = (28p^3q + 50ppqq + 52pq^3 + 34q^4 + (20ppq + 36pqq + 24q^3)\sqrt{(2pp + 2qq)}) : (2pq + 3qq + 2q\sqrt{(2pp + 2qq)})$, manifeſtum eſt, $cc > aa$, & $c > a$. Eodem pacto, ſi ſupponatur $c < a$, reperietur $b > a$. Quare a non poteſt eſſe latus maximum.

At vero quia ſi ponatur $b > a$, ſeu $bb > aa$ quantitate quapiam m, reperitur $cc = (32p^3q + 52ppqq + 56pq^3 + 34q^4 - 3ppm - 2pqm + (24ppq + 40pqq + 24q^3 - 2pm)\sqrt{(2pp + 2qq)}) : (2pq + 3qq + 2q\sqrt{(2pp + 2qq)})$, adeoque $cc - aa = (4p^3q + 2ppqq + 4pq^3 - 3ppm - 2pqm + (4ppq + 4pqq - 2pm)\sqrt{(2pp + 2qq)}) : (2pq + 3qq + 2q\sqrt{(2pp + 2qq)})$, evidens eſt, c poſſe eſſe $>$ vel $< a$, prout hæc quantitas vel poſitiva eſt, vel negativa, id eſt, prout $4p^3q + 2ppqq + 4pq^3 + (4ppq + 4pqq)\sqrt{(2pp + 2qq)}$ $>$ vel $<$ eſt, quam, $3ppm + 2pqm + 2pm\sqrt{(2pp + 2qq)}$: ſive prout $(p + q)2q - (2p + 8q)pq : (3p + 2q + 2\sqrt{(2p^2 + 2q^2)})$ $>$ vel $< m$, quorum utrumque fieri poteſt. Quare ſi major ſit, latus a utroque reliquorum b & c minus erit: ſed tum aliæ quoque duæ normales e medio latere inflecti poſſunt, idem Triangulum quadriſecantes; ut ſi $a = 484$, $b = 490$, & $c = 495$, poſſunt optatæ rectæ educi tum ex latere a, ſegmentis ejus exiſtentibus 62, 324, 98; tum ex latere b ſegmentis ejus factis circiter 131, 339, 20.

III. In Triangulo rectangulo & obtuſangulo, latus a, in quo terminantur duæ quadriſecantium normalium extremitates, neceſſario medium eſt: Cum enim ſubtenſa anguli recti vel obtuſi eſſe non poſſit (quia maximum latus eſſe non poteſt, ut jam oſtenſum) hinc vel b, vel c ſubtenſa hæc erit; adeòque ejus quadratum vel $=$ vel $> aa +$ quadrato alterius, id eſt, (ſi & altera

altera hæc ſupponatur $> a$) majus duplo aa, quo tamen multo minus eſſe oſtendit calculus. N. XXIX.

IV. Latus e quo inflectuntur ambæ quadriſecantes normales, medietate alterutrius reliquorum ſemper majus eſt; quoniam enim Tr. DHF $=$ Trap. HFCE, erit Tr. DHF $>$ Tr. HFE, & DH $>$ HE; cumque anguli DHF, EHF recti, & HF perpendicularis communis, erit DF $>$ FE, & DC $>$ FE $+$ FC $>$ EC. Hinc quia CE $= ab : 2x$, erit $x > ab : 2x$, & $xx > ab : 2$, & aa ($> xx$) $> ab : 2$ & $a > \frac{1}{2} b$, Similiter quoque oſtendetur $a > \frac{1}{2} c$. Hinc in ſolo Triangulo oxygonio, & quidem illo tantum, quod æquilatero affine eſt, latus minimum optatam proprietatem habet, ut recipere poſſit duas normalium quadriſecantium extremitates.

V. Poſito a latere medio, b minimo, & c maximo; nempe $bb = aa - l$, & $cc = aa + m$, ſubſtitutiſque in reperta Æquatione his valoribus, exurgit $4p^3q + 2ppqq + 4pq^3 + (4ppq + 4pqq)\sqrt{(2pp + 2qq)} = 2pqm - 2pql + 3qqm - 3ppl + (2qm - 2pl)\sqrt{(2pp + 2qq)}$; unde liquet, quia prior pars eſt poſitiva, alteram quoque talem eſſe debere; adeoque ſi $m =$ vel $< l$, q fore $> p$, ſi verò $p =$ vel $> q$, m fore $> l$: id eſt, ſi differentia quadratorum lateris maximi & medii æqualis vel minor eſt differentia quadratorum medii & minimi; tunc ſegmentum lateris medii, adjacens lateri minimo, majus eſt ſegmento adjacenti lateri maximo: ſin vero hoc ſegmentum æquale vel majus illo; tunc differentia illorum quadratorum major eſt differentia horum. Prætereo alias Problematis determinationes.

Videatur Numeri LXVII Articulus 2.

N. XXX.

II. CASUS,

Cum Nubes tempore obſervationis reperitur in eodem Verticali cum Sole, ſed extra verticem.

Eſto adhuc [*Fig.* 2. 3.] B locus Nubis; BEH ejuſdem elevatio ſupra horizontem quadrante capta; AG perpendiculum e centro Terræ per locum ſtationis ſurſum productum ad interſectionem uſque radii ſolaris FCB. Quo facto, quoniam angulus depreſſionis verticalis Solis DAF, id eſt [per *Lemma* præcedens] angulus CAG datus eſt, una cum ſemidiametro Terræ AC, invenientur quoque anguli AGC & AGB [qui in *Fig.* 3. coincidunt] ut & recta AG; ſubtractaque ſemidiametro Terræ AE, recta EG. Et quia in Triangulo BEG, præter modo inventum latus EG, noti etiam ſunt anguli [quippe angulus BEG ipſius BEH complementum eſt ad rectum] innoteſcet hinc quoque latus BE, e quo & Terræ ſemidiametro AE, anguloque intercepto AEB [qui compoſitus eſt ex recto & dato HEB] in Triangulo AEB patefiet porro latus AB: unde dempto radio AL, remanebit tandem LB, pro quæſita diſtantia a ſuperficie Terræ.

III. CASUS,

Cum Nubes nec verticalis eſt, nec in eodem plano verticali cum Sole exiſtit.

Caſus iſte præcedentibus difficilior: Obſervetur differentia azimuthalis Solis & Nubis, ſeu angulus, quem verticalis Nubis cum

cum verticali Solis conſtituit; eo momento quo rubedo in Nu- No. XXX.
be diſparet. Sit angulus iſte,

1°. *Rectus*: Conſidera, radios e centro Solis egreſſos, Terræ ſuperficiem, qua diei & noctis ſunt confinia, & circumcirca radendo circulum in illa deſcribere [quem *Circulum penumbræ* appellare lubet,] adeoque conum efformare, qui ob verticem acutiſſimum in centro Solis pro cylindro haberi poteſt; notabisque Nubem, eo momento quo palleſcere incipit, exiſtere in ſuperficie hujus coni cylindrive: quare ſi ſecetur conus iſte plano verticali per Nubem tranſeunte [quod ad axem coni ſub Terra depreſſum eſt obliquum] naſcetur inde Ellipſis, in cujus circumferentia reperietur Nubes. Centrum hujus Ellipſis coincidit cum centro Terræ A [*Fig.* 4.] maxima ejus ſemidiameter AC eſt linea verticalis, porrecta ex centro Terræ A, per oculum Spectatoris E, uſque ad occurſum radii ſolaris GC Terram lambentis in G; eſtque hæc linea AC cognita, Secans ſcilicet anguli GAC, id eſt, depreſſionis Solis infra horizontem [per præmiſſum *Lemma*]: minima Ellipſis ſemidiameter AD eſt ipſa ſemidiameter Terræ, vel Sinus totus. Quoniam enim circulus verticalis Solis tranſit per punctum perpendiculariter ſub Sole ſitum, ceu polum circuli penumbræ; hinc circulus penumbræ & verticalis Solis ſeſe ſecant ad angulos rectos, quare & ille viciſſim tranſit per polos hujus; ſed per hujus polos tranſit quoque verticalis Nubis [quia per hypotheſin cum recte ſecat]: ergo etiam verticalis Nubis & circulus penumbræ ſeſe in polo illo interſecant: unde radius qui lambit polum hunc, ibidem offendit planum Ellipſis; quod cum fiat in ſuperficie Terræ, erit ejus diſtantia a centro Terræ æqualis hujus ſemidiametro; cumque in circulo verticali Nubis, quadrante diſtet a linea verticali AC; ſequitur, ſi hæc ſit ſemiſſis axis majoris, ſemidiametrum Terræ eſſe ſemiſſem minoris.

Ductis itaque ſeorſim [*Fig.* 5.] lineis AD, AC, ad rectos ſeſe decuſſantibus in A; deſcribatur per ipſarum extremitates D & C quadrans Ellipſis CBD; &, propter oculum Spectatoris exiſtentem in perpendiculari AC, fiat in illa AE = AD; erit-

No. XXX. qte E locus obſervationis, ſuper quo conſtituendo angulum CEB æqualem diſtantiæ Nubis a vertice, deſignabit punctum B locum Nubis in Aere. Qui ſi analytice inveniendus ſit, poſito AD [AE] $= a$, AC $= b$, BG $= x$, & ratione BG ad GE $= a : m$, data ob angulum BEF vel BEG datum; habebitur $x = (-aam + ab\sqrt{(bb + mm - aa)}) : (bb + mm)$; (*) e qua inventa, ut & GA [AE + EG] $= a + mx : a$, facile elicitur AB; unde ſi ſubtrahatur Terræ ſemidiameter AE, obtinebitur quæſita diſtantia perpendicularis Nubis a ſuperficie Terræ. Q. E. I.

2°. *Obliquus:* Cum circuli verticales Solis & Nubis ſe mutuo ſecant oblique, neuter per alterius tranſibit polos: quare etiam verticalis Nubis & circulus penumbræ alio loco, quam in polo verticalis Solis, nimirum ſupra infrave horizontem ſe interſecabunt: & quandoquidem hæc interſectio determinet minimam diametrum Ellipſeos, ſequitur lineam verticalem [quia plus minuſve ab illa interſectione quam quadrante abeſt] non poſſe eſſe maximam. Maxima vero ſemidiameter ita reperitur: Ut Sinus totus ad Sinum differentiæ azimuthalis Solis & Nubis; ita Sinus complementi depreſſionis Solis infra horizontem, ad Sinum complementi anguli, cujus ſecans eſt ſemiſſis axis majoris; dum ſemiſſis minoris exiſtit, ut antea, ipſa Terræ ſemidiameter, ceu Sinus totus.

Ductis igitur axium ſemiſſibus AL & AD, [*Fig.* 6, 7, 8] per eorum extremitates deſcribatur quadrans Ellipſis LCD, vel paulo amplius: cujus peripheriæ, ex centro applicetur recta AC, Secans anguli depreſſionis Solis infra horizontem [per ſuperius *Lemma*] ut pote deſignans lineam perpendicularem e centro Terræ per Spectatoris oculum eductam: In hac accipiatur AE $=$ AD,

(*) Nam AG (ex natura Ellipſis $= \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)} =$ AE $+$ EG $= a + mx : a$. Ergo, quadrando, $bb - bbxx : aa = aa + 2mx + mmxx : aa$. Unde $xx + 2a^2mx : (bb + mm) = (aabb - a^4) : (bb + mm)$ & $x = (-aam + ab\sqrt{(bb + mm - aa)}) : (bb + mm)$.

$= AD$, eritque punctum E locus obſervationis, ſuper quo conſtituendus proin angulus CEB, æqualis diſtantiæ Nubis a vertice (verſus AD quidem, cum Nubes occidentalis eſt; at verſus AL, cum eſt orientalis: occidentalem voco, ubi differentia azimuthalis Solis & Nubis eſt quadrante minor; orientalem, ubi major) eritque B locus Nubis, qui quandoque, cum nubes orientalis eſt, cadere poteſt ultra verticem Ellipſeos L, in alterum ejus quadrantem, ut *Fig.* 8: quod tamen contingere nequit, niſi cum differentia azimuthalis Solis & Nubis a quadrante parum differt, Nubeſque horizonti admodum propinqua eſt. Ad inveniendum locum Nubis analytice, dimittantur perpendiculares CK in AL, BG in AC, & BH in AD, ac producantur, ſi opus ſit, AC & HB ad communem concurſum in M; ſtatuanturque AD [AE] $= a$, AC $= b$, AL $= c$, ratio BG ad GE data $= a : m$, & AH $= x$: quo facto, invenitur, primo AK $= c\sqrt{(bb - aa)} : \sqrt{(cc - aa)}$ & KC $= a\sqrt{(cc - bb)} : \sqrt{(cc - aa)}$ (a); pro quibus brevitatis cauſa ſcribamus d & e: deinde ulterius contrahendi calculi ergo ponatur differentia rectangulorum ae & $dm = pp$, ſumma eorundem $= qq$, ſumma rectangulorum ad & $em = rr$, differentia eorundem $= ſſ$: ſic reperitur (b) No. XXX.

(a) Sit CK $= e$, & AK, ex Ellipſis, natura erit $= \frac{c}{a}\sqrt{(aa - ee)}$. At vero AC^2 [bb] $= KC^2$ [ee] $+ AK^2$ [$cc - ccee : aa$]. Ergo $aabb = aaee + aacc - ccee$. Unde $e = a\sqrt{(cc - bb)} : \sqrt{(cc - aa)} =$ KC; & d [AK] $= \frac{c}{a}\sqrt{(aa - ee)} = a\sqrt{(bb - aa)} : \sqrt{(cc - aa)}$.

(b) Demittatur BO, normalis ad AL, occurrens in I ipſi AC; & erit AK [d] : KC [e] $=$ AO (quam vocabimus z) : OI $= ez : d$. Igitur BI $=$ BO $-$ OI (*Fig.* 6) vel OI $-$ BO (*Fig.* 7) vel BO $+$ OI (*Fig.* 8), BI, inquam, eſt $x - ez : d$, aut $ez : d - x$, aut $x + ez : d$, id quod ambigue deſignabimus ſic, $x \backsim ez : d$. Rurſus, (ob ſimilia triangula ACK, AIO, BIG) eſt AC [b] : AK [d] $=$ AI : AO $=$ BI ($x \backsim ez : d$) : BG $= (dx \backsim ez) : b$; & quoniam $a : m =$ BG : GE, erit GE $= (dmx \backsim emz) : ab$. Igitur AG $=$ AE $+$ EG $= a + (dmx \backsim emz) : ab =$

Digitized by Google

No. XXX. In 6. *Fig.* angulo CEB exiſtente $<$ CAD, quo caſu etiam $ae < dm$

$$x = \frac{-a^4bpp + acrr\sqrt{(aap^4 + ccr^4 - a^4bb)}}{aap^4 + ccr^4}$$

angulo CEB exiſtente $>$ CAD, quo caſu itidem $ae > dm$,

$$x = \frac{+a^4bpp + acrr\sqrt{(aap^4 + ccr^4 - a^4bb)}}{aap^4 + ccr^4}$$

angulo CEB exiſtente $=$ CAD; evaneſcit quantitas pp, utpote $ae = dm$, eſtque

$$x = \frac{a}{bc}\sqrt{(bbcc - aadd)}$$

In 7. *Fig.* angulo CEB exiſtente $>$ CAL, quo caſu quoque $ad > em$,

$$x = \frac{+a^4bqq - ac\text{ſſ}\sqrt{(aaq^4 + cc\text{ſ}^4 - a^4bb)}}{aaq^4 + cc\text{ſ}^4}$$

angulo CEB exiſtente $<$ CAL, quo caſu pariter $ad < em$,

$$x = \frac{+a^4bqq + ac\text{ſſ}\sqrt{(aaq^4 + cc\text{ſ}^4 - a^4bb)}}{aaq^4 + cc\text{ſ}^4}$$

angulo CEB exiſtente $=$ CAL, evaneſcit quantitas ſſ, utpote $ad = em$,

fitque $x = \frac{ae}{b}$.

In

$(aab + dmx \backsim emz) : ab$. Nunc quoniam $AG^2 + GB^2 = AB^2 = AH^2 + HB^2$ erit $AG^2\ [(aab + dmx \backsim emz)^2 : aabb] = AH^2 + HB^2 - GB^2\ [xx + zz - (dx \backsim ez)^2 : b^2]$; aut $(aab + dmx \backsim emz)^2$, $= aabbxx + aabbzz - aa(dx \backsim ez)^2 =$ (quia $bb = dd + ee$) $aaddxx + aaeexx + aaddzz + aaeezz - aaddxx \pm 2aadexz - aaeezz = aaeexx + aaddzz \pm 2aadexz = (aex \backsim adz)^2$. Ergo $aab + dmx \backsim emz = aex \backsim adz$, vel $aab = \pm (ae \backsim dm)x \pm (ad \backsim em)z$: hoc eſt, in caſu Fig. 6. $aab = ppx + rrz$: in caſu Fig. 7. $aab = qqx + \text{ſſ}z$, in caſu Fig. 8. $aab = \text{ſſ}z - qqx$. Hinc, ſeparando z, & quadrando, & pro zz ſubſtituendo $cc - ccxx : aa$, habentur æquationes quadraticæ, quarum ſolutiones dant Auctoris formulas.

In 8. *Fig.* ubi angulus C E B perpetuo exiſtit $>$ C A L, adeo- No. XXX.
que & $ad > em$,

$$x = \frac{-a^4 bqq + acss\sqrt{(aaq^4 + ccs^4 - a^4 bb)}}{aaq^4 + ccs^4}$$

Inventâ quantitate x, vel A H, facile tandem eſt, ex illa, & recta B H $= \frac{c}{a}\sqrt{(aa - xx)}$, inveſtigare A B; a qua ſubtracta Terræ ſemidiameter A E relinquet quæſitam Nubis altitudinem. Q. E. I.

N°. XXXI.

JACOBI BERNOULLI

ANIMADVERSIO

IN GEOMETRIAM CARTESIANAM,

& Conſtructio quorundam Problematum Hyperſolidorum.

Quanquam ſubinde extiterint, qui CARTESIUM in Phyſi- *Act. Erud.*
cis, aliiſque, humani quippiam paſſum fuiſſe oſtenderent, *Lipſ.* 1688.
nemo tamen, quod ſciam, hactenus in ejus Geometria Jun. p. 323.
quicquam, quod alicujus momenti eſſet, cenſura dignum adnotavit; quale quiddam in ſequentibus aperire conſtitui, poſtquam de primario Autoris in illa ſcopo pauca nonnulla prælibavero, quæ errorem ejus magis conſpicuum, minuſque excuſabilem reddere poſſunt.

CARTESIUS, in tribus *Geometriæ* ſuæ libris, præcipue verſatur in eo, ut oſtendat, Problematis cujuſque conſtructionem

N.XXXI. ſemper eligendam eſſe lineam ſimpliciſſimam, cujus ope id ipſum ſolvi queat, hoc eſt, (prout ſe explicat) non tam talem, quæ Problematis conſtructionem aut demonſtrationem faciliorem reddat, quam quæ ſit ſimpliciſſimi generis. Hoc enim poſito, docet deinceps, ſolius lineæ rectæ & circuli ope, non poſſe conſtrui niſi Problemata ſimplicia & plana, id eſt, Æquationes unius duarumve dimenſionum, & ope Sectionis alicujus Conicæ non niſi Problemata ſolida, hoc eſt, Æquationes trium quatuorve dimenſionum; & ope Parabolæ, ut vocat, ſecundi generis, Æquationes duntaxat quinque vel ſex dimenſionum; cæterasque altiorum graduum Æquationes requirere itidem curvas gradatim in infinitum magis magiſque compoſitas. Quod tantundem eſt, ac ſi generaliter dixiſſet, *per curvas cujuſque generis conſtrui ſolummodo poſſe Æquationes duplo plurium dimenſionum, quam ſint illæ, quibus earundem curvarum natura exprimitur.* Quæ Regula a nemine huc uſque in dubium vocata fuit; licet ejus falſitas facile potuiſſet detegi a SCHOOTENIO, HUDDENIO, aliiſque, qui perſpectam habebant methodum adinveniendi Æquationum conſtructiones; niſi, Magiſtri ſui auctoritate præventi, veritatem dictorum ejus ſupponere quandoque, quam examinare maluiſſent.

Exiſtimo namque demonſtratu haud difficile eſſe, *quod cujuſlibet generis curvæ aptæ ſint ad conſtruendas Æquationes tot dimenſionum, quot indigitat quadratum numeri dimenſionum, ad quas aſcendunt Æquationes curvarum illarum naturam exprimentes.* Sic ope curvarum, quarum natura exprimitur per Æquationem cubicam, conſtrui poſſunt non ſolum Æquationes bis trium ſeu ſex, ſed ter trium ſeu novem dimenſionum; & quarum natura exprimitur per Æquationem biquadraticam, earum auxilio non modo Æquationes bis quatuor ſeu octo, ſed quater quatuor ſeu ſexdecim dimenſionum reſolvuntur, &c. plane ut hinc appareat, CARTESIUM ejuſdem, quod ipſe perſtringit, vitii reum eſſe, dum ad conſtructionem Problematum ſuperiorum graduum, præter neceſſitatem, adhibere docet curvas magis compoſitas, quam eorundem natura depoſcit. Quod enim circa Sectiones

Conicas

Digitized by Google

Conicas recte ſentiat, earum nempe ope non poſſe conſtrui altiores Æquationes quam Cubicas & Biquadraticas; videtur potius ex accidenti illi contigiſſe, ex eo quia coincidunt duplum & quadratum binarii, qui eſt numerus dimenſionum, quibus conſtant Æquationes naturam Conicarum Sectionum exprimentes. N.XXXI.

Sed ne quicquam gratis aſſeruiſſe videar, proponamus conſtruendam hanc Æquationem novem dimenſionum: $y^9 * * - 3py^6 * * + 3ppy^3 * - qy - r = 0$, quæ quamvis incompleta ſit, determinationemque includat, quatenus requirit quantitatem cognitam ſeptimi termini æqualem trienti quadrati quantitatis cognitæ quarti; attamen reducibilis non eſt ad pauciores dimenſiones; ac proinde, ſi credendum CARTESIO, aliter conſtrui non poterit, niſi adhibendo curvam duobus tribuſve gradibus altiorem, quam ſunt Sectiones Conicæ. Dico, *duobus vel tribus gradibus*: quoniam animadverto, ipſum CARTESIUM ſibi non conſtare, in diſtinguendis per certa genera curvis; quemadmodum ſub finem libri primi ex reſolutione quæſtionis PAPPI colligere eſt; ubi, ad quæſitorum punctorum inventionem, adhibendam eſſe dicit curvam Sectionibus Conicis uno gradu altiorem, cum quæſtio propoſita eſt in 10, 11, 12, aut 13 lineis: & cum in 14, 15, 16, vel 17 lineis, requiri tum aliam curvam, quæ uno adhuc gradu ſupra præcedentem ſit compoſita. Atqui vero cum quæſtio proponitur in 10, 11, 12, aut 13 lineis, effici poteſt (ipſe monente CARTESIO) ut Æquatio Problemati reſpondens non ultra quadrato-cubum aſſurgat: & cum in 14, 15, 16, 17, proponitur, fieri etiam poteſt, ut Æquatio biquadrato-quadratum non excedat; quarum quidem Æquationum illa, juxta Autoris methodum, reſolvitur ope curvæ, cujus natura exprimitur per Æquationem cubicam; hæc vero per aliam curvam, cujus natura exprimitur per Æquationem biquadraticam: Unde omnino colligi deberet, Autori propoſitum fuiſſe, curvas iſtas ad duo diverſa genera, vel duos differentes gradus referre; & tamen ipſemet, in paragrapho ſtatim ſubſequenti, non obſcure, imo libro ſecundo paſſim, diſertis verbis ambas ſub eodem conſtituit gradu; ſicut etiam illas

N. XXXI. illas curvas, quarum Æquationes vel ad ſurdeſolidum; vel ad quadrato-cubum adſcendunt, promiſcue ſub eodem curvarum genere complectitur.

Quicquid igitur ſit de diſtinctione hac curvarum, certum eſt, Æquationem ſupra allatam ex ſententia CARTESII conſtrui non poſſe, niſi ope curvæ, quæ Sectiones Conicas ad minimum duobus gradibus excedit: cum tamen eandem conſtruam facile adminiculo ſolius curvæ Paraboloidicæ cubicalis, quæ Sectiones Conicas uno duntaxat gradu ſuperat. Conſtructio talis: Deſcripto (*Fig.* I.) vulgari Paraboloide cubicali AG, cujus latus rectum AB ſeu 1, vertex A, & axis AF; ſumatur in hoc axe $AE = p$, & ex puncto E excitetur perpendicularis $EC = (p^3 - r) : q$, circa quam ut axem, vertice C, & latere recto $CD = \sqrt{q}$, deſcribatur aliud Paraboloides cubicale CG, interſecans alterum in puncto G; e quo ſi dimittatur in axem AE perpendicularis GF, erit hæc radix Æquationis propoſitæ. DEM. Etenim, ſi linea GF ſic inventa vocetur y, erit, ex natura Paraboloideos, $AF = y^3$, ac proinde $HG = EF = AE - AF = p - y^3$, & $HG^3 = p^3 - 3ppy^3 + 3py^6 - y^9 =$ (propter Paraboloides CG) DC^2 in $CH = DC^2$ in $CE - GF =$ (*per conſtruct.*) q in $(p^3 - r) : q - y = p^3 - r - qy$; hoc eſt, Æquatione ordinata $y^9 ** - 3py^6 ** + 3ppy^3 * - qy - r = 0$, quæ eadem eſt cum propoſita: unde liquet, inventam lineam GF, quæ nominata fuit y, Æquationis hujus eſſe radicem. Q. E. D.

Poteſt vero etiam ipſa hæc Æquatio adhuc aliter conſtrui, ope unius ejuſdemque Paraboloideos cubicalis, id eſt, duorum eandem parametrum habentium, hoc modo: Ductis (*ead. Fig.* I.) EA, EC perpendicularibus indefinitis, abſciſſaque $EC = (p^3 - r) : q$, ut antea, fiat $EA = p : \sqrt[4]{q}$; & deſcribantur circa axes AE, CE, ſumtis verticibus A & C, ac communi Parametro AB vel $CD = \sqrt[4]{q}$, duo Paraboloidea cubicalia AG, CG, ſeſe interſecantia in puncto G; demiſſa enim in AE perpendicularis GF, iterum Æquationis propoſitæ radicem deſignabit.

DEM.

DEM: $(p^3 - 3ppy^3 + 3py^6 - y^9) : \sqrt[4]{q^3} = ((p - y^3) : \sqrt[4]{q})^3 = (EA - GF^3 : AB^2)^3 = (EA - FA)^3 = HG^3 = DC^2 \times CH = DC^2 (CE - GF) = \sqrt[4]{q}((p^3 - r) : q - y) = \sqrt[4]{q} (p^3 - r - qy) : q = (p^3 - r - qy) : \sqrt[4]{q^3}$: factaque mul.iplicatione per $\sqrt[4]{q^3}$, habetur, ut ſupra, $p^3 - 3ppy^3 + 3py^6 - y^9 = p^3 - r - qy$, ſive $y^9 * * - 3py^6 * * + 3ppy^3 * - qy - r = 0$; quare conſtat rurſum GF Æquationis hujus radicem fore. Q. E. D. N. XXXI.

Dixi ſolam GF fore Æquationis radicem, non LM, vel IN, vel OP, ut pote quæ radices ſunt differentium Æquationum: nam LM eſt radix vera hujus Æquationis, $y^9 * * - 3py^6 * * + 3p^2y^3 * + qy - 2p^3 + r = 0$: IN radix falſa iſtius, $y^9 * * + 3py^6 * * + 3ppy^3 * + qy + r = 0$: & OP falſa hujus, $y^9 * * + 3py^6 * * + 3ppy^3 * - qy + 2p^3 - r = 0$. Quod cum primo animadvertiſſem, ſuſpicari ſimul cœpi, curvas AN & CL non eaſdem eſſe cum AG & CG; reque ulterius perpenſa, mox verum deprehendi, quod curva AG infra axem AE non continuetur ſiniſtrorſum per AN, ſed potius dextrorſum per AQ, & ſimiliter curva CG ultra axem CE non inflectatur deorſum verſus L, ſed ſurſum verſus R: meminique poſtea, id ipſum etiam jam olim a WALLISIO, ſed alia occaſione, obſervatum eſſe, in Præfatione ejus ad *Tractatum contra* MEIBOMIUM. Etenim interſectiones harum curvarum RCGN, & LGAQ, dicta ratione inflexarum ſupra axem AP, determinabunt omnes radices veras Æquationis noſtræ, & reliquæ infra axem omnes falſas: poſſunt autem ſe interſecare, ſupra axem AP, ad ſummum in tribus punctis, & infra, in duobus, ſi ultimus Æquationis terminus habeat ſignum —, quod fit, ſi ES < EA; at ſi habeat ſignum +, id eſt, ſi ES > EA, poſſunt ſe interſecare, ſupra axem, in quatuor punctis, & infra, in uno ſolo: ſic ut, illo caſu, Æquatio tres admittere poſſit veras radices, & duas falſas; hoc vero, quatuor veras, & unam duntaxat falſam: reliquæ enim quatuor ſemper hic imaginariæ ſunt.

Quemadmodum vero Æquatio iſta incompleta novem dimenſionum conſtructa eſt, adminiculo curvæ, quæ uno tantum gradu

Digitized by Google

N. XXXI. ſupra Sectiones Conicas eſt compoſita: ex eodem curvarum genere ſeligi omnino puto poſſe tales, per quas omnes, etiam completæ Æquationes totidem dimenſionum generaliter reſolvi ac conſtrui queant.

Sed ut veritatem uſumque eorum, quæ dixi, etiam in ſpeciali aliquo Problemate, eoque celebri admodum, circa inventionem nimirum mediarum quarundam proportionalium, palam faciam; proponantur inveniendæ ſex mediæ proportionales inter duas datas a & q: ubi conſtat, quod ſi pro prima earum ponatur x, perveniatur ad Æquationem bis-ſurſolidam, $x^7 - a^6 q = 0$; quæ, ſi CARTESIO fides adhibenda, aliter conſtrui nequit, niſi adhibendo curvam, cujus natura exprimitur per Æquationem, in qua alterutra indeterminatarum ad biquadratum aſſurgit: At ego illam conſtruo facillime, ope duarum curvarum, quarum natura intra limites Æquationis cubicæ coercetur. Ductis enim [*Fig.* 2.] normalibus rectis AD, AC; ſi circa illas ut axes, communi vertice A, parametris $AB = a$, & $AF = q$, deſcribantur duæ Paraboliformes curvæ AGL & AGM, ſeſe interſecantes in puncto G; quarumque illa ſit vulgaris Paraboloidica cubicalis; hæc vero, alia Paraboloidica ejus naturæ, ut ſolidum ex ductu lateris recti in quadratum ſegmenti axis, ſit æquale cubo ordinatim applicatæ; erit perpendicularis GE, ex puncto interſectionis G in axem AE demiſſa, radix Æquationis inventæ, id eſt, prima ſex mediarum proportionalium, quarum tertia eſt AE.

DEM. $aay = AB^2 \times AE =$ (ex natura Paraboloidis AGL) $EG^3 = x^3$; hinc $y = x^3 : aa$ & $y^3 = x^9 : a^6$: Rurſus $qxx = AF \times AH^2 =$ (ex natura Paraboloidis AGM) $HG^3 = y^3 = x^9 : a^6$, unde $x^9 = a^6 qxx$; factaque diviſione per xx, $x^7 - a^6 q = 0$: quæ, quia cum ſuperiore convenit, patet propoſitum. Notandum hac occaſione: quia Æquatio, ad quam primo pervenitur, dividi poteſt per xx, ſequitur illam, præter rectam GE, adhuc duas alias habere æquales radices, quales ſingulæ ſint æquales nihilo; adeoque duas curvas in communi vertice A ſeſe tangere debere: quo indicio, denuo cognovi, ad quas partes inflectantur curvæ ultra verticem; deprehendique non con-

tinuari

Digitized by Google

tinuari per AP & AO ; cum abſurdum foret, curvas LAP, MAO ſic inflexas ſe in A contingere: ſed priorem (quod cum WALLISIO jam annotavi) continuari per AQ, poſteriorem vero (quod a nemine huc uſque obſervatum legi) per AS: hac enim ratione contactus utriuſque curvæ manifeſtus eſt. N. XXXI.

Haud abſimili obſervatione invenientur 10, 12, 16, pluresque proportionales: nam ſi curva AGL ſit Paraboliformis biquadratica expreſſa per $a^3 y = x^4$; & curva AGM Paraboliformis cubica denotata per $a q x = y^3$, erit GE prima decem proportionalium inter a & q, & AE quarta: ſin & hæc ſit biquadratica indicata per $q x^3 = y^4$ erit GE prima duodecim proportionalium, & AE quarta &c. Quales quidem juxta CARTESIUM inveniri non poſſent, niſi ope curvarum, multis adhuc gradibus ſupra Paraboliformes iſtas compoſitarum.

Præterea ſciendum, etiam quatuor medias proportionales inveniri poſſe ope Parabolæ & vulgaris Paraboloidieæ cubicalis; quæ tametſi ſit generis ejuſdem cum illa, qua utitur CARTESIUS, tamen & conſtructionem multoties expeditiorem & demonſtrationem planiorem efficit. Si enim (*in eadem figura* 2.) AGL fingatur eſſe vulgare Paraboloides cubicale, cujus latus rectum AB $= a$, & AGM Parabola, cujus latus rectum AF $= q$; erit GE prima quatuor proportionalium inter a & q, & AE tertia. Quæ conſtructio conferri poteſt cum prolixiſſima illa *Carteſiana* quæ habetur ſub finem Libri tertii.

Quibus omnibus rite perpenſis, nihil prorſus video, quid CARTESIUM hoc in paſſu ab ἀγεωμετρησίας vitio, quod ipſemet perſtringit ſæpius, liberare queat; præterquam quod dici forte poſſit, ea propter Geometram hunc coactum fuiſſe, in conſtruendis Æquationibus quadrato-cubum excedentibus, adhibere curvam noſtra altiorem, quia alteram curvarum, quarum interſectione determinari debent radices, perpetuo in omnibus ſuis conſtructionibus voluerit eſſe circularem, quæ ſimplicitate ſua viciſſim compenſet quicquid altera nimium habet compoſiti. At ficulneum hoc eſſe præſidium, ipſe ſi reviviſceret, CARTESIUS haud gravate agnoſceret: quippe nemini, puto, condonaret, qui Pro-

Digitized by Google

N.XXXI. blemata plana, quæ duorum circulorum interſectione reſolvi poſſunt, conſtruere mallet ope Sectionis alicujus Conicæ & Lineæ rectæ, ſub prætextu, quod ſicut Sectio Conica circulo magis eſt compoſita, ita Linea recta viciſſim eodem ſit ſimplicior; neque etiam magis ab eo veniam impetraret, qui, in conſtructionibus Æquationum cubicarum, Circulo & Parabolæ præferret Lineam rectam & Paraboloidicam cubicalem, quarum una magis, altera minus illis eſt compoſita: ut maxime omnes Æquationes cubicæ Lineæ rectæ & unius ejuſdemque Paraboloidis ope, non minus ac Circuli & Parabolæ adminiculo, ſcite & expedite conſtrui poſſint hoc modo: Deſcripto (*Fig.* 3.) vulgari Paraboloide cubicali FEA, continuato, ut ſupra monui, per AH, cujus axis ſit CAL, vertex A, & latus rectum AB $= 1$, abſcindatur in axe [ſiniſtrorſum, ſi ſit $z^3 = * - pz + q$; dextrorſum vero, ſi habeatur $z^3 = * + pz + q$, aut, $z^3 = * + pz - q$] AM $= p$, & AI $= q$, junctaque BM; ducaturque per I huic parallela IE, tangens vel ſecans curvam in puncto, vel punctis, a quibus demiſſæ ad axem perpendiculares denotabunt omnes Æquationis radices; nempe ED radicem veram primæ formulæ; LH veram, & FG, ED falſas ſecundæ: ſicut illa falſam, hæ veras tertiæ (*). Cum itaque Conſtructiones iſtæ tam elegantes, tamque faciles, nihilominus e Geometria eliminentur a Cartesio; perſpicuum utique eſt, etiam modum, quem præſcribit pro conſtruendis Æquationibus quadrato-cubum excedentibus, repudiandum potius eſſe hoc nomine, quia curvam adhibere docet, utraque noſtra magis compoſitam, quam excuſandum, quod pro altera

(*) Nam ſi dicatur LH, z; DE & GF, $-z$, erunt, ex natura parabolæ cubicalis, AL $= z^3$; AD, & AG $= -z^3$. Igitur IL $= z^3 - q$, ID & IG $= -z^3 + q$. Sed AM (p) ad AB (1), ut IL ($z^3 - q$) aut ID, IG ($-z^3 + q$), ad HL (z) aut DE, FG ($-z$). Igitur $z^3 - q = pz$, aut $-z^3 + q = -pz$, id eſt $z^3 = pz + q$.

Quod ſi poſuiſſemus LH, $-z$, DE & FG, $+z$, habuiſſemus $z^3 = pz - q$.

At vero, ſi ED $= z$, erit AD $= z^3$, & Di $= q - z^3$. Ergo Am (p) : AB (1) $=$ Di ($q - z^3$) : DE (z) dat $q - z^3 = pz$, aut $z^3 = -pz + q$.

altera aſſumat circulum, qui iiſdem ſimplicior exiſtit. N. XXXI.

Ut taceam de eo quod nequidem ſemper opus ſit, in noſtra methodo, quærere radices per interſectionem duarum diverſarum curvarum, ſed quod ſæpe una ſola ſufficiat; prout oſtendi in conſtructione poſteriore Æquationis ſupra allatæ novem dimenſionum, quam abſolvi ope unius ejuſdemque Paraboloidis, diverſimode tantum poſiti: Cum, ſecundum CARTESIUM, ſemper deſcribendæ ſint duæ diverſæ curvæ, quarum interſectionibus radices optatæ Æquationum inveniantur.

Nº. XXXII.

DIONYSII PAPINI

MELETEMATA

AD GEMINAM APPENDICEM

De Perpetuo Mobili,

Actis Erudit. Lipſ. A. 1687, *menſe Junio inſertam.* *

PErvolvi paucis abhinc diebus *Acta Eruditorum* Menſis Junii A°. 1687, ibique a pagina 315. uſque ad paginam 324. obſervavi Clariſſimum Virum D. BERNOULLI Mobile quoddam perpetuum acriter quidem, at fruſtra, impugnare; quia circumſtantia, ex qua Machinæ defectum deducit, nequaquam eſt eſſentialis, ſed facil- *Acta Erud. Lipſ.1688. Jun.p.336.*

 limo

* *Supra Num.* XXVIII.

Digitized by Google

Num. XXXII. limo negotio poteſt immutari; ſicque ipſius objectio tota ſubito corruet, ſalva interim remanente Machina, prout jamjam videbitur. Ibidem præterea perſpicaciſſimum illum Virum video etiamnum ambigere, utrum mea contra idem inventum exceptio ſufficiens, necne, habenda ſit: veriſimile eſt itaque, quamplures alios itidem ea de re addubitaturos; metuendumque eſſe ne Publicum ſpe ſucceſſus Perpetui Mobilis in poſterum deludatur: operæ igitur pretium fore exiſtimo, ſi oſtenderim objectionem meam admodum eſſe peremptoriam, ipſumque controverſiæ jugulum recta impetere.

Figura I. Machinam exhibet inverſam, ampliori nimirum parte deorſum, acumine vero ſurſum ſpectante, contra quam in priori deſcriptione fuerat ſuppoſita. Ut jam diſquirere liceat, an nova hæc diſpoſitio feliciorem contra me ſucceſſum ſortitura ſit; præterea, ut ipſam tuear a *Bernoullianis* telis, quæ ſane in priori deſcriptione metuenda erant; ſuppono jam follem ABCDE, quadraginta digitos altum, priſmaticum potius quam pyramidalem, eſſe ex illorum genere, quorum alæ non circa axem quendam moventur, ſed in dilatatione & contractione ſemper parallelæ remanent: exempli gratia, cum ala ABC accedet ad DE diſtantiæ AE, CD pariter decreſcent ſibique invicem perſtabunt æquales: ſic nulla amplius vectis ratio haberi poterit, ex qua tamen Machinæ defectum deducit BERNOULLIUS. Supponendum eſt inſuper follem mercurio plenum eſſe, & vas H mercurium etiam continens collocatum altius axe motus F, qui medio Machinæ affixus ſupponitur.

Sic ſperat inventor fore ut follis gravitate aeris comprimatur, mercuriumque ſuum per tubum AKH in vas H effundat; unde inferior pars BCD, levior facta, molem G ſuperiori parti affixam æquiponderare amplius non valeat, deprimaturque pars ſuperior AE: hæc autem, dum ad altitudinem axis F devenerit [*fig.* 2.], artificio aliquo poterit detineri, ne ulterius deſcendat, atque ita follis in ſitu horizontali remanebit.

Jam quoniam vas H ſupra axem poſitum eſt, poterit mercurius ex dicto vaſe per tubum KA in follem defluere; donec pars latior BCD, admiſſo mercurio, tantum pondus acquiſierit, ut alteri parti AE molique ipſi affixæ præponderet, proindeque depreſſa Machinam in priſtinum ſtatum reſtituat: hoc facto, ab externo aere iterum comprimetur follis, motuſque, ſucceſſione jam deſcripta, ſemper continuabitur. Sic, inquam, ſperat Author; an merito? Jam diſpiciam.

Supponamus vas H duobus digitis, verbi gr. ſupra axem F poſitum eſſe; ſicut & in priori deſcriptione, illud duobus digitis inferius axe collocaverat Author: Sequitur jam (cum follis ſit quadraginta digitos altus) perpendicularem altitudinem tubi HA [*fig.* 1.] eſſe octodecim digitorum, mercuriumque in dicto tubo contentum ea altitudine aeri externo contra niti: adeoque atmoſphæræ gravitas (quæ viginti ſeptem mercurii

mercurii digitos æquare ſupponitur) debebit, per dictum tubum H A, exerere in interiora follis preſſionem novem mercurii digitis æqualem: quia ſcilicet mercurius H A octodecim ex viginti ſeptem detrahit. Jam ut preſſionem a mercurio in folle incluſo factam indagemus, eadem methodo procedendum eſt, quam in *Novellis Batavis* Menſis Septembris Anno 1686. ex *Tranſactionibus Philoſophicis Londinenſibus* deſumptam legere eſt: Obſervandum ſcilicet partes omnes alarum follis a dicto mercurio inæqualiter premi, prout magis vel minus a ſummitate diſtant: ſic enim partes infimæ a quadraginta mercurii digitis comprimuntur; ſupremæ vero, cum nullum mercurium ſupra ſe habeant, nullam poſſunt ab ipſius gravitate preſſionem pati: partes in medio ad axem ſitæ viginti digitos in ſuperiori parte ſtagnantes ſuſtinent; ac ſic de cæteris, preſſio ſemper proportionaliter cum diſtantia a vertice, minuitur, vel augetur. Cum autem iſtud preſſionis augmentum progreſſionem arithmeticam ſequatur; patet quod omnes illæ variæ preſſiones, ſimul ſumptæ, efficiunt idem quod preſſio uniformis, quæ ubique viginti mercurii digitos æquaret: addendo igitur viginti digitos novem illis per tubum H A prementibus, de quibus ſupra; fient omnino viginti novem digiti, qui in interiora follis preſſionem exerant: extus vero atmoſphæræ preſſio viginti ſeptem digitos ubique æquare ſupponitur: ergo prævalebit interior preſſio, folliſque dilatabitur; cum tamen ex Authoris ſententia comprimi debuiſſet: Atque ita nova hæc diſpoſitio felicioiem ſuperiori ſucceſſum non ſortietur. Num. XXXII.

Notandum hic, quod, quemadmodum in *Novellis Batavis* ſupra citatis, nullam ad motum alarum circularem, neque ad ipſarum inæqualem latitudinem, attentionem feceram; ſic iterum dictam alarum inæqualitatem negligendam hic arbitror. Dum enim circumſtantiæ ejuſmodi mihi favent, non metuendum eſt, ne Adverſarius objectionem illam moveat; ſic enim ſe ipſum jugulandum exponeret: mihi autem, cum iſtis minus eſſentialibus ſubſidiis non opus ſit, multo ſatius eſt brevitati ſtudere, atque ex ſola liquorum altitudine (quæ genuina eſt gravitationis ipſorum menſura) argumentum deſumere, quam fuſiori diſcurſu ſuperfluas vocando ſuppetias, aliquam Antagoniſtæ excipiendi anſam præbere; unde fiat ut controverſia multo difficilius ad finem perducatur.

Jam ſi quis quærat rationem, cur follis aperiri hic debeat, cum tamen in ſuperioris deſcriptionis examinibus ipſum claudi debere demonſtraretur? Reſpondeo vas H, prout infra vel ſupra axem collocatur, in cauſa eſſe, cur follis erectus aliquando comprimi debeat; aliquando etiam dilatari. In priori enim deſcriptione, cum vas H eſſet duobus digitis depreſſius quam axis Machinæ, tubus H A æquabat viginti duos digitos, atque ita mercurius in eo contentus aeri externo eouſque reſiſtebat, ut totalis in folle preſſio eſſet ſolummodo viginti quinque digitorum; unde

ſeque-

Num. XXXII. ſequebatur follis ab exteriori aere conſtrictio: in poſteriori autem deſcriptione, quam hic exhibuimus, idem vas H ſupra axem collocandum eſt; unde tubus HA, brevior factus, permittit ut atmoſphæra fortiorem in interiora follis preſſionem exerat, follemque aperiat; prout ex computo ſupra oſtenſum eſt. Si quæratur ulterius, cur vaſis H poſitio ſic immutanda ſit? In promptu iterum reſponſio eſt. In priori ſcilicet Machinæ deſcriptione, follis ad horizontalem ſitum adductus, mercurium ſuum effundere debuit in vas H, quod proinde infra axem collocari oportuit: in poſteriori autem deſcriptione, idem follis, dum horizontalem poſitionem obtinet, mercurio ex vaſe H defluente debet repleri; ac proinde dictum vas altius ponatur neceſſe eſt: res nimium facilis eſt, quid plura? Quoniam tamen (in ſecunda *Appendice* †) Clariſſimus BERNOULLIUS ſupponit, axem motus aſſigendum eſſe Machinæ e regione centri gravitatis; cum nos dictum axem in media inter utrumque extremum diſtantia collocemus; metuendum eſt, ne quid negotii ejuſmodi diſcrepantia Lectoribus faceſſat: proindeque illos hic monitos velim, Cl. BERNOULLIUM præproperum hic etiam tuliſſe judicium, inſidamque iterum Hypotheſin aſſumpſiſſe. Rem enim paulo attentius inſpectanti facile patuiſſet in Machina, de qua tractabat, axem motus & centrum gravitatis in eadem altitudine non poſſe collocari: poſita namque illa æqualitate altitudinis, quantumcunque follis mercurio repleretur, nunquam tamen baſis præponderare poſſet: ac proinde optata rotationis viciſſitudo fruſtra expectaretur. Fatendum igitur axem motus ab inventore Machinæ recte fuiſſe medio infixum, meamque contra dictum Automa objectionem *Bernoullianis* eſſe anteponendam.

Manum jam de tabula ſumerem, quodque Cl. BERNOULLIUS craſſæ me in Geometricis inſcitiæ inſimulat, quaſi pyramidis ad priſma ejuſdem baſis atque altitudinis rationem ſubtriplam eſſe ignoraverim, omitterem libentiſſime: at Clariſſimi Viri verba ea ratione, hoc in loco, conſcripta ſunt, ut plurimos Lectores in errorem facile inducant. Ille enim me culpat, quod vaſis pyramidalis capacitatem juſte non æſtimaverim, dum mercurii in folle preſſionem computavi; quaſi nimirum liquidorum preſſiones ab ipſorum quantitatibus, aut vaſorum capacitatibus penderent. Neceſſarium igitur duxi tyrones hic monere, in computationibus ejuſmodi nullam prorſus figuræ aut capacitatis vaſorum rationem habendam: in ipſo enim Hydroſtatices principio demonſtratur, liquidorum preſſionem petendam eſſe ſolummodo ex extenſione partis compreſſæ, & perpendiculari altitudine comprimentis liquoris; nequaquam vero ex ipſius quantitate: ideoque, in omnibus a me circa hoc argumentum

† *Supra*, *pag.* 326.

Digitized by Google

mentum ſcriptis, apprime cavi ne ullam aut capacitatis follis, aut molis hydrargiri rationem haberem: quodque contrarium aſtruere videatur Clariſſ. BERNOULLIUS, feſtinationi potius quam ignorantiæ adſcribendum eſt. Num. XXXII.

N°. XXXIII.

JACOBI BERNOULLI

APPENDIX TERTIA

AD EXAMEN PERPETUI MOBILIS,

Qua

ad Meletemata DIONYSII PAPINI *menſe Junio hujus Anni publicata reſpondetur.*

CLariſſimus Vir in iſtis *Meletematis* duo ſibi præſtituta habet; unum, ut oſtendat me fruſtra impugnaſſe Machinam; alterum, ut ſuam refutationem genuinam eſſe probet: at quantum in utroque præſtiterit, mox palam me facturum ſpero: non quod huic labori non parcere maluiſſem, ſi exiſtimaſſem de ſola detecti erroris gloria inter nos diſceptari, ut pote quam Excel. PAPINO, ſiquis attribuere volet, ego certe non invideo: ſed quia ſentio, agi hic præcipue de quantitate virium controververſæ Machinæ, de qua erudiri publico pluris intereſt, & in qua æſtimanda non leviter diſſentimus, neceſſarium eſſe duxi, Lectorem de rei veritate uberius paulo inſtruere. *Acta Erud. Lipſ. 1688. Nov. pag. 591.*

I. Dicit me fruſtra impugnare Machinam; circumſtantiam enim vectium, e qua Machinæ defectum deduco, ei non eſſentialem eſſe, levique negotio ſic immutari poſſe, ut nulla amplius vectis habeatur ratio. Hoc vero mihi tantundem videtur eſſe, ac ſi

Digitized by Google

Num. XXXIII. quempiam, qui, ex natura vectis, oſtenderet potentiam bilibrem vecti applicatam pondus unius libræ, ſed triplo ab axe remotius, movere non poſſe, culpare vellet, propterea quod eadem potentia eidem ponderi citra vectem ſic applicari poſſit, ut ſequatur motus. Etenim, ſi vel maxime verum eſſet, quod facta, quam innuit, mutatione Machinæ, obtineretur motus optatus; non tamen inde colligi poſſet, conſiderationem vectis in ea diſpoſitione Machinæ, quam propoſuit Auctor, quamque ſolam refutandam ſuſceperam, minus eſſentialem eſſe. Largior quod abſque vecte follis poſſit eſſe follis; at quod tum cum folli vectis ineſt, ejus vires, ſepoſita vectis conſideratione, calculo æſtimari & ſubduci poſſint, ſicuti poſſunt non attendendo ad materiam vel colorem alarum, aliave ejuſmodi accidentia, id vero nemini facile perſuadebit. Sed deinde, quod rei caput eſt, ſi quicquam adverſus me efficere voluiſſet Clariſſimus Vir, non acquieſcere debuiſſet nova ſua Machinæ fabrica; ſed inſuper oſtendere, quod per eam ſalvetur motus perpetuus ex meis principiis; quod quia non fecit (neque ſane facere potuit) apparet eum calculi mei rationem, vel non attendiſſe, vel diſſimulaſſe: quippe ſi Machinæ ſic diſpoſitæ vires, juxta hunc calculum, examinare ſuſtinuiſſet; facile animadvertiſſet, eam non majori quam antea uſui futuram, tametſi nunc vectis ratio in illa ceſſet. Imo ſi inſpiciatur ejus iconiſmus, vel abſque novo calculo liquere poteſt, quod vires, quas habet follis, cujus alæ ABC & DE [*Fig.* 1.] parallelo motu feruntur, non aliæ ſint, quam quas idem haberet, ſi parallelogramma EB, EC, in alas converſa, & circa firmum axem AE rotabilia conciperentur. Nam primo ſeries filamentorum mercurialium & atmoſphæricorum in alas agentium, in utraque Machinæ diſpoſitione, eædem manent; tum vero latitudines inæquales alarum prioris diſpoſitionis, proportionales ſunt inæqualibus diſtantiis ab axe vectium, in poſteriore; ſicut e converſo etiam æquales alarum latitudines poſterioris diſpoſitionis, proportionales cenſeri poſſunt diſtantiis ab axe vectium prioris; quandoquidem hæ diſtantiæ in motu parallelo alarum, ceu vectium, ubi axis velut infinite diſtans concipitur, itidem æquales habentur. Itaque, cum vires

Digitized by Google

vires harum machinarum æſtimari debeant ex rationibus ponderum filamentorum, latitudinum alarum, & diſtantiarum ab axe; ſequitur omnino illas, in utraque Machinæ diſpoſitione, eaſdem eſſe; adeoque quod de una demonſtratum eſt, id perinde quoque valere de altera. Demonſtravi in ſuperioris anni *Actis* *, quod omnes ejuſmodi folles, qui alas habent circum axem rotatiles, inque vertice adjunctum tubum, ad centrum uſque gravitatis deſcendentem, ſiphones referant crurum æqualium; quare idem quoque ſentiendum de ea follium diſpoſitione, qua alæ parallelo motu moventur, hoc eſt, circa axem infinite diſtantem rotari concipiuntur †: unde ſponte tandem fluit, quod in iſta ſtructura *Papiniana*, ubi coaptatus tubus H A non deſcendit ad mediam profunditatem F, nedum ad centrum gravitatis, preſſio intra follem externæ preſſioni multum prævalere debeat; ſicque efficere, ut follis dilatetur, non conſtringatur; quod ex meis principiis oſtendendum erat. Qua inſuper occaſione non poſſum non denuo conqueri de ſiniſtro ſenſu, in quem verba mea rapuit Clariſſimus PAPINUS; quaſi exiſtimem, axem motus ipſi centro gravitatis machinæ affigendum eſſe, ad expectandam rotationis viciſſitudinem: quod enim axem motus in vicinia hujus centri collocatum ſuppoſuerim, id ideo factum, ut Inventori Machinæ (quem, uti mox explicatius oſtendam, plus juvat ut propius, quam ut remotius ab illo ſtatuatur) tanto plus largirer, eoque ipſo docerem, quod ſi perpetuus motus non ſuccedat, cum axis Machinæ prope gravitatis centrum aſſumitur, is adhuc multo minus ſucceſſurus ſit, ubi longius ab illo removetur. Ut præteream, & hoc falſum eſſe, quod nequeat axis motus in eadem altitudine cum centro gravitatis ita collocari, ut pars una alteri præponderet: ſi enim alterutri alæ ad latus dicti centri, applicetur; nunquid movebitur erecta Machina, cum totum ejus pondus tunc ſit ad unam partem, & nihil ad alteram? Num. XXXIII.

* Supra pag. 324.

† Eadem enim remanet Theorematis Demonſtratio, quæ in Annot. ad pag. 324. habetur, ſive AD finita, ſive infinita ponatur. Infinita autem reſpondit caſui alarum motu parallelo latarum.

Num. XXXIII. Sed denique nec hoc tacendum eſt, Clariſſimum PAPINUM, nova ſua Machinæ fabrica, vel eo quoque nomine nihil contra me proficere, quod exiſtimet, alas ejus parallello motu latum iri. Quis enim, obſecro, non videt, quod alæ iſtæ, tametſi ſolutæ ſint & nullo vinculo ſibi inhærent, non poſſint tamen ita ferri, niſi ambabus extremitatibus æqualiter premantur? Sed ipſo aſſerente PAPINO, premuntur inæqualiter; in partibus ſcilicet infimis fortius ab incluſo mercurio, quam ab externo aere, & in ſupremis ab hoc fortius, quam ab illo: unde, ſive omnes preſſiones ab intra omnibus ab extra ſimul ſumptis prævaleant, ſive hæ illis, ſemper id efficietur potius, ut dum alæ infra magis diſtenduntur, ſupra propius ad ſe invicem accedant, donec in ipſo vertice coeant; & ſic ſponte rationem vectium induant, quam tamen hac fabrica evitare ſtuduit Clariſſimus Vir. Quare dum tela mea, ut vocat, in vectium hypotheſi metuenda eſſe agnoſcit; eo ipſo & contra hanc ſuam ſtructuram eadem non minoris efficaciæ eſſe fatetur.

II. Atque ita Reſponſionem meam *Papinianis* telis fruſtra impetitam, ſatis quidem me defendiſſe auguror. Sed quid ſi nunc eadem in Auctorem retorqueam, & Sole clarius oſtendam illius calculo controverſæ Machinæ jugulum ita peti, ut, in quacunque diſpoſitione, ad ictum hunc declinandum leviſſima immutatione indigeat? Utique fatebitur Clariſſimus Vir, non me, ſed ſe præpropere & feſtinanter egiſſe. Exiſtimat, in Machina quadraginta digitorum quomodocunque diſpoſita, ſeu pyramidali, ſeu priſmatica, & ſive baſis ſurſum ſpectet, ſive deorſum, vires incluſi mercurii perpetuo eaſdem eſſe, & preſſioni uniformi viginti digitorum, ceu dimidiæ altitudinis æquipollere. Spectet igitur primo ſurſum erectæ Machinæ baſis; atque intelligatur axis motus applicari intermedio quodam loco inter centrum gravitatis & dimidiam altitudinem, puta circa decimum ſextum a baſe digitum, vaſculum vero duobus infra axem digitis ſtatui; qua ratione tubus ad ſummitatem Machinæ pertingens altitudinem habebit octodecim digitorum; quibus ex viginti ſeptem detractis, relinquuntur novem digiti, pro quantitate preſſionis quam atmoſphæra per tubum

bum in interiora follis exerit; cumque incluſus mercurius, ſecundum Papini æſtimationem, æquivaleat viginti digitorum preſſioni; fiet, additis novem ad viginti, totalis preſſio viginti novem digitorum, prævalebitque externæ, quæ tantum eſt digitorum viginti ſeptem; idcirco dilatabitur follis, reliquaque ex voto Inventoris ſuccedere debebunt. Spectet deinde baſis Machinæ deorſum; iterumque axis motus inter machinæ medium & centrum gravitatis ſtatuatur; hoc eſt, in iſto ſitu, circa vigeſimum quartum a vertice digitum; vaſculum autem duobus ſupra hunc axem digitis, ſic ut viginti duobus adhuc a vertice diſtet; quo pacto, quinque tantum atmoſphæræ digiti intra follem prement, qui, juncti viginti illis a mercurio incluſo profectis, efficiunt totalem preſſionem viginti quinque digitis, minorem externa preſſione viginti ſeptem digitorum. Unde nunc contraria ratione conſtringetur follis, quo conſtricto cætera iterum optatum ſucceſſum ex mente Inventoris, ut prius, conſequentur. Quæ cuivis attendenti manifeſta ſunt ex eo quod, in utroque machinæ ſitu, centrum gravitatis, reſpectu axis rotationis, ad eam partem reperitur, ad quam poſt dilatationem aut conſtrictionem alarum præponderare ac deprimi debet Machina, ut obtineatur rotationis viciſſitudo; quod utique depreſſionem hanc, & exinde motus perpetuitatem certo ſecuturam argueret. Unde apparet, quam largus virium hujus Machinæ æſtimator fuerit Clariſſimus Vir; e cujus calculo id futurum ſequeretur, cujus impoſſibilitas hodie, a maxime eximiis Mathematicis, tantum non pro principio aſſumi ſolet. Num. XXXIII.

Quibus allatis rationibus, Clariſſimo Adverſario omnino ſatisfactum iri ſpero. Quod ſi tamen iis locum dare adhuedum detrectet; agedum experimentis litem noſtram terminemus. Quæſtio inter nos agitata uno verbo huc redit; An, in æſtimandis viribus controverſæ Machinæ, ſolius altitudinis mercurii; an etiam latitudinis alarum, & vectis ratio haberi debeat? Si ſola mercurii altitudo ſpectanda ſit, ut arbitratur Clariſſimus Vir; tunc vires ejus in eadem altitudine perpetuo eædem erunt, & preſſionem columnæ uniformis altitudinis exæquabunt, ſive machina pyramidalis, ſive priſmaticæ ſit figuræ, & ſive baſis ſurſum,

Num. XXXIII. ſive deorſum reſpiciat. At ſi præterea etiam conſideratio vectis; & latitudinis alarum, in cenſum venire debeat, ut quidem ego ſentio; tunc vires iſtæ æquivalebunt preſſioni columnæ tantæ longitudinis, quanta eſt centri gravitatis machinæ ab ejus ſummitate diſtantia; adeoque preſſioni nunc majori, nunc minori, prout follis hujus, vel illius eſt figuræ, baſinque ſuam, vel deorſum, vel ſurſum obvertit. Itaque ſi folli cuicunque in ſummitate applicetur tubus deſcendens ad ejus medium uſque; is, juxta Dn. PAPINUM, nec dilatabitur, nec conſtringetur, ſed in perfecto erit æquilibrio cum tubo: juxta me, dilatabitur, ſi baſis deorſum ſpectet; conſtringetur, ſi ſurſum. Rurſus, ſi tubus inter centrum gravitatis & medium follis terminetur; tunc, juxta Clariſſimum Virum, baſe ſurſum ſpectante, follis dilatabitur; ſecundum me, conſtringetur: at baſe deorſum verſa, juxta illum, conſtringetur; & juxta me, dilatabitur.

Quæ cum, in folle etiam minimo & vix decem, duodecimve excedente digitos, locum invenire debeant; idcirco rei veritatem, exiguo ſumptu & labore, experiri licebit: præſertim, ſi id ſibi negotii præſcribat Celeberrimus PAPINUS, cujus dexteritas ac induſtria in experimentis inſtituendis jam dudum Orbi literato notiſſima eſt. Verbulum igitur deinceps hac de re non addam, quoad uſque Natura Judex, ad cujus nunc tribunal adverſam partem provoco, pro alterutro noſtrum ſententiam dixerit; quam ſi ſibi favituram autumet Illuſtris Adverſarius, paratum inveniet, qui contra ſe, depoſita, ſi velit, pecunia, contrarium tueatur.

N°. XXXIV.

Digitized by Google

N°. XXXIV.

POSITIONES MATHEMATICÆ DE RATIONIBUS ET PROPORTIONIBUS,

Sub Præſidio

JACOBI BERNOULLI
Mathematum Profeſſoris Publici,

Ad diem 5. Octobris M. DC. LXXXVIII.

Ad diſputandum propoſitæ.

Editæ primum
BASILEÆ,
1688.

Digitized by Google

Digitized by Google

POSITIONES MATHEMATICÆ
DE
RATIONIBUS
ET
PROPORTIONIBUS.

I.

ID quod hac vice tractandum ſuſcepimus, Eu-CLIDI Λόγος, Latine *Ratio*, dicitur; vel quod in percipiendis rerum rationibus præcipua Rationis vis appareat, vel quod in rebus ipſis Ratio vix quicquam aliud cognoſcat, quam rationes & relationes quaſdam, quas inter ſe habent. Num. XXXIV.

II.

Hoc ipſum præ' cæteris in Matheſi perſpicuum eſt: ubi nullius rei quantitatem abſolutam, ſeu, quanta ſit in ſe, cognoſcimus;

Num. XXXIV. ſed ſolummodo quam magna, vel quam parva ſit relative ad alias, inveſtigamus: unde, non ſine ratione quis a nobis factum judicabit, quod Doctrinam Rationum, quæ relationes iſtas magnitudinum explicat, & utramque in hac Scientia paginam facit, nonnullis Poſitionibus enucleatam demus.

III.

Definimus itaque *Rationem*, quod ſit affectio rerum qua ſecum invicem comparari poſſunt ſecundum quantitatem.

IV.

Comparari dicuntur duæ res *ſecundum quantitatem*, dum conſideratur, quoties una major minorve ſit altera; ſeu quoties una alteram contineat, vel in eadem contineatur.

V.

Illa vero, quæ hoc pacto inter ſe comparantur, ſunt tum *Numeri*, tum *Res numeratæ*; interque has primario *Magnitudines*; ſecundario etiam alia, quæ ex magnitudinibus cognitis, quibuſcum relationem quandam habent, æſtimantur; ut *Pondera*, *Tempora*, *Celeritates*, *Vires*, *Soni*, *Divitiæ*, *Sortes Aleatorum*, &c.

VI.

Unus enim Motus altero tanto celerior tardiorve dicitur; ut & Sonus unus alio Sono tanto gravior vel acutior; quanto linearum eodem tempore decurſarum, vel chordarum ſonos hos edentium, una altera longior, breviorque exiſtit.

VII.

Cætera quæ, vel cum nullis, vel cum incognitis magnitudinibus relationem habent, accurate comparari, ac proinde cognoſci non poſſunt; qualia ſunt, *Eruditio*, *Prudentia*, *Facundia*, *Pulchritudo*, *Agilitas*, *Colores*, *Sapores*, *Odores*, &c.

VIII.

Quanquam enim ſciamus, Hominem homine doctiorem, vel pulchriorem, Roſam roſa fragrantiorem, & Cibum cibo ſuaviorem eſſe, ſi quidem ſat magna inter utrumque diſparitas intercedat;

Digitized by Google

cedat; attamen quanto unum altero his qualitatibus antecellat, ignoramus. Idem fere dicendum de qualitatibus tactilibus, *Calore*, *Frigore*, *Humiditate*, *Siccitate*; ut maxime earum gradus, ope Thermometri & Hygrometri, quodammodo metiri didicerimus. Num. XXXIV.

IX.

Numeri quamcunque rationem exprimentes, ejus *Termini* vocantur; quorum is qui ad alium refertur, *Antecedens*, Η'γούμενος; & is ad quem refertur, *Conſequens*, Ε'πόμενος, dicitur.

X.

Si termini ſunt æquales, *Ratio æqualitatis*, Λόγος Ι'σότητος; ſi inæquales, *Inæqualitatis*: *Majoris* quidem, Πρόλογος, cum major terminus minoris eſt antecedens; at *Minoris*, Υ'πόλογος, cum ejuſdem eſt conſequens. Sic 5 ad 5, 6 ad 6, rationem habet æqualitatis; 3 ad 2 inæqualitatis majoris; 5 ad 6, minoris.

XI.

Si duarum rationum iiſdem terminis conſtantium una eſt majoris, altera minoris inæqualitatis, altera alterius *Reciproca* dicitur: Sic ratio 3 ad 2 reciproca eſt rationis 2 ad 3, & hæc illius.

XII.

Ratio æqualitatis eſt ſingularis & individua. Inæqualitatis Ratio eſt *Simplex*, vel *Multiplex*, & hæc, vel præciſe, vel non præciſe talis.

XIII.

Si major terminus minorem ſemel tantum continet, & præterea unam ejus partem aliquotam; ratio eſt *Simplex Superparticularis*, Λόγος Ε'πιμόριος; ſin plures partes aliquotas, ratio *Simplex Superpartiens*, Λόγος Ε'πιμερής.

XIV.

Si major terminus minorem aliquoties exacte continet; ratio eſt, *Multiplex*, Πολλαπλάσιος: ſi vero inſuper unam ejus partem, eſt *Multiplex Superparticularis* Πολλαπλασιεπιμόριος; ſi plures, *Multiplex Superpartiens*, Πολλαπλασιεπιμερής.

Num. XXXIV.

X V.

Omnes rationes, numero quidem explicabiles, ad unam harum ſpecierum referri poſſunt; ad quam autem quælibet referri debeat, palam facit ejus *Exponens*, qui eſt quotus reſultans ex diviſione majoris termini per minorem.

X V I.

Numerus integer hujus exponentis, ſi eſt unitas, indigitat *rationem ſimplicem*: ſi quis multitudinis numerus, *multiplicem*; puta *duplam*, ſi binarius; *triplam*, ſi ternarius; *decuplam*, ſi denarius: & ſi qua exponenti fractio adhæret, ea denotat rationem eſſe vel *Superparticularem*, vel *Superpartientem*: Superparticularem, cum fractionis numerator eſt unitas; Superpartientem, cum eſt numerus aliquis multitudinis.

X V I I.

Superparticularis ratio ſpecialem ſuam nomenclationem accipit a denominatore fractionis, præfixa vocula *ſeſqui*; ut *ſeſqui altera*, *ſeſqui-tertia*, *ſeſqui-quarta*, &c. Superpartiens ab utroque fractionis termino, ut *Superpartiens duas tertias*, *tres quartas*, &c. quæ & ita efferuntur, *Superbipartiens tertias*, *Supertripartiens quartas*, &c.

XVIII.

Exemplis res fiet clarior. Ratio 6 ad 3, vocatur *dupla*, quia $6:3=2$. Ratio 12 ad 4, *tripla*, quia $12:4=3$. Ratio 3 ad 2, *ſeſqui-altera*, quia $3:2=1\frac{1}{2}$. Ratio 5 ad 4, *ſeſquiquarta*, quia $5:4=1\frac{1}{4}$. Ratio 19 ad 7, *dupla ſuperquintupartiens ſeptimas*, quia $19:7=2\frac{5}{7}$.

X I X.

Si fractio exponenti adhærens numeris compoſitis conſtet, quod fit quotieſcunque ipſi rationum termini inter ſe compoſiti fuerint; tunc prius reducenda eſt ad terminos ſimpliciſſimos: alias ratio videri poſſet ſuperpartiens, quæ non niſi eſt ſuperparticularis: ſic ratio 6 ad 4, non dicenda eſt ſuperbipartiens quartas, ut maxime $6:4=1\frac{2}{4}$; ſed ſeſqui-altera, quia $\frac{2}{4}$ æquipollent $\frac{1}{2}$.

XX. Ratio-

XX.

Rationes minoris inæqualitatis eodem pacto exprimuntur, quo earum reciprocæ, præmiſſa, diſcriminis ergo, ſyllaba *Sub*: ut *Ratio* 3 ad 6 eſt *ſubdupla*: 4 ad 12 *ſubtripla*: 2 ad 3 *ſubſeſquialtera*: 4 ad 5 *ſubſeſquiquarta*: 7 ad 19, *ſubdupla ſubſuperquintupartiens ſeptimas.* Num. XXXIV.

XXI.

Sciendum tamen, barbara iſta Veterum vocabula obſoleta fere nunc eſſe, & modernos Mathematicos rationem quamlibet frequentius ipſis terminis innuere: Malunt enim ex. gr. dicere, circumferentiam Circuli ad diametrum ſe habere in ratione 22 ad 7, aut 223 ad 71, quam in ratione tripla ſeſquiſeptima, vel tripla ſuperdecupartiente ſeptuageſimas primas.

XXII.

Si duæ Rationes inæquales comparantur invicem; illa dicitur *Major*, cujus antecedens ſæpius continet ſuum conſequentem, vel majorem conſequentis partem: Idcirco Ratio majoris inæqualitatis major eſt quavis Ratione minoris inæqualitatis: duarum vero Rationum majoris inæqualitatis, illa major eſt, quæ majorem ſortitur exponentem; at duarum minoris inæqualitatis illa major, quæ minorem.

XXIII.

Hinc inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem habet rationem, quam minor: ſed eadem ad minorem majorem rationem habet, quam ad majorem. Ex. gr. 8 ad 3 majorem habet rationem, quam 7 ad 3: Contra 3 ad 7 majorem habet rationem, quam 3 ad 8.

XXIV.

Si rationes æquales invicem comparantur, exiſtit *Proportio*, quæ proinde nihil aliud eſt, quam rationum æqualitas, & denotatur ita ::, ut A B :: C. D; quo ſignificatur, A ad B eandem habere rationem, quam habet C ad D; ſeu quantitates A, B, C, D proportionales eſſe.

Num. XXXIV.

X X V.

De Proportionalibus hæc capiantur Theoremata : Si termini rationis cujuſcunque , per communem aliquem numerum , ſeu multiplicentur , ſeu dividantur ; habebunt producti , vel quoti, eandem cum illis rationem. Sic *6* ad 4 eandem habet rationem, quam bis *6* ad bis 4, ter *6* ad ter 4, dimidium *6* ad dimidium 4, &c.

XXVI.

Quatuor proportionalium prima ducta in ultimam , idem efficit, atque ſecunda in tertiam ; quæ proprietas Regulæ Aureæ fundamentum exiſtit.

XXVII.

Si totum ad totum, ut ablatum ad ablatum ; erit etiam reliquum ad reliquum, ut totum ad totum : hoc eſt, Si A. B : : C. D. erit etiam A — C. B — D : : A. B.

XXVIII.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint A. B : : C. D : : E. F : : G. H, &c. erit ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita omnes antecedentes ſimul ad omnes conſequentes, id eſt, erit A. B : : A + C + E + G. B + D + F + H.

XXIX.

Si A. B : : C. D, erit *invertendo* B. A : : D. C ; *permutando* A. C : : B. D ; *componendo* A + B. B : : C + D. D ; *dividendo* A — B. B : : C — D. D ; *convertendo* A. A — B : : C. C — D; *ſumendo antecedentium dupla* 2 A. B : : 2 C. D.

X X X.

Si quotcunque magnitudines A. B. C. D. fuerint ab una parte, totidemque ab altera E. F. G. H ; ſitque A. B : : E. F, & B. C : : F. G, & C. D : : G. H, erit *ex æquo ordinate* A. D : : E. H. Sin vero A. B : : G. H, & B. C : : F. G, & C. D : : E. F, erit *ex æqualitate perturbata* A. D : : E. H.

Atque hi, præter nonnullos alios, ſunt modi illi argumentandi, quos Geometræ, in Propoſitionum maxime perplexarum demonſtra-

Digitized by Google

monſtrationibus, ingenioſe admodum & magno legentium emolumento adhibent. Num. XXXIV.

XXXI.

Si duæ Rationes ſint æquales, & conſequens primæ conveniat cum antecedente ſecundæ, *Proportio continua* dicitur. Hæc, ſi per terminos plures continuetur, *Progreſſio* vocatur; quæ vel *Aſcendens* eſt, ſi ratio per quam progreditur, eſt minoris inæqualitatis, ut 1. 3. 9. 27. &c. vel *Deſcendens*, ſi majoris, ut 8. 4. 2. 1.

XXXII.

Omnis Progreſſio continuari poteſt per infinitos terminos: deſcendendo tamen, nulla poteſt per terminos integros continuari; aſcendendo poteſt, ſi ratio per quam continuatur, ſit exacte multiplex.

XXXIII.

Dato primo, ſecundo, & ultimo Progreſſionis cujuſcunque termino, Summa omnium ita invenitur: Primus terminus ducatur in differentiam primi & ultimi; Productum dividatur per differentiam primi & ſecundi; Quoto addatur ultimus, & habebitur Progreſſionis Summa.

XXXIV.

Quoniam in Progreſſione deſcendente infinitorum terminorum, poſtremus terminus perpetuo o eſt; idcirco duntaxat quadratum primi per differentiam primi & ſecundi dividendum: Quæ inſuper differentia ſi ſit unitas; ipſum ſtatim quadratum primi Summam prodit.

XXXV.

Patet hinc, qua ratione infinitæ numero magnitudines finitam ſummam conſtituere poſſunt; quod ignaris forte mirum videbitur, quanquam ſit veriſſimum. Ita, ſi quis facturus iter 100 milliarium, primo die conficeret milliaria 10, ſecundo 9, tertio $8\frac{1}{10}$, & ſic, quolibet ſequentium dierum, itineris præcedentis diei $\frac{9}{10}$ partes, ac per totam æternitatem iter faceret, nunquam 100 milliaria abſolveret.

XXXVI. Si

Num. XXXIV.

XXXVI.

Si quotcunque rationes proponantur, productum omnium antecedentium ad productum omnium conſequentium habere dicitur *Rationem compoſitam* ex rationibus propoſitis.

XXXVII.

Hinc datis quotcunque magnitudinibus, Ratio primæ ad ultimam *compoſita* cenſetur ex Ratione primæ ad ſecundam, ſecundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, & ſic porro uſque ad ultimam.

XXXVIII.

Omnia Triangula, Parallelogramma, Pyramides, Priſmata, Coni, Cylindri, rationem habent ex rationibus baſium & altitudinum compoſitam.

XXXIX.

Si duæ rationes æquales componantur; Compoſita, alterutrius componentium *Duplicata* dicitur; ſi tres, *Triplicata*; ſi quatuor, *Quadruplicata*; & viciſſim una componentium, compoſitæ *ſubduplicata*, *ſubtriplicata*, *ſubquadruplicata*. E quibus patet immane diſcrimen eſſe inter Rationem duplam & duplicatam, *Λόγον διπλάσιον*, *καὶ διπλασίονα*; adeoque perperam a nonnullis, quos inter MEIBOMIUS in *Dial. de Proportionibus*, confundi.

XL.

Infertur hinc, Quadrata habere rationem duplicatam, Cubos triplicatam laterum ſuorum. Et ſi quantitates aliquot continue proportionales ſint, Rationem primæ ad tertiam eſſe duplicatam, primæ ad quartam triplicatam, primæ ad quintam quadruplicatam rationis ejus, quam prima habet ad ſecundam.

XLI.

Similes ſuperficies duplicatam, ſimilia ſolida triplicatam habent rationem laterum homologorum. Intellige hæc etiam de Circulis ac Sphæris.

XLII. Cæte-

Digitized by Google

XLII.

Num. XXXIV.

Cæterum animadvertimus, ARCHIMEDEM, *Lib. 2. De Sphæra & Cyl. Prop. 9.* ipſas rationes compoſitas denuo inter ſe comparare, dum Rationem triplicatam rationis alicujus ejuſdem duplicatæ *ſeſquialteram* * vocat, unde Ratio quaſi *decompoſita* exſurgit.

XLIII.

Si ratio quæcunque addita rationi æqualitatis componat aliquam; Compoſita non differt a Componente. Hinc eſt, quod Triangula, Parallelogramma, Pyramides, Priſmata, Coni, Cylindri, & quæcunque Figuræ ex rationibus baſium & altitudinum componuntur, in baſibus æqualibus ſe habeant ut altitudines, & in altitudinibus æqualibus, ut baſes. Item, quod momenta ponderum æqualium ſe habeant ut diſtantiæ ab axe motus; & vice verſa momenta æqualiter diſtantium, ut pondera.

XLIV.

Si duæ rationes reciprocæ componantur; exſurgit ratio æqualitatis: Hinc recenſitæ figuræ ſunt æquales, quotieſcunque ipſarum baſes & altitudines reciprocantur; & momenta ſunt æqualia, quotieſcunque pondera ſe habent in ratione reciproca diſtantiarum.

XLV.

Explicata Rationum doctrina; verbo adhuc indicandum eſt, quænam ſint illa, quæ inter ſe rationem habere poſſunt, vel non poſſunt. Rationem non ſuſcipiunt heterogenea; ſic Pondus ad Tempus, Sonus ad Colorem, Linea ad Superficiem, rationem nullam habet. Nihilominus, quia, in Arithmetica Infinitorum, linea, ut pars infiniteſima corporis concipitur; poteſt ejus ad ſuperficiem *Ratio* dici *infinite exigua.*

XLVI.

Finitum quoque ad infinitum, licet homogeneum, linea finita ad infinitam, rationem nullam, vel, ſi dicere mavis, infinite exiguam habet.

* Recentiores *Seſquiplicatam* dicere malunt.

Digitized by Google

Num. XXXIV.

XLVII.

Magnitudines homogeneæ finitæ ſunt, vel Rationales, ῥηταὶ, quæ numero integro, fracto, aut miſto exprimi poſſunt, vel Irrationales, ἄλογαι; quæ non poſſunt. (Obiter notamus URSTISIUM, qui Cap. 3. Arith. miſtos numeros abſurde ſurdis accenſet.) Omnes magnitudines rationales; quia ſunt commenſurabiles, hoc eſt, quia menſuram aliquam communem admittunt, rationem habent numero explicabilem. Inter rationalem & irrationalem contra, quamvis ratio ſit, hæc tamen, ob aſymmetriam earum, numero explicari nequit. Sic Ratio inter latus quadrati & diagonium ejus, vel inter 1 & $\sqrt{2}$, nullo numero exprimi poteſt. Inter duas irrationales ratio plerumque quidem numero eſt inexplicabilis, velut inter $\sqrt{2}$ & $\sqrt{7}$: quandoque tamen numero comprehendi poteſt, ſic $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{8}$ rationem habet exacte ſubduplam, eam videlicet quam habet 1 ad 2.

XLVIII.

Quin etiam nulla datur earum, quæ numero exprimi poſſunt, quæ non etiam in irrationabilibus locum inveniat: & hoc omnium forte in Geometria admirabiliſſimum, quod dentur tales quantitates; quæ, ſeorſim quidem acceptæ, nullo numero intelligibili exprimuntur, inter ſe tamen collatæ rationem habent exacte cognitam & numero determinatam.

XLIX.

Imo, ipſi quoque infinito hæc quodammodo accommodari poſſunt. Quemadmodum enim rationale ad irrationale nullam habere poteſt rationem numero determinabilem; poteſt tamen unum irrationale ad aliud irrationale: Sic quamvis finitum inter & infinitum nulla ratio ſit; ea tamen inter duo infinita obtinere poteſt: quandoquidem unum infinitum alterius infiniti concipere poſſum duplum, triplum, decuplum, centuplum, millecuplum, infinitecuplum, infinities infinitecuplum. Finge Cubo ad latus meridionale apponi alium æqualem Cubum, huic alium, huic iterum alium, & alium ſine fine; qua ratione naſcetur Parallelepi-

lepipedum oblongum, quod bis, ter, quater, & tandem infinities majus fiet Cubo propoſito: Huic, a plaga meridionali interminato, verſus orientem adjice ſecundum, tertium, quartum, uſque ad infinitum: quod inde conflabitur ab ortu & meridie interminatum corpus, infinities ſuperabit Parallelepipedum; adeoque infinities infinitis vicibus Cubum. Idem præſta verſus occidentem, & producetur corpus bis infinities infinitecuplo majus Cubo; cui ſi ex parte ſeptentrionali ſimile adjeceris, habebis diſcum verſus omnes horizontis plagas infinite extenſum, qui Cubum quater infinities infinitis vicibus ſuperabit. Huic diſco ſi infinitos alios æque craſſos ſubſternas, totidemque ſuperſtruas, corpus habebis, quod omne conceptibile ſpatium replebit, eritque octies infinities-infinities-infinities majus Cubo. Deinde quia hedra eſt pars infiniteſima Cubi; & Cubi latus pars infiniteſima hedræ; & punctum lateris: Idcirco immenſa illa moles, quæ Cubum octies inf. inf. infinities vicibus ſuperat, ſuperabit punctum 8 inf. inf. inf. inf. inf. infinitis vicibus. Sic ut ſecundum hunc conceptum, dicendum quod Corpus in omnes mundi plagas conceptibiles infinite extenſum habeat ad atomum rationem octies inf. inf. inf. inf. infinities infinitecuplam. Num. XXXIV.

L.

Quanquam vero iſthæc inſanientium deliriis non abſimilia pleriſque videbuntur; nihilominus vix aliter ſe exprimere poterit ſana mens, quæ, ſecundum conceptus a Deo ſibi inditos, loqui volet. Fateor multis contradictionibus involuta eſſe; forte propterea, quia finito intellectui infiniti comprehenſio impoſſibilis; forte etiam, quia nihil eſt, nec eſſe poteſt, extra mentem noſtram, quod his conceptibus reſpondeat. DEUS ſolus eſt is, quem ſcimus & actu eſſe, & infinitum eſſe, ad quem cætera omnia, quantacunque ſunt, ne umbram quidem rationis habent. In hujus cognitione ſumma Sapientia, in fruitione ſumma Salus. Hoc qui potitur, habet omnia; etiamſi nihil haberet: qui caret, nihil habet; tametſi infinitorum mundorum opes poſſideret.

Digitized by Google

Digitized by Google

N°. XXXV.

POSITIONES ARITHMETICÆ DE SERIEBUS INFINITIS,

Earumque

SUMMA FINITA.

Quas

Auctore Præſide

JACOBO BERNOULLI Math. Pr. P.

defendit

JOH. JAC. FRITZIUS, Baſil.

Ad diem 7. Junii M. DC. LXXXIX.

Editæ primum

BASILEÆ.

1689.

Digitized by Google

AD DN. RESPONDENTEM
PRÆSES.

Ut non finitam ſeriem finita coercet
  Summula, & in nullo limite limes adeſt:
Sic modico immenſi veſtigia Numinis hærent
  Corpore, & anguſto limite limes abeſt.
Cernere in immenſo parvum, dic, quanta voluptas!
  In parvo immenſum cernere, quanta, Deum!

Digitized by Google

POSITIONES ARITHMETICÆ DE SERIEBUS INFINITIS.

PRÆFATIO.

C*UM non ita pridem in* Serierum Infinitarum *ſpeculationem incidiſſem, prima cujus ſumma, poſt geometricam Progreſſionem ab aliis jam tractatam, mihi ſeſe offerebat, erat Series fractionum, quarum denominatores geometrica, numeratores arithmetica progreſſione creſcunt: quod cum Fratri indicaſſem, non tantum mox idem adinvenit ille, ſed & præterea nova cujuſdam fractionum Seriei, cujus denominatores Trigonalium, ut vocantur, numerorum dupli erant, ſummam perveſtigavit; quam vero & ipſe, cum*

Digitized by Google

cum ſignificaſſet, poſtridie detexi; propoſitis ei viciſſim aliis nonnullis, quæ interea, ut clavus clavum trudere ſolet, occaſione hac repereram. Quibus inventis certatim alter alterum ſic exercuimus, ut paucorum dierum ſpatio non tantum ſerierum illarum, quas Celeb. LEIBNITIUS *in* Actis Erud. Lipſ. Anno 1682. M. Febr. *&* 1683. M. Octob. *recenſet, noſque paulo antea mirati fuimus, ſummas dare poſſemus, ſed & plura alia, eaque non contemnenda, ex gemino duntaxat fundamento invenerimus, quorum unum conſiſtit in reſolutione Seriei in alias infinitas Series, alterum in ſubductione Seriei, uno alterove termino mutilatæ, a ſeipſa integra. Horum vero præcipua [cum eorum nihil apud hos, quos legi hactenus, publicatum viderim] enucleanda proponam, præmiſſis nonnullis, quæ paſſim apud alios quoque vulgatæ proſtant, Propoſitionibus, ne illas aliunde petere opus eſſet. Cæterum quantæ ſit neceſſitatis pariter & utilitatis hæc Serierum contemplatio, ei ſane ignotum eſſe non poterit, qui perſpectum habuerit, ejuſmodi Series ſacram quaſi eſſe anchoram, ad quam in maxime arduis & deſperatæ ſolutionis Problematibus, ubi omnes alias humani ingenii vires naufragium paſſæ, velut ultimi remedii loco, confugiendum eſt.*

AXIO-

AXIOMATA
ſeu
POSTULATA.

I.

OMNE quantum eſt diviſibile in partes ſe minores. N. XXXV.

II.

Omni quantitate finita poteſt accipi major.

III.

Si quantitas quæpiam multata parte ſui aliqua ſubtrahitur a ſeipſa integra, relinquitur illa pars.

PROPOSITIONES.

I.

Quod data quavis quantitate minus eſt, illud eſt non-quantum ſeu nihil.

Dem. Nam ſi quantum eſſet, dividi poſſet in partes ſe minores, per Axiom. 1. Non igitur eſſet data quavis quantitate minus, contra hypotheſin.

II.

Quod data quavis quantitate majus eſt, infinitum eſt.

Nam ſi finitum eſſet, illo poſſet accipi quantitas major, per Ax. 2. Non igitur quavis data quantitate foret majus, contra hypotheſin.

Digitized by Google

N.XXXV

III.

Omnis Progreſſio geometrica continuari poteſt per terminos infinitos.
Semper enim fieri poteſt: Ut primus terminus ad ſecundum, ſic poſtremus ad ſequentem, & ſequens ad alium, & alium ſine fine in infinitum; quorum quidem terminorum nullus æquari poteſt vel nihilo, vel infinito, cum ſecus ad illum præcedens eam rationem habere non poſſet, quam habet primus ad ſecundum, contra definitionem progreſſionis.

IV.

Si ſit Progreſſio geometrica quacunque A, B, C, D, E; *& alia arithmetica totidem terminorum* A, B, F, G, H, *incipiens ab iiſdem terminis* A *&* B, *erunt reliquorum ſinguli in geometrica ſingulis ordine ſibi reſpondentibus in arithmetica majores, tertius tertio, quartus quarto, ultimus ultimo, adeoque omnes omnibus.*

Quia enim $A : B = B : C = C : D = D : E$. erit per 25. 5. Eucl. tum $A + C > 2B =$ (ex nat. Progr. arith.) $A + F$; unde $C > F$: tum $A + D > B + C > B + F = A + G$; unde $D > G$: tum $A + E > B + D > B + G = A + H$; unde $E > H$. *Quæ erant demonſtranda.*

V.

In Progreſſione geometrica creſcente A, B, C, D, E, *perveniri tandem poteſt ad terminum* E *quovis dato* Z *majorem.*

Incipiat ab iiſdem terminis Progreſſio arithm. A, B, F, G, H, continuata quouſque ultimus H ſuperet Z [id enim fieri poſſe claret,] tum vero continuetur geometrica per terminos totidem, eritque, per præced. poſtremus $E > H > Z$. Q. E. D.

Coroll. Hinc in Progr. geom. creſcente infinitorum terminorum poſtremus terminus eſt ∞, per Prop. II. [∞ eſt Nota Infiniti.]

VI.

In Progreſſ. geometrica decreſcente A, B, C, D, E, *pervenitur tandem ad terminum* E *quovis dato* Z *minorem.*

Conſtituatur Progreſſio aſcendens Z, T, X, V, T, in ratione B ad

B ad *A*, quouſque ultimus terminus *T* ſuperet *A*, [quod fieri poſſe, per præced. conſtat;] tum continuetur altera deſcendendo per totidem terminos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*; eritque ultimus $E < $ dato *Z*. Quia enim Progreſſiones *A*, *B*, *C*, *D*, *E*; & *T*, *V*, *X*, *Y*, *Z*, per eandem rationem *A* ad *B* progrediuntur, & terminos numero æquales habent, erit *ex æquo* $A : E = T : Z$. ſed $A < T$, per conſtr. Ergo & $E < Z$. Q. E. D. N.XXXV.

COROLL. Hinc in Progr. geomet. decreſcente in infinitum continuata, ultimus terminus eſt o, per Prop. I.

VII.

In omni Progr. geom. A, B, C, D, E, *primus terminus eſt ad ſecundum, ſicut ſumma omnium, excepto ultimo, ad ſummam omnium, excepto primo.* [$A : B = A + B + C + D : B + C + D + E$.]

Quia enim $A : B = B : C = C : D = D : E$. erit per 12. 5. EUCL. $A : B = A + B + C + D : B + C + D + E$. Q. E. D.

VIII.

Progreſſionis geom. cujuſcunque A, B, C, D, E, *ſummam* S *invenire.*

Per præc. eſt $A : B = S - E : S - A$; quare convertendo $A : A \backsim B = S - E : A \backsim E$; unde $S - E = A \times (A \backsim E) : (A \backsim B)$, & $S = A \times (A \backsim E)$; $(A \backsim B) + E$. ($\backsim$ denotat differentiam duarum quantitatum, quibus interſeritur, cum non definitur, penes utram ſit exceſſus.)

COROLL. Si Progreſſio geometr. deſcendendo continuetur in infinitum, adeoque ultimus terminus per Coroll. VI. evaneſcat, erit ſumma omnium $Aq : (A - B)$; unde liquet, quo pacto infiniti etiam termini finitam ſummam conſtituere poſſunt.

IX.

Si Series infinita continue proportionalium A, B, C, D, E, *&c. decreſcat in ratione* A *ad* B, *erunt ſummæ omnium terminorum, omnium demto primo, omnium demtis duobus primis, &c. etiam continue proportionales, & quidem in eadem ratione* A *ad* B.

 Quo-

Digitized by Google

N.XXXV Quoniam $A : B = B : C = C : D$, erit tum $Aq : Bq = Bq : Cq$; tum etiam $A : B = A - B : B - C = B - C : C - D$, quare dividendo rationes æquales per æquales, $\frac{Aq}{A - B}$: $\frac{Bq}{B - C} = \frac{Bq}{B - C} : \frac{Cq}{C - D}$, hoc eſt, per Cor. præced., Summa omnium ad omnes ſequentes primum, ut hi ad omnes ſequentes ſecundum. Q. E. D. Et proinde per 19. 5. Eucl. ſumma omnium ad omnes ſequentes primum, ut primus ad ſecundum. Q. E. D.

X.

Seriei infinitæ fractionum, $a : b$, $(a + c) : (b + d)$, $(a + 2c) : (b + 2d)$, $(a + 3c) : (b + 3d)$, &c. *quarum numeratores & denominatores creſcunt Progreſſione arithmet. ultimus terminus eſt fractio* $c : d$, *cujus numerator & denominator ſunt communes progreſſionum differentiæ.*

Ad hoc analytice inveſtigandum, conſideretur quæſitus terminus ut cognitus, & vocetur t; numerus vero termini ut quæſitus, & dicatur n; eritque ex generatione progreſſionis terminus optatus $t = (a + nc - c) : (b + nd - d)$, ideoque $n = 1 + (bt - a) : (c - dt)$, quod æquari debet infinito: & quia numerator hujus fractionis eſt finitus [nam infinitus eſſe non poteſt, alias t deberet eſſe $= \infty$; ideoque eſſet $c - dt$, ipſaque adeo fractio negativa quantitas, quod abſurdum,] oportet ut denominator ſit æqualis nihilo, ac proinde $c = dt$, & $t = c : d$. Q. E. D.

Brevius ita: Ex ſeriei geneſi patet, terminum infiniteſimum eſſe $(a + \infty c) : (b + \infty d) = \infty c : \infty d = c : d$. Q. E. D.

Coroll. Summa omnium terminorum, ſive ultimus primo major ſit, minorve, neceſſario infinita eſt; infiniti enim termini minori horum duorum æquales infinitam dant ſummam: Unde a fortiori, &c.

XI. *Fractio-*

Digitized by Google

XI.

Fractionis ad aliam ratio compoſita eſt ex ratione directa numeratorum & reciproca denominatorum.

Nam $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{AD}{BD} : \frac{BC}{BD} :: AD : BC = A : C + D : B$. Q. E. D.

XII.

In ſerie fractionum, quarum numeratores creſcunt Progreſſione arithmetica, denominatores geometrica, aut vice verſa, ut A : F, (A+C) : G, (A+2 C) : H, (A+3 C) : I, *aut* F : A, G : (A+C), H : (A+2 C), I : (A+3 C); *Si* N *nomen ordinis ultimi termini ad unitatem majorem rationem habeat, quam* G *ad* G — F, *erit ille terminus ibi ſequenti major, hic minor.*

1. *Hyp.* Quia $N : 1 > G : G - F$, erit convertendo $N : N - 1 < G : F$; & $CN : CN - C < G : F$. Ergo $(CN - C) \times G > CN \times F$; ergo fortius [ob $AG > AF$] $(A + NC - C) \times G > (A + CN) \times F$, hoc eſt, Numerator termini N in $G >$ Numeratore termini ſequentis in F: Sed ita ſe habet terminus N ad terminum ſequentem, per præced. Quare terminus N major ſequenti, & ita deinceps ab illo omnes. Q. E. D.

2. *Hyp.* Inverſis invertendis eodem modo demonſtratur.

XIII.

Si infinitæ ſint fractiones $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}, \frac{E}{F}, \frac{G}{H}, \frac{I}{L}, \frac{M}{N}, \frac{O}{P}$. *&c. quarum numeratores creſcant progr. arithm. & denominatores geom. erit ultimus terminus* 0; *ſin illi creſcant geometr. hi arithm., erit ultimus* ∞.

1. *Hyp.* Si primus terminus ſecundo non ſit major, continuari ſaltem poterit Progreſſio, quouſque præcedens ſuperet ſequentem, per præced. Eſto $G : H > I : L$, & ſint infiniti continue proportionales G, I, Q, R, &c. unde propter H, L, N, P, continue proport. erunt & ipſæ fractiones $\frac{G}{H}, \frac{I}{L}, \frac{Q}{N}, \frac{R}{P}$ &c.

N.XXXV continue proport. quæ ob $G : H > I : L$, in nihilum tandem abeunt per Cor. VI. Quare cum $Q > M$, $R > O$, &c. per IV. multo magis $\frac{G}{H}$, $\frac{I}{L}$, $\frac{M}{N}$, $\frac{O}{P}$, *&c.* in nihilum abibunt. Q. E. D.

2. *Hyp.* Niſi primus ſecundo minor ſit, continuetur progreſſio, quouſque præcedens ſequenti minor fiat, per præced. Eſto $G : H < I : L$, & ſint infiniti H, L, S, T, &c. contin. proport. unde propter G, I, M, O, &c. contin. proport. & ipſæ fractiones $\frac{G}{H}$, $\frac{I}{L}$, $\frac{M}{S}$, $\frac{O}{T}$, &c. proportionales erunt, quæ ob $G : H < I : L$ in infinitum deſinunt per Cor. V. Quare cum $S > N$, $T > P$, &c. per IV. multo magis $\frac{G}{H}$, $\frac{I}{L}$, $\frac{M}{N}$, $\frac{O}{P}$, &c. in infinitum excreſcent. Q. E. D.

XIV.

Invenire ſummam Seriei infinitæ fractionum, quarum denominatores creſcunt progreſſione geometrica quacunque, numeratores vero progrediuntur, vel juxta numeros naturales 1, 2, 3, 4, &c. vel trigonales 1, 3, 6, 10, &c. vel pyramidales 1, 4, 10, 20, &c. aut juxta quadratos 1, 4, 9, 16, &c. aut cubos 1, 8, 27, 64, &c. eorumve æquemultiplices.

1. *Si Numeratores progrediuntur juxta numeros naturales:*

Summa invenitur, reſolvendo ſeriem propoſitam A in alias infinitas ſeries B, C, D, E, &c. quæ ſingulæ geometrice progrediuntur, quarumque ſummæ [ſi primam hic excipias] novam geometricam progreſſionem F conſtituunt per IX. cujus quidem, uti cæterarum, ſumma per Coroll. VIII. reperitur. En operationem :

A =

N.XXXV.

$$A = \frac{a}{b} + \frac{a+c}{bd} + \frac{a+2c}{bdd} + \frac{a+3c}{bd^3} \text{ \&c.} = B + C + D + E + \text{\&c.}$$

$$B = \frac{a}{b} + \frac{a}{bd} + \frac{a}{bdd} + \frac{a}{bd^3} \text{ \&c.} = \frac{ad}{bd-b}$$

$$C = \cdot + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \text{ \&c.} = \frac{c}{bd-b}$$

$$D = \cdot\ \cdot\ \cdot + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \text{ \&c.} = \frac{c}{bdd-bd}$$

$$E = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot + \frac{c}{bd^3} \text{ \&c.} = \frac{c}{bd^3-bdd}$$

$$\text{\&c.} = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \text{ \&c.} = \text{\&c.}$$

$F = cd : b\,(d-1)^2$ cui additus primus terminus $ad : b\,(d-1)$ producit totius propoſitæ ſeriei A ſummam $= ad : b\,(d-1) + cd : b\,(d-1)^2$.

2. *Si Numeratores ſunt juxta Trigonales:*

Series propoſita G reſolvenda eſt in aliam H, cujus numeratores ſint juxta præcedentem hypotheſin, hoc modo:

$$G = \frac{c}{b} + \frac{3c}{bd} + \frac{6c}{bdd} + \frac{10c}{bd^3} \text{ \&c.}$$

$$\frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \text{ \&c.} = \frac{cd}{bd-b}$$

$$+ \frac{2c}{bd} + \frac{2c}{bdd} + \frac{2c}{bd^3} \text{ \&c.} = \frac{2c}{bd-b}$$

$$+ \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3} \text{ \&c.} = \frac{3c}{bdd-bd}$$

$$+ \frac{4c}{bd^3} \text{ \&c.} = \frac{4c}{bd^3-bdd}$$

$$\text{\&c.} = \text{\&c.}$$

$H = cd^3 : b\,(d-1)^3$ quandoquidem hæc ſeries ad præced. $\frac{c}{bd} + \frac{2c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3}$ &c. $= cd : b\,(d-1)^2$. ſe habeat ut dd ad $d-1$.

3. *Si Numeratores ſunt juxta Pyramidales:*

Series reſolvitur in aliam, cujus numeratores progrediuntur juxta Trigonales, quæque ad præcedentem ſeriem ſe habet, ut d ad $d-1$; unde ſumma ejus invenitur $= cd^4 : b\,(d-1)^4$.

Gene-

N.XXXV Generaliter, ſi propoſitæ ſeriei numeratores ſint juxta figuratos cujuſlibet gradus, ejus ſumma ſe habebit ad ſummam ſimilis ſeriei gradus præcedentis, ut d ad $d - 1$: unde reliquarum omnium ſummam invenire proclive admodum eſt.

4. *Si Numeratores ſunt juxta Quadratos:*

Series L reſolvitur in aliam M, cujus numeratores ſunt arithmetice progreſſionales, adeoque juxta primam hypotheſin:

$$L = \frac{c}{b} + \frac{4c}{bd} + \frac{9c}{bdd} + \frac{16c}{bd^3} \text{ \&c.}$$

$$\left.\begin{array}{r} \frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \text{ \&c.} = \frac{cd}{bd-b} \\ + \frac{3c}{bd} + \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3} \text{ \&c.} = \frac{3c}{bd-b} \\ + \frac{5c}{bdd} + \frac{5c}{bd^3} \text{ \&c.} = \frac{5c}{bdd-bd} \\ + \frac{7c}{bd^3} \text{ \&c.} = \frac{7c}{bd^3-bdd} \\ \text{\&c.} = \text{\&c.} \end{array}\right\} \begin{array}{l} M = cdd : b(d-1)^2 \\ + 2cdd : b(d-1)^3 \\ = (cd^3 + cdd) : b \\ (d-1)^3. \end{array}$$

5. *Si Numeratores ſunt juxta Cubos:*

Series reſolvitur in aliam, cujus numeratores ſunt Trigonalium ſextupli unitate aucti; unde ejus ſumma juxta ſecundam hypotheſin invenitur $cdd : b(d-1)^2 + 6cd^3 : b(d-1)^4 = (cd^4 + 4cd^3 + cdd) : b(d-1)^4$. Exempli loco ſint ſeries ſequentes, Numeratorum

Naturalium	$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32}$	&c. $= 2$
Trigonalium	$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{6}{8} + \frac{10}{16} + \frac{15}{32}$	&c. $= 4$
Pyramidalium	$\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{10}{8} + \frac{20}{16} + \frac{35}{32}$	&c. $= 8$
Quadratorum	$\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32}$	&c. $= 6$
Cuborum . .	$\frac{1}{2} + \frac{8}{4} + \frac{27}{8} + \frac{64}{16} + \frac{125}{32}$	&c. $= 26$

COROLL.

Coroll. Patet, in omnibus hujuſmodi ſeriebus poſtremos terminos in nihilum deſinere, & evaneſcere debere (quod ipſum jam præced. Propoſ. de earum una ex abundanti oſtendimus;) cum alias illarum ſummæ finitæ eſſe non poſſent. (a) N.XXXV

XV. *In-*

(a) Vix poteſt ſatis dici quantopere placuerit Mathematicis Tractatio Serierum infinitarum, poſtquam Auctor noſter argumentum iſtud, hac Diſſertatione & ſequentibus N. LIV. LXXIV. XC. CI. illuſtravit. Videantur quæ de hiſce ſcripſerunt Montmortius, Taylorus, Moivræus, Stirlingius, Nicole, *Nicolaus* Bernoulli, aliique plures. Ingenioſam methodum, qua in hac Propoſitione utitur noſter, extendere licet 1°. ad omnes ſeries fractionum, quarum denominatores creſcunt progreſſione geometrica, numeratores progrediuntur juxta numeros quoſvis figuratos.

Sic [poſito facilioris ſcriptionis gratia $1 : d = e$]

Series $1 + 1e + 1e^2 + 1e^3 +$ &c. $= 1 : (1 - e) = d : (d - 1)$
Series $1 + 2e + 3e^2 + 4e^3 +$ &c. $= 1 : (1 - e)^2 = d^2 : (d - 1)^2$
Series $1 + 3e + 6e^2 + 10e^3 +$ &c. $= 1 : (1 - e)^3 = d^3 : (d - 1)^3$
Series $1 + 4e + 10e^2 + 20e^3 +$ &c. $= 1 : (1 - e)^4 = d^4 : (d - 1)^4$
Series $1 + 5e + 15e^2 + 35e^3 +$ &c. $= 1 : (1 - e)^5 = d^5 : (d - 1)^3$

& ita porro.

2°. Extenditur hæc methodus ad ſeries omnes fractionum, quarum denominatoribus exiſtentibus in progreſſione geometrica, numeratores conſtituunt ſeriem terminorum quorum differentiæ, vel primæ, vel ſecundæ, id eſt, differentiarum differentiæ, vel tertiæ, hoc eſt, differentiarum ſecundarum differentiæ, vel quartæ, vel quintæ, vel qualeſcunque differentiæ dant tandem ſeriem magnitudinum æqualium, adeo ut, differentiæ ulteriores evaneſcant. Etenim ſi primus terminus ſeriei numeratorum ſit a, prima differentiarum primarum ſit b, prima ſecundarum, c; tertiarum, f; quartarum, g; quintarum h, &c. Series ipſa erit (I) $ae + (a + b) e^2 + (a + 2b + c) e^3 + (a + 3b + 3c + f) e^4 + (a + 4b + 6c + 4f + g) e^5 + (a + 5b + 10c + 10f + 5g + h) e^6 +$ &c. quæ, Methodo Auctoris reſolvitur in ſequentes

$$\left.\begin{array}{l} ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + ae^5 \text{ \&c.} = ae : (1 - e) \\ \quad + be^2 + 2be^3 + 3be^4 + 4be^5 \text{ \&c.} = be^2 : (1 - e)^2 \\ \qquad + ce^3 + 3ce^4 + 6ce^5 \text{ \&c.} = ce^3 : (1 - e)^3 \\ \qquad\quad + fe^4 + 4fe^5 \text{ \&c.} = fe^4 : (1 - e)^4 \\ \qquad\qquad + ge^5 \text{ \&c.} = ge^5 : (1 - e)^5 \\ \qquad\qquad\quad \text{\&c.} \qquad \text{\&c.} \end{array}\right\} : K$$

N.XXXV

XV.

Invenire ſummam Seriei infinitæ fractionum R, *quarum numeratores conſtituunt ſeriem æqualium, denominatores vero Trigonalium, eorumve æquemultiplicium.*

Si a Serie harmonice proportionalium N, eademmet multata primo termino P ſubtrahatur, exoritur nova Series Q, cujus denominatores Trigonalium dupli ſunt, cujuſque adeo ſumma æqualis erit ipſi primo termino Seriei harmonicæ N, per Ax. 3.

Operatio talis: A Serie $N = \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c}$ &c.

ſubtracta Series $P = \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \frac{a}{6c}$ &c. $= N - \frac{a}{c}$

relinquit Seriem $Q = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c}$ &c. $= \frac{a}{c}$

cujus

Ergo Series I = Seriei K, vel mutato c in $1:d$, Series $a:d + (a+b):d^2 + (a+2b+c):d^3 + (a+3b+3c+f):d^4 + (a+4b+6c+4f+g):d^5 +$ &c. æqualis eſt $a:(d-1) + b:(d-1)^2 + c:(d-1)^3 + f:(d-1)^4 + g:(d-1)^5$, &c. quæ ultima Series tandem abrumpitur, evaneſcente aliqua differentiarum, b, c, f, g, &c.

Sic, quia Seriei quadratorum differentiæ tertiæ nullæ ſunt,

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. &c.
3. 5. 7. 9. 11. 13
2. 2. 2. 2. 2
0 0 0 0

fiat $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, $f = 0 = g = h$ &c. & Seriei $1:d + 4:d^2 + 9:d^3 + 16:d^4 +$ &c. ſumma eſt $1:(d-1) + 3:(d-1)^2 + 2:(d-1)^3 = (dd+d):(d-1)^3$

Pariter ſumptis differentiis Seriei cuborum, invenies quartas evaneſcere

1. 8. 27. 64. 125. 216
7. 19. 37. 61. 91
12. 18. 24. 30
6. 6. 6
0 0

Eſt igitur $a = 1$, $b = 7$, $c = 12$, $f = 6$, $g = 0$ &c. & Seriei $1:d + 8:d^2 + 27:d^3 + 64:d^4 +$ &c. ſumma eſt $1:(d-1) + 7:(d-1)^2 + 12:(d-1)^3 + 6:(d-1)^4 = (d^3 + 4dd + d):(d-1)^4$. Nec multo difficilius eſſe ſummas invenire, non totius ſeriei in infinitum continuatæ, ſed plurium, dato numero, terminorum initialium.

Digitized by Google

N.XXXV

cujus duplum $\quad R = \frac{a}{c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{10c} + \frac{a}{15c}$ &c. $= \frac{2a}{c}$

Series ſcil. fractionum propoſita, quarum denominatores ſunt numeri Trigonales, eorumve æque-multiplices (b).

Ddd 2 Obſer-

(b) Non eget alia demonſtratione hæc Methodus, per ſe ſatis perſpicua. Gratum tamen arbitror fore tyronibus, ſi ipſis oſtendam, rationem inveſtigandi Seriem, aut Series harmonice proportionalium, quæ multatæ uno, vel pluribus terminis initialibus, ſi a ſe ipſis ſubtrahantur, producant novam Seriem datam.

Data Series hic intelligitur, cujus datur terminus generalis, hoc eſt, talis ut x exiſtente indice loci quem terminus quilibet quæſitus occupat, vel $x - 1$ exiſtente numero terminorum iſtum præcedentium, detur valor iſtius per x & conſtantes. Sic Seriei R, quæ ſummatur in hac Propoſ. terminus generalis eſt $2a : cx(x+1)$. Nam, in illa expreſſione, ſi pro x ſcribantur ſucceſſive 1, 2, 3, &c. prodibit Series R. Si quæratur, v. gr. terminus decimus, ſcribe 10 pro x, & habebis $2a : 10.11\,c = a : 55\,c$.

Terminus autem generalis Seriei, cujus dantur aliquot initiales termini, plerumque inveniri poteſt, niſi ſatis obvius ſit, quærendo differentias tam numeratorum quam denominatorum, non modo primas, ſed ſecundas, tertias, &c. donec ad ultimas, id eſt, æquales perveniatur. Nam ſi ſit m primus terminus Seriei cujusvis; n, prima differentiarum primarum; p, prima ſecundarum; q, tertiarum; r, quartarum &c. ſintque ultimæ differentiæ ordine z: Quæritur terminus, cujus loci index eſt x. Excerpantur coefficientes terminorum z primorum binomii ad poteſtatem $x - 1$ elevati, nempe 1, $x-1$, $\frac{(x-1).(x-2)}{1.\ 2}$, $\frac{(x-1).(x-2).(x-3)}{1.\ 2.\ 3}$, &c. & ii ſucceſſive multiplicentur per m, n, p, q, r, &c. eritque $m + (x-1)n + \frac{(x-1)\ (x-2)}{1.\ 2.}p + \frac{(x-1).(x-2).(x-3)}{1.\ 2.\ 3.}q +$ &c. terminus generalis Seriei, cujus iſtæ ſunt differentiæ; id quod per inductionem ſatis liquet. Ex. gr. Seriei R denominatores ſunt

1. 3. 6. 10. 15. 21. &c.
Diff. primæ 2. 3. 4. 5. 6. &c.
Diff. ſecundæ. 1 1 1 1 ultimæ

Ergo $m = 1$, $n = 2$, $p = 1$,
Igitur terminus generalis $m + (x-1)n + \frac{(x-1).(x-2)}{1.\ 2.}p = 1 + 2(x-1) + (x-1).(x-2) : 2 = (xx+x) : 2 = x(x+1) : 2$.

Dato Seriei termino generali, ſummam

N.XXXV ſummam ejus venabimur, reducendo fractionem, quæ termini generalis expreſſio eſt, in tot, quot fieri poteſt, fractiones ſimplices $A : (x + a) + B : (x + b) + C : (x + c) + D : (x + d) +$ &c. quæ ſingulæ reſpondent totidem Seriebus harmonice proportionalium, ſcribendo nempe pro x ſucceſſive terminos progreſſionis arithmeticæ. Nam ſi hujus differentia ſit diviſor aliquis communis quantitatum $b - a$, $c - a$, $d - a$, &c. Atque inſuper, ſi $A + B + C + D +$ &c. ſit $= 0$, Series ſemper ſummari poterit.

Ex. gr. Seriei R terminus generalis eſt $2a : cx(x + 1) =$ [ſi $a:c$ dicatur d] $2d : x(x + 1)$. Fiat $\frac{2d}{x.\,x+1} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ [ubi x creſcendo per unitates ſatisfacit conditioni priori] & quoniam $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x + A}{x.\,x+1}$, comparemus numeratorem $(A + B)x + A$, cum numeratore $2d$, & inveniemus $A = 2d$, atque $A + B = 0$ [quo ſatisfit conditioni poſteriori] ſeu $B = -A = -2d$. Ergo $2d : x(x+1) = 2d : x - 2d : (x + 1)$. Termino generali reducto ad duas fractiones ſimplices, Series ipſa R reducetur ad duas Series harmonicas, ſcil.

$$R = \frac{d}{1} + \frac{d}{3} + \frac{d}{6} + \frac{d}{10} + \frac{d}{15} + \text{\&c.}$$

$$= 2d\left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \text{\&c.} \ldots\right)$$

$$- 2d\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \text{\&c.} \ldots\right)$$

cujus ſumma eſt $2d.\,\frac{1}{1} = 2d = 2a : c$.

Quod ſi hujus Seriei terminos, non omnes, ſed initiales tantum aliquot, numero dato, ſummare vellemus, id eodem modo liceret exequi. Proponatur ſummanda Series R, uſque ad terminum ordine x, qui eſt $2d : x(x + 1)$. Ea reducitur ad duas has Series

$$2d\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{x}\right)$$

$$- 2d\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{x+1}\right)$$

$$= 2d.\,\frac{1}{1} - 2d.\,\frac{1}{x+1} = 2dx : (x + 1).$$

Summanda ſit Series $\frac{1}{3.5.7} + \frac{2}{4.6.8} + \frac{3}{5.7.9} +$ &c. cujus terminus generalis $x : (x + 2).(x + 4).(x + 6)$. Ea reducitur ad $A : (x + 2) + B : (x + 4) + C : (x + 6)$, in quibus x creſcendo per unitates, creſcit per diviſorem communem quantitatum $4 - 2$, $6 - 2$, adeoque ſatisfacit conditioni priori. Rurſus $A : (x + 2) + B : (x + 4) + C : (x + 6) = ((A + B + C)xx + (10A + 8B + 6C)x + 24A + 12B + 8C) : (x + 2).(x + 4).(x + 6)$. Comparetur numerator cum numeratore x, & habebitur $A + B + C = 0$ [quo ſatisfit conditioni poſteriori, unde concludimus Seriem eſſe ſummabilem], $10A + 8B + 6C = 1$, & $24A + 12B + 8C = 0$, ex quibus elicitur $A = -\frac{1}{4}$, $B = 1$,

C =

$C = -\frac{3}{4}$. Ergo terminus generalis $x:(x+2).(x+4).(x+6)$, reducitur ad $-\frac{1}{4}:(x+2) + 1:(x+4) - \frac{3}{4}:(x+6)$. & Series propoſita in has tres diſpeſcitur N.XXXV

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+ \ldots \ldots \frac{1}{x+2}\right)$$
$$+1\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \ldots \ldots \frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)$$
$$-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \ldots \ldots \frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}\right)$$

quarum ſumma $= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) + 1\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}\right)$ $= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right) = \frac{31}{240} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}\right)$.

Adhæc ſi termino generali reducto ad fractiones ſimplices $A:(x+a) + B:(x+b) + C:(x+c) + D:(x+d)$ &c. inveniatur x non creſcere per differentiam quæ ſit communis diviſor quantitatum $b-a$, $c-a$, $d-a$, &c. ſed tamen incrementum ipſius x dividat $b-a$, & $d-c$, ſitque ſimul $A+B=0$, & $C+D=0$, poterit ſeries ſummari.

Ita Seriei $\frac{11}{1.3.1.4} + \frac{23}{3.5.4.7} + \frac{35}{5.7.7.10} +$ &c. terminus generalis $(12x-1):(2x-1)(2x+1).(3x-2)(3x+1)$, vel $(\frac{1}{3}x-\frac{1}{36}):(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x-\frac{2}{3})(x+\frac{1}{3})$ reſolvitur in fractiones $-\frac{1}{x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{x-\frac{2}{3}} - \frac{1}{x+\frac{1}{3}}$ vel $-\frac{2}{2x-1}+\frac{2}{2x+1}+\frac{3}{3x-2}-\frac{3}{3x+1}$, adeoque ſeries ipſa in has quatuor

$$-2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7} \ldots \ldots +\frac{1}{2x-1}\right)$$
$$+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7} \ldots \ldots \frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2x+1}\right)$$
$$+3\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10} \ldots \ldots +\frac{1}{3x-2}\right)$$
$$-3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10} \ldots \ldots \frac{1}{3x-2}+\frac{1}{3x+1}\right)$$

qua-

N.XXXV Obſervandum tamen, non ſine cautela hac utendum eſſe methodo: Nam ſi a ſequente Serie S eadem, demto primo termino, T ſubtrahatur, prodibit eadem ſeries Q, quæ antea; nec tamen inde ſequitur, ſummam Seriei Q æqualem eſſe primo termino ſeriei $S = \frac{2a}{c}$. Cujus rei ratio eſt, quod, ſi a Serie S ſubtrahitur Series terminorum totidem T, in qua ſinguli termini poſtremum præcedentes ſingulos primum conſequentes in altera deſtruunt, reſiduum, hoc eſt reſultans Series Q, evidenter debet adæquari primo termino Seriei S minus ultimo ipſius T; adeoque ipſi primo Seriei S abſolute æqualis eſſe nequit, niſi tum cum ultimus ipſius T in nihilum deſinit, uti quidem deſinere perſpicuum eſt in Serie P vel N: at non evaneſcit pariter in Serie T vel S, verum eſt $= a : c$, per X. Quin itaque potius ſumma Seriei $Q = 2a : c - a : c = a : c$, ut ſupra.

$$S = \frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} \text{ \&c.}$$
$$T = \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} + \frac{7a}{6c} \text{ \&c.}$$
$$Q = \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} \text{ \&c.} = \frac{2a}{c} - \frac{a}{c} = \frac{a}{c}.$$

XVI.

Summa ſeriei infinitæ harmonice progreſſionalium, $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ *&c. eſt infinita.*

Id primus deprehendit Frater: inventa namque, per præced. ſumma Seriei $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$, &c. viſurus porro, quid emergeret ex iſta Serie, $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30}$, &c. ſi reſolveretur methodo

quarum ſumma $= - 2.\frac{1}{1} + 2. \frac{1}{2x+1} + 3.\frac{1}{1} - 3.\frac{1}{3x+1} = 1 + \frac{2}{2x+1} - \frac{3}{3x+1} = (6x+5)x : (2x+1)(3x+1)$.

Hæc methodus, quoad ſubſtantiam, eſt D. Taylor.

methodo Prop. XIV. collegit propoſitionis veritatem ex abſur- XXXV
ditate manifeſta, quæ ſequeretur, ſi ſumma Seriei harmonicæ finita ſtatueretur. Animadvertit enim,

Seriem A, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$, &c. $=$ (fractionibus ſingulis in alias, quarum numeratores ſunt 1, 2, 3, 4, &c. tranſmutatis)

Seriei B, $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}+\frac{6}{42}$, &c. $=$ C$+$D$+$E$+$F, &c.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{C.}\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42},\ \text{\&c.} = \text{per præc.} & \frac{1}{1} \\ \text{D.}\ +\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42},\ \text{\&c.} = \text{C}-\frac{1}{2} = & \frac{1}{2} \\ \text{E}\ldots +\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42},\ \text{\&c.} = \text{D}-\frac{1}{6} = & \frac{1}{3} \\ \text{F}\ldots\ldots +\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42},\ \text{\&c.} = \text{E}-\frac{1}{12} = & \frac{1}{4} \\ \qquad\qquad \text{\&c.} = & \text{\&c.} \end{array}\right\}$$

$=$ G; unde ſequitur, Seriem G $=$ A, totum parti, ſi ſumma finita eſſet.

Ego poſtmodum, cum indicaſſet, idem oſtenſive hunc in modum: Summa Seriei infinitæ harmonicæ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, &c. ſuperat datum quemvis numerum. Ergo infinita eſt, per II. Eſto datus numerus N quantumcunque magnus: Abſcinde a principio Seriei aliquot terminos, quorum ſumma æquet vel ſuperet unam unitatem numeri N, & a Serie reliqua iterum aliquos abſcinde, quorum ſumma aliam unitatem numeri N ſuperet, idque ſi fieri poſſit, repete toties, quot in numero N ſunt unitates; ſic termini abſciſſi omnes ſuperabunt totum numerum, multo magis igitur tota Series eundem ſuperabit. Si neges, abſciſſis aliquot, reliquos unitatem ſuperare poſſe, eſto primus reliquorum, qui poſt abſciſſionem ultimam remanſerunt, $1:a$, & ſequentes $1:(a+1)$, $1:(a+2)$, $1:(a+3)$, &c. Conſtituatur ad duos primos terminos $1:a$ & $1:(a+1)$ Progreſſio geometrica, cujus ideo ſinguli poſt ſecundum termini ſingulis reſpondentibus in Progreſſione harmonica minores ſunt, ob denominatores majores, per IV. & continuetur hæc uſque ad $1:aa$ (quod quidem fiet in terminis

N.XXXV nis numero finitis, propter a numerum finitum) eritque hæc Series geometrica finita $= 1$, per VIII. Harmonica itaque terminorum totidem ſuperabit unitatem. Q. E. D.

Coroll. 1. In propoſita Serie initio ſumto a quolibet termino, erunt ab illo deinceps omnes, uſque ad illum, cujus locus deſignatur per quadratum numeri ordinis primi termini, ſimul ſumti unitate majores: ſic termini a 2do ad 4^{tum} uſque unitatem ſuperant, hinc a 5to ad 25^{tum}, hinc a 26 ad 676 $[= 26^2]$ hinc a 677 ad 458329 $[= 677^2]$ &c. Nam in geometrica progreſſione, termini his limitibus intercepti unitatem æquant; ergo in harmonica ſuperant, ubi & plures intercipiuntur & majores: majores quidem uti vidimus; plures, quia denominatores terminorum, cum ſint minores quam in geometrica, per IV, tardius illos limites aſſequuntur.

2. Patet, omnem aliam Seriem harmonicam infinitam, ſummam quoque exhibere infinitam; ut ex. gr. ſi loco $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ &c. proponatur $\frac{1}{1000}+\frac{1}{2000}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{4000}$ &c. ubi ſinguli termini ſingulorum ſibi reſpondentium in altera, adeoque & omnes omnium, ſunt ſubmillecupli: nam infiniti pars milleſima & ipſa infinita eſt.

3. Summa Seriei infinitæ, cujus poſtremus terminus evaneſcit, quandoque finita eſt, quandoque infinita.

Tab. X. *b.* *No.* 35. 4 Sequitur etiam, ſi modo in geometriam ſaltum facere permiſſum eſt, ſpatium Curva Hyperbolica & Aſymptotis comprehenſum infinitum eſſe: Secta intelligatur Aſymptotos linea a centro A in partes æquales infinitas in punctis B, C, D, E, &c. e quibus ad curvam educantur rectæ totidem alteri Aſymptoton parallelæ BM, CN, DO, EP, &c. & compleantur parallelogramma AM, BN, CO, DP, &c. quæ ob baſium æqualitatem inter ſe erunt, ut altitudines, ſeu ut rectæ BM, CN, DO, EP, &c. hoc eſt, ut $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. ex natura Hyperbolæ; cum igitur ſumma $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ &c. infinita oſtenſa ſit, erit & ſumma Parallelogrammorum AM, BN, CO, DP, &c. infinita, multoque

Digitized by Google

toque magis ſpatium hyperbolicum, quod parallelogrammis illis conſcriptum eſt. N.XXXV

XVII.

Invenire ſummam ſerierum Leibnitzianarum, D, H, I, *aliarumque, quarum denominatores ſunt numeri Quadrati aut Trigonales; minuti aliis Quadratis vel Trigonalibus.*

Cel. LEIBNITIUS occaſione mirabilis ſuæ Quadraturæ Circuli in principio *Actorum Lipſ.* publicatæ, mentionem injicit ſummæ quarundam ſerierum infinitarum, quarum denominatores conſtituunt ſeriem Quadratorum unitate minutorum, diſſimulato quo eam repererat artificio. En breviter totum miſterium:

A ſerie . . . $A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c. ſubtrahatur ipſamet demtis duobus

primis terminis, $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ &c. $= A - \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

relinquitur $C = \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \frac{2}{35}$ &c. $= A - B = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

& propterea $D = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35}$ &c. $= \frac{1}{2} C = \frac{3}{4}$

A ſerie . . . $E = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ &c. ſubtrahatur eadem demto primo

termino, . . . $F = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}$ &c. $= E - 1$

relinquitur $G = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \frac{2}{99}$ &c. $= E - F = 1$

& propterea . . $H = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99}$ &c. $= \frac{1}{2} G = \frac{1}{2}$,

& proinde etiam $I = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120}$ &c. $= D - H = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Quod ipſum quoque ſic oſtenditur:

N.XXXV A ſerie . . . $L = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}$ &c. ſubtrahatur eadem demto primo

termino, . . . $M = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}$ &c. $= L - \frac{1}{2}$

relinquitur $N = \frac{2}{8} + \frac{2}{24} + \frac{2}{48} + \frac{2}{80} + \frac{2}{120}$ &c. $= L - M = \frac{1}{2}$

& proinde . . . $I = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120}$ &c. $= \frac{1}{2} N = \frac{1}{4}$, ut antea.

Memorabile autem prorſus eſt, quod ſumma Seriei D, $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63}$ &c. (cujus denominatores ſunt numeri quadrati 4, 9, 16, 25, 36, &c. unitate minuti) invenitur $\frac{3}{4}$, quin & excerptis per ſaltum alternis terminis, ſumma Seriei H, $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63}$ &c. $= \frac{1}{2}$; at ſi ex hac iterum ſimplici ſaltu terminos loco pari poſitos excerpas, ut relinquatur $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ &c. ejus Seriei infinitæ ſumma eſt vera magnitudo circuli, nullo numero exprimibilis, ſumto vid. quadrato diametri $= \frac{1}{2}$ (*).

Cæte-

(*) Terminus generalis Seriei, cujus denominatores ſunt numeri quadrati, minuti aliquo quadrato, erit

$$\frac{1}{xx + 2ax + aa - bb} = \frac{1}{(x + a + b).(x + a - b)}$$

qui reſolvitur in duas fractiones ſimplices $\frac{1:2b}{x + a - b} - \frac{1:2b}{x + a + b}$. Ergo ſeries reſolvetur in alias duas, & proinde, quoniam poſterior conditio locum habet, ſummabilis erit, ſi prior obtineat, hoc eſt ſi x creſcat per differentiam aliquam, quæ ſit diviſor differentiæ $(a + b) - (a - b) = 2b$. Id quod ſuccedit in Seriebus D, H, I. Nam in prima, x creſcit per unitates; eſt vero $a = 1$, & $b = 1$, adeoque $2b = 2$. In ſecunda, x creſcit per binarios: eſt autem $a = 0$, $b = 1$, ideoque $2b = 2$. In tertia x creſcit pariter per binarios, & eſt $a = 2$, $b = 1$. At in Serie $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} +$ &c. $= \frac{1}{4 - 1} + \frac{1}{36 - 1} + \frac{1}{100 - 1}$ &c. x creſcit per quaternarios, & eſt $a = 1$, $b = 1$ & $2b = 2$: Non creſcit igitur x per differentiam quæ dividat $2b$. Quamobrem hæc ſeries hac methodo non eſt ſummabilis. Hujus autem ſummam exhibere veram magnitudinem Circuli,

Cæterum generaliter invenire poſſumus ſummam cujuſlibet Seriei, cujus numeratores conſtituunt Seriem æqualium, & denominatores ſeriem Quadratorum minutorum communi aliquo Quadrato $\mathcal{Q}$, aut etiam ſeriem Trigonalium minutorum communi aliquo numero Trigonali T: ſi obſervemus, ejuſmodi Series naſci per ſubductionem Seriei harmonicæ truncatæ ab initio tot terminis (quot indicat ibi duplum radicis quadratæ communis quadrati $\mathcal{Q}$, hic duplum unitate auctum radicis trigonalis numeri Trigonalis T) a ſeipſa integra: N.XXXV

Ex. gr. ad inveniendam ſummam Seriei D, $\frac{1}{7}+\frac{1}{16}+\frac{1}{27}+\frac{1}{40}+\frac{1}{55}$ &c.
cujus denominatores ſunt Quadrati, $16, 25, 36, 49, 64, 81,$ &c.
minuti communi Quadrato $\mathcal{Q}$ . . . $9, 9, 9, 9, 9, 9.$
(cujus Radix Quad. 3, & duplum 6,) $7, 16, 27, 40, 55, 72,$ &c.

A Serie . . . $A = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ &c. ſubtrahatur eadem multata ſex

primis terminis . $B = \frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}$ &c.

relinquitur . . $C = \frac{6}{7}+\frac{6}{16}+\frac{6}{27}+\frac{6}{40}+\frac{6}{55}+\frac{6}{72}$ &c. $= A - B =$
$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = 2\frac{9}{20}$

adeoque . . . $D = \frac{1}{7}+\frac{1}{16}+\frac{1}{27}+\frac{1}{40}+\frac{1}{55}+\frac{1}{72}$ &c. $= \frac{1}{6}C = \frac{49}{120}$.

 Rur-

li, demonſtrabitur N°. LIV. Prop. 45. Cor. 1.

Terminus generalis Seriei, cujus denominatores ſunt Trigonales minuti aliquo Trigonali, erit $\frac{2}{(x+a)(x+a+1) - b(b+1)} = \frac{2}{(x+a+b+1)(x+a-b)} = \frac{2:(2b+1)}{x+a-b} - \frac{2:(2b+1)}{x+a+b+1}$ Unde ſequitur ſeriem ſummabilem eſſe, quotieſcunque x creſcit per diviſorem differentiæ $(a+b+1) - (a-b) = (2b+1)$.

N.XXXV Rurſus pro invenienda ſumma Seriei E, $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{22}+\frac{1}{30}+\frac{1}{39}$ &c.

cujus denominatores ſunt Trigonales 10, 15, 21, 28, 36, 45, &c.
minuti communi Trigonali T . . . . 6, 6, 6, 6, 6, 6, &c.
(cujus Radix Trigon. 3. & duplum 4, 9, 15, 22, 30, 39, &c.
unitate auctum 7)

A Serie . . $A = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ &c. ſubtrahatur eadem truncata ſeptem primis terminis

$$F = \frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14} \text{ \&c.}$$

relinquitur $G = \frac{7}{8}+\frac{7}{18}+\frac{7}{30}+\frac{7}{44}+\frac{7}{60}+\frac{7}{78}+\frac{7}{98}$ &c. $= A - F =$
$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} = \frac{363}{140}$

adeoque . . $E = \frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{22}+\frac{1}{30}+\frac{1}{39}+\frac{1}{49}$ &c. $= \frac{2}{7}G = \frac{363}{490}$.

Atque ita per hanc Propoſitionem inveniri poſſunt ſummæ ſerierum, cum denominatores ſunt vel numeri Trigonales minuti alio Trigonali, vel Quadrati minuti alio Quadrato; ut & per XV. quando ſunt puri Trigonales, ut in Serie $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ &c. At, quod notatu dignum, quando ſunt puri Quadrati, ut in Serie $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$ &c. difficilior eſt, quam quis expectaverit, ſummæ perveſtigatio, quam tamen finitam eſſe, ex altera, qua manifeſto minor eſt, colligimus: Si quis inveniat nobiſque communicet, quod induſtriam noſtram eluſit hactenus, magnas de nobis gratias feret. (*)

Hoc

(*) Non poteſt hac arte ſummari Series cujus denominatores ſunt Quadrati puri, & ea pleraſque Methodos quæ, magno ſatis numero, poſt Autoris fata, inventæ ſunt, eluſit, donec tandem Cl. EULERUS,

Hoc ſaltem monere adhuc liceat, quod ſpatium Hyperboloide Cubicali [cujus natura exprimitur per æquationem $xxy = aab$, hoc eſt, in qua Quadrata abſciſſarum ex Aſymptotis ſunt in applicatarum ratione reciproca] & Aſymptotis ſuis comprehenſum, eodem modo ex finita hujus Seriei ſumma finitum eſſe demonſtrari poſſit, quo ſimile ſpatium in ipſa Hyperbole ex infinita Seriei harmonicæ ſumma infinitum oſtenſum eſt. * N. XXXV

Ecc 3 ΕΠΙΜΕΤΡΑ

RUS, *Joh.* & *Nicol.* BERNOULLII detexerunt ejus ſummam æqualem eſſe ſextæ parti quadrati circumferentiæ, cujus Diameter eſt 1. Subjiciam Demonſtrationem EULERI, indirectam quidem, ſed mira quadam & inexpectata brevitate, ſeſe commendantem. Notum eſt æquationem infinitam $y = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 +$ &c. exprimere relationem inter ſinum y & arcum x, in circulo cujus radius $= 1$. Poſito igitur ſinu $y = 0$, deſignabunt radices hujus æquationis $0 = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 -$ &c. arcus omnes, quorum ſinus ſunt 0, id eſt, poſita $c =$ circumferentiæ circuli cujus Diameter $= 1$, vel ſemicircumferentiæ circuli cujus radius $= 1$, radices ejus æquationis infinitæ erunt $0, c, 2c, 3c, 4c,$ &c. Igitur, dividendo per x, radices hujus æquationis $0 = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 -$ &c. erunt $c, 2c, 3c,$ &c, vel, poſito $zz = 1 : x$, radices æquationis iſtius $0 = 1 - \frac{1}{6z} + \frac{1}{120zz} -$ &c. erunt $\frac{1}{c^2}, \frac{1}{4c^2}, \frac{1}{9c^2}$ &c. Hinc, quia in omni æquatione algebraica, ubi termini ſecundum poteſtates deſcendentes indeterminatæ diſponuntur, coefficiens ſecundi termini, mutato ſigno, æqualis eſt ſummæ radicum omnium, erit $\frac{1}{6} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{4c^2} + \frac{1}{9c^2} +$ &c. Ergo $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$ &c. in infinitum $= \frac{1}{6}c^2 = \frac{c^2}{6}$. Q. E. D.

* *Videatur Nus. LIV.*

N.XXXV.

ΕΠΙΜΕΤΡΑ.

I.

Sicut nec corpus infinitum, ita nec atomum dari poſſe credo; ſed utrumque nudam mentis fictionem eſſe puto, qua poſtquam corpus corpori aliquandiu addidit ademitve, pertaſa tandem operationis ſine fine repetenda, omnes multiplicationes vel diviſiones uno immani ſaltu tranſilit, ultimamque jam factam eſſe, quam tamen unquam fieri repugnat, περιληπτικῶς *ſupponit.*

II.

Vacuum, eo modo quo concipi a nobis ſolet, neceſſario datur.

III.

Hinc vacui metus inepte naturæ affingitur, nec ullius phænomeni naturalis cauſa eſſe poteſt.

IV.

Fluviorum alvei non poſſunt eſſe perfecte horizontales, ſed requiritur in illis ad minimum unius pedis declivitas in milliari: unde & fluminum oſtia ipſorum ſcaturiginibus, Oceanus & loca maritima regionibus mediterraneis neceſſario depreſſiora ſunt.

V.

Hinc vero non levis controverſia: qua vi aqua ex Oceano in altiſſimorum montium cacumina revehantur; fruſtra ſaltem illi ſunt, qui exiſtimant, hoc ad eundem modum per anguſtos terræ meatus & canaliculos fieri poſſe, quo videmus, liquorem intra graciliores fiſtulas altius aſſurgere poſſe, quam conſiſtit externi liquoris ſuperficies.

VI.

Solutio quæſtionum circa figuram & ſitum Iridis, quam antehac in rore prati conſpexit Chriſt. Menzelius, *ut refert in* Ephemer. Nat. Curioſor. An. 1686, *& qua in re omnium cujuſque loci Mathematicorum opem implorat, facilis eſt, nulloque* Archimede

chimede *indiget. Nam* 1°. *ſi Solis altitudo* $<$ 42 *gr. Iris apparebit Hyperbolica : ſi* $=$ 42 *gr. Parabolica : ſi* $>$ 42 *gr. Elliptica ; ſi* 90 *gr. Circularis.* 2°. *Axis iridis perpetuo eſt in linea umbræ intuentis hominis.* 3°. *Elevatione oculi ſupra Terræ planitiem ſumta pro radio, diſtantia proximi verticis coni-ſectionis a loco ſtationis eſt Tangens differentiæ inter* 48 *gr. & arcum elevationis Solis, numeranda a facie, ubi* 48 *gr.* $>$ *elev. Solis ; a tergo, ubi* $<$. 4°. *Latus rectum in omni caſu eſt duplum Tangentis* 42 *gr.* 5°. *Tranſverſum in Hyperbola, aggregatum ex Tangente ſummæ & Tangente differentiæ* 48 *gr. & elevat. Solis : in Ellipſi, exiſtente elevatione Solis* $>$ 48 *gr. aggregatum ex Tang. ſummæ & Tang. differentiæ* 42 *gr. & complementi altitudinis Solis ; exiſtente vero elevat. Solis* $<$ 48 *gr. differentiæ earumdem* (*). N.XXXV

VII. *Li-*

(*) Notum eſt omnibus, Iridis primariæ cauſam eſſe refractionem duplicem, ſimplicemque reflexionem radiorum ſolarium in guttas pluvias incidentium, quæ guttæ ſunt omnes in ſuperficie conica, cujus axis eſt linea per Solis centrum & oculum ſpectatoris acta, latus vero ad axem inclinatur ſub angulo, quem 42 gr. aſſumit Autor, medium ſcil. inter angulos arcus rubri & arcus violacei. Hæc coni ſuperficies ſi ſecta intelligatur per Terræ planitiem roris guttulis ſparſam, dabit Iridis horizontalis figuram. Sit S, Sol; O, ſpectatoris oculus; OT, ejus altitudo ſupra Terræ ſuperficiem TA; SOA, axis coni; OV, OR, ejus latera, cum axe comprehendentia angulos AOV, AOR, 42 gr. atque cum OP ad axem perpendiculari angulum POV 48 gr. & manifeſtum eſt (Tab. XII. *b.* N. 35.)

I°. Si OT in axem OA incidat, id eſt, ſi Solis elevatio ſit 90 gr. ſectionem Terræ & ſuperficiei conicæ dare Iridem circularem : Inclinata vero OT ad OA, Terræ planitiem TA efficere, cum latere coni OV, angulum OVP æqualem ſummæ angulor. OAT (elevat. Solis) & AOV (42 gr.); cum latere autem OR, angulum ORT æqualem differentiæ angulor. OAT (elev. Solis) & AOR (42 gr.) Igitur, ſi Solis elevatio ſit $>$ 42 gr., TA ſecabit utrumque latus coni, & ſectio VAR erit elliptica : ſi Solis elevatio ſit $=$ 42 gr. TA erit parallela lateri OR, & Sectio VA parabola : ſi Solis elevatio ſit $<$ 42 gr. latus OR cum TA non concurret, niſi producatur ab altera parte in Or, adeoque ſectio VA erit hyperbola.

II. Axis ſectionis VA cadit in lineam

Digitized by Google

N.XXXV

V I I.

Lineam Spiralem Archimedeam *dimidiam eſſe peripheria ſui Circuli, male aſſerit* Cl. STURMIUS *in* Matheſi *ſua* enucleata.

V I I I.

Agrimenſoriam niſi Geometria peritus rite exercere non poteſt; unde in Rebuſpub. non citra inſigne prajudicium ejus cura illiteratis & plebeiis committi ſolet.

lineam umbræ TA hominis intuentis.

III. Diſtantia TV proximi verticis V a loco ſtationis T eſt (ſumpta OT pro ſinu toto) Tangens anguli TOV, ſeu differentiæ angul. POV (48 gr.) & POT = [propter ſimil. triang. POT, POA] = OAT (Solis elevat.) hæc autem diſtantia, in 1ª. Ellipſis figura [ubi AOT < AOV. 42 gr. atque ideo OAT, Solis elev. > 48 gr.] numeratur a tergo, in reliquis figuris a facie ſpectatoris a Sole averſi.

IV. Latus rectum habetur (vid. infra N°. XXXVIII.) faciendo OA ad MN [ſin. totus ad duplum Tangent. anguli MOA vel NOA, 42 gr.], ut OT ad latus rect. Ergo ubi OT eſt ſin. tot., etiam latus rectum eſt duplum Tang. 42 gr.

V. In hyperbola, latus tranſverſum Vr = Tr + TV = Tang. TOr [ſummæ ang. POr, 48 gr. & POT, Solis elev.] + Tang. TOV [diff. POV, 48 gr. & POT, Solis elev.]

In ellipſis fig. 1. Latus tranſverſum VR = TR + TV = Tang. TOR [ſummæ AOR, 42 gr. & AOT, compl. OAT Solis elev.] + Tang. TOV [differentiæ AOV, 42 gr. & AOT, compl. Solis elev.]
In ellipſis fig. 2. Latus tranſverſum VR = TR — TV = Tangent. TOR [ſummæ AOR, 42 gr. & AOT, compl. elev. Solis] — Tang. TOV, [differentiæ AOV, 42 gr. & AOT, compl. elevat. Solis.]

N°. XXXVI.

Digitized by Google

N°. XXXVI.

DE INVENIENDA CUJUSQUE PLANI DECLINATIONE,

ex unica obſervatione projectæ a ſtylo umbræ.

Per Jac. Bernoulli.

PRo hac invenienda varii varias invenerunt methodos : ſed cum ad artis perfectionem conducat , in re præſertim non adeo facili & obvia , noſſe vias plurimas , quibus eadem conficiatur ; exponam hic modum , quo declinatio Plani cujuſcunque , ex unica obſervatione umbræ in illo projectæ , mediante tamen Solis azimutho reperiri poſſit. Quem quidem modum , ut omnibus accommodarem caſibus , ſequenti typo incl.ſi. *Acta Erud. Lipſ. 1689. Jun. p. 311.*

In Plano propoſito ducantur duæ lineæ rectæ , una horizontalis , altera perpendicularis , priorem ad angulos rectos ſecans ; in interſectione linearum erigatur ſtylus notæ longitudinis normaliter ad planum , & ſplendente Sole notetur longitudo umbræ de illo ſparſæ , anguluſque , quem umbra cum perpendiculari conſtituit. Quibus cognitis , tum declinatio Plani a verticali Solis , tum altitudo Solis , indeque ejus azimuth , Planique declinatio a meridiana inveſtigabuntur , ut ſequitur.

Planum autem *Verticale* appello , quod cum Horizonte angu-

Digitized by Google

Num. XXXVI. lum rectum conſtituit: *Reclinatum*, quod obtuſum: *Inclinatum*, quod acutum.

Inclinationem voco ipſam quantitatem anguli acuti, quem Planum inclinatum cum horizonte conſtituit: *Reclinationem* vero anguli illius obtuſi, quem Planum reclinatum cum Horizonte facit, complementum ad 180.

Azimuthum Solis eſt arcus Horizontis interceptus inter quadrantem Solis verticalem, & Punctum meridiei; qui arcus quadrante major eſſe poteſt.

In omni Plano,

Sicubi neceſſe eſt, explorare diſtantiam Solis a polo Plani, fiat: Ut ſtylus ad umbram; ita Sinus totus ad Tangentem diſtantiæ Solis quæſitæ.

In Verticalibus,

I. Si *nulla umbra:* Planum non declinat a Solis verticali, & Sol eſt in Horizonte.

II. Si *umbra perpendiculariter deorſum vergit:* Planum non declinat a Solis verticali; altitudo autem Solis eſt æqualis diſtantiæ illius a polo Plani.

III. Si *umbra cadit horizontaliter:* Sol eſt in Horizonte; declinationem autem Plani a Solis verticali menſurat viciſſim ejus diſtantia a polo plani.

IV. Si *umbra cadit inter horizontalem & perpendicularem, & altitudo Solis ſupponitur quadrante explorata:* erit:

Ut Sinus totus ad Tangentem anguli perpendicularis & umbræ; ita Tangens altitudinis Solis ad Sinum declinationis Plani a verticali Solis.

non ſupponitur cognita, utrumque ſic explorabitur:

α. Ut ſtylus ad umbram; ita Sinus anguli perpendicularis & umbræ ad Tangentem declinationis Plani a verticali Solis.

β. Ut Sinus totus ad Tangentem complementi anguli perpendicularis

dicularis & umbræ; ita Sinus declinationis plani a verticali Solis ad Tangentem altitudinis Solis. Num. XXXVI.

In Reclinatis,

I. Si *nulla umbra*: Planum non declinat a Solis verticali; altitudo vero Solis eſt æqualis complemento reclinationis.

II. Si *umbra perpendiculariter deorſum vergit*, erit aggregatum ex diſtantia Solis a polo Plani & complemento reclinationis [ſiquidem quadrante minus ſit] Solis altitudo, nec declinabit Planum a Solis verticali: at ſi aggregatum illud ſit quadrante majus; erit ejus complementum ad 180 gr, Solis altitudo, Planique facies ab illius verticali abeſt integro ſemicirculo.

III. Si *umbra perpendiculariter ſurſum tendit*, non declinat Planum a Solis verticali, ſed diſtantia Solis a polo Plani ſubtracta ex complemento reclinationis, erit reſiduum Solis altitudo.

IV. Si *umbra cadit horizontaliter, & altitudo Solis quadrante explorata habetur:* erit

Ut Sinus totus ad Tangentem altitudinis Solis: ita Tangens reclinationis ad Sinum complementi declinationis Plani a Solis verticali.

non habetur per quadrantem, utrumque ſic invenitur:

α. Ut Sinus reclinationis ad Sinum totum; ita Tangens diſtantiæ Solis a polo Plani, ad Tangentem declinationis Plani a Solis verticali.

β. Ut Sinus totus ad Sinum complementi declinationis Plani a Solis verticali: ita Tangens complementi reclinationis ad Tangentem altitudinis Solis.

V. *Si umbra cadit inter horizontalem & perpendicularem, & altitudo Solis cognita habetur,* erit

Ut Sinus complementi altitudinis Solis, ad Sinum anguli perpendicularis & umbræ, ita Sinus diſtantiæ Solis a polo Plani,

 ad

Num. XXXVI. ad Sinum anguli, qui ipſam exhibet declinationem Plani a verticali Solis [ſiquidem hæc declinatio quadrante non ſit major;] ſecus enim anguli illius complementi ad 180° eſt quæſita declinatio, ubi hæc quadrantem excedere debet: quod cognoſcitur perpendiculo, cujus umbra ſi infra lineam horizontalem cadit, indicio eſt, murum plus 90° declinare.

Si non eſt cognita, utraque ſic inveſtigabitur.

α. Ut ſtylus ad umbram, ita Sinus complementi anguli perpendicularis & umbræ, ad Tangentem ſegmenti cujuſdam [addendi ad reclinationem, ubi umbra ſtyli ſupra lineam horizontalem ſpargitur; aut ſubtrahendi a reclinatione, illave minuendi, ubi infra dictam lineam projicitur].

β. Ut Sinus ſummæ vel reſidui, ad Sinum ſegmenti modo inventi; ita Tangens anguli perpendicularis & umbræ ad Tangentem anguli, qui exhibet declinationem Plani a Solis verticali [ubi ſegmentum modo dictum minus eſt reclinatione;] ſecus enim illius anguli complementum ad 180° declinationem Plani modo dictam metitur, ſicubi ſegmentum illud reclinatione majus fuerit.

γ. Ut Sinus complementi ſegmenti [modo additi, ablati, minutive] ad Sinum complementi ſummæ vel reſidui; ita Sinus complementi diſtantiæ Solis a polo Plani, ad Sinum altitudinis Solis.

In Inclinatis,

I. *Si umbra perpendiculariter deorſum vergit:* Planum non declinat a Solis verticali; complementum vero inclinationis ſubtractum a diſtantia Solis a Plani polo relinquit Solis altitudinem.

II. *Si umbra cadit horizontaliter:* Sol eſt in Horizonte, Planumque ſtringit; quare declinatio Plani a Solis verticali eſt 90. gr.

III. *Si umbra ſpargitur inter perpendicularem & horizontalem, & altitudo Solis per quadrantem habetur*, erit

Ut

Ut Sinus complementi altitudinis Solis, ad Sinum complementi anguli perpendicularis & umbræ, ita Sinus diſtantiæ Solis a polo Plani ad Sinum declinationis Plani a verticali Solis. Num. XXXVI.

Si non habetur, utraque ſic inveſtigabitur:

α. Ut ſtylus ad umbram; ita Sinus complementi anguli perpendicularis & umbræ ad Tangentem ſegmenti, a cujus complemento ad 180° ſubtrahatur inclinatio.

β. Ut Sinus reſidui ad Sinum ſegmenti; ita Tangens anguli perpendicularis & umbræ ad Tangentem anguli declinationis Plani a verticali Solis.

γ. Ut Sinus complementi ſegmenti, ad Sinum complementi reſidui; ita Sinus complementi diſtantiæ Solis a polo Plani, ad Sinum altitudinis Solis.

Exploratis ita declinatione Plani a verticali Solis, hujuſque altitudine [unde azimuthum ejus via communi elici poteſt] ita porro declinatio Plani ab ipſa Meridiana inveſtigatur.

Obſervatione facta

Ante meridiem;

I. *Si umbra reſpectu tui ante Planum conſtituti a linea perpendiculari ſpargitur dextrorſum*: adde azimuth ad declinationem Plani a Solis verticali: Aggregatum [ſi minus eſt 90°] dat *declinationem a meridie ad ortum*; [ſi 90°] *orientale directum*; [ſi majus 90°] ejus complementum ad 180° dat *declinationem a ſeptentrione in ortum*; [ſi 180°] *ſeptentrionale directum*; [ſi majus 180°] demtis 180°, relinquitur *declinatio a ſeptentrione in occaſum*; [ſi 270°] *occidentale directum*; [ſi majus 270°] ejus complementum ad 360° relinquit *declinationem a meridie in occaſum*.

II. *Si umbra ſpargitur ſiniſtrorſum*: ſubtractis vel *Declinatione Plani a verticali Solis & azimutho*, [ſi nihil remanet] eſt *meridionale directum*; [ſi quod remanet, eſt minus 90°] *declinatio eſt a meridie in ortum*; [ſi 90°] *Orientale directum*; [ſi majus 90°] ejus complementum ad 180 dat *declinationem a ſeptentrione in ortum*.

Num. XXXVI. *Azimutho a declinatione Plani a verticali Solis* [ſi nihil remanet] eſt *meridionale directum*; [ſi remanet minus 90°] *declinatio eſt a meridie in occaſum*; [ſi 90°] *occidentale directum*; [ſi majus 90°] ejus complementum ad 180° dat *declinationem a ſeptentrione in occaſum.*

Poſt meridiem ;

I. *Si umbra cadit dextrorſum*: ſubtractis vel

Declinatione Plani a verticali Solis ex azimutho; [ſi nihil remanet] eſt *meridionale directum*; [ſi minus 90°] *declinatio eſt a meridie in occaſum*; [ſi 90°] *occidentale directum*; [ſi majus 90°] ejus complementum ad 180° dat *declinationem a ſeptentrione in occaſum.*

Azimutho a declinatione Plani a Solis verticali: [ſi nihil remanet] eſt *meridionale directum*; [ſi minus 90°] *declinatio eſt a meridie in ortum*; [ſi 90°] *orientale directum*; [ſi majus 90°] ejus complementum ad 180°, dat *declinationem a ſeptentrione in ortum.*

II. *Si umbra cadit ſiniſtrorſum*: adde azimuth ad declinationem Plani a Solis verticali: Aggregatum [ſi minus eſt 90°] dat *declinationem a meridie in occaſum*; [ſi 90°] *occidentale directum*; [ſi majus 90°] ejus complementum ad 180° dat *declinationem a ſeptentrione in occaſum*; [ſi 180°] *ſeptentrionale directum* [ſi majus 180°] demtis 180° relinquitur *declinatio a ſeptentrione in ortum* [ſi 270°] *orientale directum* [ſi majus 270°] ejus complementum ad 360° dat *declinationem a meridie in ortum.*

OBSERVANDA.

I. Neceſſum non eſt, ut ſtylus muro ſit infixus perpendiculariter: poſſumus uti gnomone quocunque fortuito inſerto; dummodo (quod facile fieri poteſt) determinetur in muro punctum illud, quod omnium breviſſime diſtat a ſtyli apice, & per hoc

Digitized by Google

hoc punctum normaliter agantur duæ iſtæ lineæ, horizontalis & perpendicularis: tum enim diſtantia inter apicem ſtyli & hoc punctum repræſentabit longitudinem ſtyli; diſtantia inter punctum illud & extremitatem umbræ referet longitudinem umbræ, &c. Num. XXXVI.

2. Sed nec opus eſt, cuilibet Plano examinando ſtylum infigere: poterimus Inſtrumento uti ad id jam præparato, omnibusque indifferenter Planis applicando, quale (exempli gratia) pro Planis verticalibus eſſe poteſt gemina norma CAB & EFG, *Fig.* 1. quarum illa ſit crurum æqualium, & utrique cruri inſcriptas habeat diviſiones ſinuum pro ſingulis gradibus, ſumpta longitudine alterutrius cruris pro radio; in concurſu vero crurum erectum normaliter ſtylum AD, cujus longitudo ſit æqualis radio. Volens enim explorare declinationem Plani verticalis, applica alterutrum normæ hujus latus lineæ perpendiculari in Plano ductæ IH, ſic ut umbra de ſtylo ſparſa AL utrique cruri interjaceat: dehinc volve alterius normæ GFE crus brevius FE ſuper linea perpendiculari Plani IH ſurſum deorſumve, donec crus longius FG (quod capiat diviſiones tangentium ad 60° vel 70°) *Fig.* 2. tranſeat per apicem umbræ; tum enim gradus abſciſſi FL exhibebunt declinationem Plani a verticali Solis: hos ipſos gradus numera ſimul in crure horizontali normæ BAC, atque in fine numerationis applica illi crus brevius normæ GFE, ſic abſcindet umbra gnomonis in crure longiori gradus altitudinis Solis.

3. Obſervatio non inſtituatur prope meridiem, aut Sole multum elevato, ſed duabus tribuſve horis ante vel poſt, tempore & loco, ubi paralleli Solis ſunt maxime declives: quia error unius minuti prope meridiem integros gradus in azimutho involvere poteſt.

4. Pro operationis certitudine conſultum eſt, eodem aut differentibus diebus, illam ter quaterve repetere; cum vix caveri poſſit, ne in ſingulis aliquot minutorum differentia reperiatur: Quare tum inter omnes declinationes mediam aſſumere expediet.

ANNO-

Digitized by Google

Num. XXXVI.

ANNOTATIO.

Tab. XII. b No. 36.

HÆc inveniendæ cujuſque Plani propoſiti declinationis ratio tota pendet ex Trigonometria Sphærica. Sit (*Fig.* 1.) Planum propoſitum verticale ZHNR; SP ſtylus, quem ad Sphæram uſque Solis productum fingimus, ut ibi deſignet P, polum Plani; HR, linea horizontalis per quam ducatur planum HPR horizontale; ZN, linea verticalis, per quam planum ZPN verticale, in quo ſignentur Z, Zenith, & N, Nadir.

Igitur I. *Si nulla umbra*; Sol eſt in P.

II. *Si umbra perpendicularis*, Sol ponitur in Ω, ejuſque altitudo PΩ.

III. *Si umbra horizontalis*, Sol ponitur in A, ejus verticalis ZA; declinationem Plani a verticali Solis PZA metitur arcus PA.

IV. *Si umbra obliqua*, Sol ponitur in O; ubi PO, diſtantiam Solis a polo Plani; OA altitudinem ejus; OPZ angulum perpendicularis & umbræ quæ in plano MOP per Solem & ſtylum ducto ſpargitur; denique OZP, declinationem Plani a verticali Solis deſignat, atque inſtituta Trianguli ZOM, in M rectanguli; Analyſis juxta vulgares Trigonometriæ ſphæricæ regulas, Autoris noſtri Analogias ſuppeditat.

Sit deinde Planum propoſitum reclinatum HBRC (*Fig.* 2) SP ſtylus, P Polus plani; HR linea horizontalis, & BC huic perpendicularis in plano ducta, per quas agantur Plana propoſito perpendicularia HPR, & BPC, quod erit verticale. Sit præterea HIR horizon; Z, Zenith; unde IC, vel ZP, reclinatio Plani.

Et I. *Si nulla umbra*, Sol exiſtit in P, ejus altitudo PI, complem. IC, vel PZ.

II. *Si umbra perpendicularis deorſum*, Sol in D; ejus altitudo DI $=$ DP $+$ PI; vel Sol in Δ, ejus altitudo $=$ Semic. minus ΔI [ΔP $+$ PI]

III. *Si umbra perpendicularis ſurſum*; Sol in *d*, ejus altit. *d*I $=$ PI $-$ P*d*.

IV. *Si umbra horizontalis*, Sol erit in *o*, & Analyſis Trianguli rectanguli ZP*o*, dat Autoris noſtri analogias.

V. *Si umbra obliqua*, Sol erit in O vel in Ω, & ex conſideratione Trianguli ZPO, vel ZPΩ, eruitur Analogia prima. Reliquæ tres, α, β, γ, habentur, demittendo OD, vel Ω*d* perpendiculariter in BDC. Eſt enim PD vel P*d*, ſegmentum illud, quod ex Analogia α invenitur.

Deni-

Digitized by Google

Denique ſit Planum inclinatum, *Fig. 3.* in qua eadem eiſdem literis quibus in 2ª. deſignantur, niſi quod hic, Horizontis HAR pars ſuperior, una cum Zenith, lateat, Nadir N conſpiciatur, & PI ſit Plani inclinatio. Num. XXXVI.

I. *Si umbra perpendicularis*, Sol eſt in D, ejus altitudo DI = PD — PI.

II. *Si umbra horizontalis*, Sol eſt in H, vel R,

III. *Si umbra obliqua*, Sol eſt in O, & Analyſis Trianguli NOP dat Analogiam primam.

Reliquæ α, β, γ, habentur, demiſſo arcu OD ad BDC perpendiculari. Hic enim reſecat ſegmentum PD, cujus magnitudo per Analogiam α ſupputatur.

Quæ ſequuntur nihil habent difficultatis.

No. XXXVII.

VERA CONSTRUCTIO GEOMETRICA PROBLEMATUM SOLIDORUM ET HYPERSOLIDORUM,

Per rectas lineas & circulos.

Auctore JACOBO BERNOULLI.

Quadratura circuli, Inventio quarundam mediarum proportionalium inter datas rectas, Cubi Duplicatio, Triſectio Anguli, &c. Problemata fuere, ab omni retro memoria, vexatiſſima & antiquitus uſque adeo celebratiſſima. Inter *Acta Erud. Lipſ. 1689. Sept. pag. 454.*

 illa,

Digitized by Google

Num. XXXVII. illa, hoc intercedere notatur diſcriminis, quod Circuli Tetragoniſmus nullatenus, vel calculo exhiberi, vel conſtructione accurata confici, huc uſque potuit; dum cætera conſtrui quidem poſſunt, ſed ita ut ad ipſorum conſtructionem requirantur lineæ, quas Veteres, ob difficilem & incommodam earum delineationem, non omnino in Geometriam admittere auſi fuerunt: quapropter præſtantiſſimi omnium ſeculorum Geometræ, in rei arduæ molimine quærentes gloriam, eo ſemper omnes ſuas vires intenderunt, ut tum circulum, ſi qua poſſent arte, quadrarent, tum reliqua memoratorum Problematum, linearum rectarum & circulorum ope, conſtruerent. Quorum tamen utrumque pari difficultate involutum ſenſerunt; quouſque a perſpicacioribus ingeniis omnimoda utriuſque impoſſibilitas, hoc noſtro ævo, detecta fuit. Hac itaque viſa, alia ſibi incedendum eſſe via rati ſunt; cumque Circuli exactum valorem uno aliquo numero exhiberi poſſe impoſſibile ducerent, eundem ſaltem per ſeriem infinitorum numerorum exprimere ſunt annisi; qualem omnium primus initio horum *Actorum* vulgavit Celeberrimus LEIBNITIUS. Ei, quod hic in quadrando circulo præſtitit, ſimile nunc ego quiddam, circa reliqua illa, & in genere circa omnia ſolida, multaque etiam hyperſolida Problemata aggredior; & quod circini normæque ope, una aliqua conſtructione, accurate conſequi hactenus non licuit, hoc per ſeriem, ut ſic dicam, conſtructionis, certa lege in infinitum continuandæ, exequor; eaque ratione id obtineo, ut quæſitæ radici ita continuo magis magiſque appropinquetur, ut error tandem data quavis quantitate minor fiat; totaque adeo conſtructionis ſeries exactum ejus valorem exprimere debeat.

Notum, omnes æquationes cubicas, ad quas Problematum ſolidorum difficultates referuntur, ad unam harum formularum reduci poſſe: $x^3 = -apx + aaq$, $x^3 = -apx - aaq$, $x^3 = +apx + aaq$ & $x^3 = +apx - aaq$; quarum prima habet unam radicem veram, altera unam falſam, tertia unam veram cum duabus falſis, & quarta unam falſam cum duabus veris.

I. *Pro*

1. *Pro invenienda Radice vera Æquationis* $x^3 = -apx + aaq$, *aut falſa hujus* $x^3 = -apx - aaq$. Num. XXXVII.

Constr. Ductis (*Figura* 1.) indefinitis rectis BP, GV, normaliter ſe decuſſantibus in puncto A, aſſume in earum una $AH = a$, & ex eadem parte $AG = \frac{1}{2}p$; in altera $AB = q$, & in parte oppoſita punctum utcunque P; tum ita perge: Fig. 1.

Diametro	BP	deſcrib. arcus circuli ſecans AV in	V	& ipſi	AV	fiat =	AC	diſtantiæque	GC	ſumatur =	GL	diametroque	HL	deſcrib. arcus circuli ſecans AP in	Q
	BQ		X		AX		AD		GD		GM		HM		R
	BR		Y		AY		AE		GE		GN		HN		S
	BS		Z		AZ		AF		GF		GO		HO		T, &c.

Ubi obſervandum, quod ſi punctum P caſu ſic aſſumptum fuerit, ut, facta deinceps circini revolutione, punctum Q coincidat cum puncto P; erit AP, vel AQ, ipſa quæſita radix accurata: ſin minus, rectæ AP, AQ, AR, AS &c. ad verum valorem radicis continuo magis magiſque, & tandem data quavis quantitate propius accedent.

2. *Pro invenienda Radice vera Æquationis* $x^3 = +apx + aaq$ *aut falſa hujus*, $x^3 = +apx - aaq$.

Conſtructio (*Figura* 2.) eadem, quæ præcedens, niſi quod AH & AG ad partes oppoſitas ſumendæ, & GL, GM, GN, &c. non deorſum verſus A, ſed ſurſum abſcindendæ ſunt: qua ratione lineæ AP, AQ, AR &c. valori radicis, ut prius, magis magiſque appropinquabunt. Fig. 2.

3. *Pro inveniendis Radicibus falſis Æquationis* $x^3 = +apx + aaq$ *aut veris hujus* $x^3 = +apx - aaq$.

Fiat, ibidem $Ab = AB$, ſumptoque AR quam minimum & inſenſibiliter differre a radice vera prioris, aut falſa poſterioris æquationis, (prout illa per præcedentem conſtructionem reperta fuit) jungatur RH, eique parallela ducatur bh, factiſque $As = \frac{1}{2}AR$, & $Ag = Ah$, diametro gH deſcribatur arcus circuli

Num. XXXVII. culi ſecans AP in *l*, aliuſque centro *s* radio A*s*, quem ſecet, vel tangat recta *lq* parallela ipſi AG in punctis *p* & *q*; eruntque *lp*, *lq*, binæ radices quæſitæ.

Nota. Si circulum centro *s* deſcriptum non ſecet, vel tangat recta *lq* (quod fit, cum ultimus æquationis terminus major eſt quarta parte cubi, aut quantitas cognita penultimi minor tribus quartis partibus quadrati radicis AR; aut etiam cum quadratum ſemiſſis ultimi majus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi:) indicio eſt, duas reliquas radices eſſe imaginarias.

Fig. 3. *Aliter per peculiarem constructionis ſeriem:* Fiant eadem, quæ ſupra, (*Figura* 3.) niſi quod rectæ AC, AD, AE &c. (A*c*, A*d*, A*e* &c.) non jam capiendæ ſunt in linea AB, ſed applicandæ ſemicirculo ſuper diametro AG deſcripto; diſtantiiſque GC, GD, GE &c. æquales abſcindendæ GL, GM, GN &c. ſurſum pro majore radicum quæſitarum (ſaltem in primo ſequentium caſuum:) & ipſis G*c*, G*d*, G*e* &c. æquales G*l*, G*m*, G*n* &c. deorſum pro minore: Ubi cavendum, ne punctum P [*p*] quod conſtructionem inchoat, aſſumatur, vel prope, vel remote nimis a puncto A; fieri enim poſſet, ut ſic aſſumptum alterutram rectarum AC vel AD [A*c*, A*d*] majorem exhiberet, quam quæ circulo inſcribi poſſet: facile autem aſſignari poſſunt limites, intra quos ſi capiatur punctum P, id incommodi evitabitur; nam

Fig. 4. 1. *Si Quadratum ultimi termini minus eſt Cubo ſemiſſis quantitatis cognitæ penultimi:* Sumatur (*Fig.* 4.) ad BA & AG tertia proportionalis AM, ut & tertia ad HA & inventam AM, quæ ſit AL, major ſcilicet futura ipſa AG; hinc ſemicirculo applicetur GC = GL, junctaque AC quæratur tertia proportionalis ad AB & AC, quæ ſit AN: eruntque puncta M & N limites, quos intra quodvis punctum accipi poterit pro invenienda radice majore: pro minore nullo indigemus limite ex parte A, ſed quodvis punctum inter A & M pro initio conſtructionis accipi poterit; quod & de radice majore intelligendum, quando ipſa GL major eſt, quam ut ſemicirculo inſcribi poſſit.

2. *Si*

2. *Si Quadratum ultimi termini æquale eſt Cubo ſemiſſis quantitatis cognitæ penultimi*; limites M & N indiſtantes fiunt; proinde ipſa AM vel AN eſt radix major. Num. XXXVII.

3. *Si Quadratum ultimi termini majus eſt Cubo ſemiſſis quantitatis cognitæ penultimi*, radix major conſiſtit in indiviſibili, hoc eſt, quo diutius continuatur conſtructio, eo longius ex utraque parte ab ejus genuino valore receditur: quare tum ſola minor appropinquando inveniri poterit: qua tamen cognita, nec major latebit amplius; quandoquidem ambarum ſumma tertiam radicem, ſupra per conſtructionem figuræ ſecundæ inventam, perpetuo, ut notum eſt, in iſtis æquationibus æquat. Sumpto igitur rectam AR huic tertiæ radici proxime accedere, ut ſtatuminentur porro limites pro invenienda altera, biſecetur AR; poteritque punctum quodvis in ſiniſtra ejus medietate acceptum pro operationis initio ſtatui.

4. *Si denique Quadratum ſemiſſis ultimi termini æquet Cubum trientis quantitatis cognitæ penultimi*, erit quæſita radix utraque æqualis ſemiſſi rectæ AR: *ſin Cubum hunc ſuperet*, conſtat utramque eſſe imaginariam; quare nec per hanc conſtructionem ulla inveniri poteſt.

Cæterum obſervare non injucundum, quo pacto in omnibus iſtis conſtructionibus rectæ AP, AQ, AR, AS &c. [*Ap*, *Aq*, *Ar*, *As* &c.] (*fig.* 1. 2. 3) continuis, vel incrementis, vel decrementis, vero radicum valori appropinquant; præterquam pro ſola radice majore figuræ tertiæ, ubi alternis, nunc decrementis, nunc incrementis ad ejus valorem accedunt: ſic ut verus radicis valor ibi exprimatur per ſeriem infinitam: AP + PQ + QR + RS &c. vel AP — PQ — QR — RS &c. hic per ſeriem: AP + PQ — QR + RS — ST &c.

Quemadmodum vero nulla jam dari poteſt æquatio cubica, quæ non eo reduci poſſit, ut juxta allata præcepta, ſolius circini & normæ ope, conſtrui queat; ita ſimiles omnino afferre poſſem regulas pro conſtructionibus æquationum quatuor dimenſionum, ſi Lectori voluptatem eaſdem proprio marte eruendi præripere vellem. Unam exempli loco dabo, pro æquatione $x^4 * + apxx -$

 $aaqx$

Num. XXXVII. $aaqx - a^3 r = 0$, ad quam conſtruendam eadem prorſus obſervanda, quæ fieri jubentur in *figura* 1. niſi quod inſuper in recta BP abſcindenda eſt, ex A, in alterutram partem recta A*r*, quæ ſit media proportionalis inter *a* & *r*; & tum rectæ AC, AD, AE &c. non ipſis AV, AX, AY &c. ſed diſtantiis *r*V, *r*X, *r*Y &c. æquales capiendæ.

Subjungo nunc applicationem novæ hujus conſtruendi methodi ad nobiliſſimum Problema de Inventione quarundam mediarum proportionalium.

Fig. 5.

α. Invenire duas medias proportionales inter duas datas: (Fig. 5.)

Constructio: Ductis normalibus indefinitis CB, NR, ſeſe ad rectos angulos ſecantibus in A; abſcindantur ex earum una rectæ AC, AB, æquales datis: quo facto

Dia-me-tro.	BC - -	def-crib. arcus circu-li ſe-cans	AN - -	in	N - -	ipſi-que	AN - -	fiat =	AH - -
	- - CH		- - AR		- - R		- - AR		- - AD
	BD - -		AN - -		O - -		AO - -		AI - -
	- - - CI		- - AR		- - S		- - AS		- - AE
	BE - -		AN - -		P - -		AP - -		AL - -
	- - CL		- - AR		- - T		- - AT		- - AF
	BF - -		AN - -		Q - -		AQ - -		AM - - &c.

Hac ratione rectæ AD, AE, AF &c. magis magiſque appropinquabunt primæ & rectæ AH, AI, AL, &c. ſecundæ duarum mediarum proportionalium inter datas AC & AB; quouſque eaſdem poſt infinitam operationis ſeriem præciſe aſſequantur.

Fig. 6.

β. Invenire quatuor medias proportionales: (Fig. 6.)

Dia-me-tro	BC	def-crib. arcus circu-li ſe-cans ANin	N	ipſi-que	AN	fiat =	AH	Hinc quæratur per præcedent. prima 2 med. proport. inter AC &	AH	quæ ſit	AD	
	BD		O		AO		AI		AI		AE	
	BE		P		AP		AL		AL		AF	&c.

Hac

Hac ratione ipſæ AD, AE, AF &c. accedent primæ & AH, Num. AI, AL &c. tertiæ quæſitarum quatuor proportionalium inter XXXVII. AC & AB,

γ. Invenire ſex medias proportionales: (Fig. 7.) Fig. 7.

Datæ ſint, ſicut antea, CA, & AB; & fiat AQ = AC; tum vero

	BC - - - -	def-	AN - - - -		N - -		AN		AH
Dia-	- - CH - -	crib.	- - AR - -		- R -		- -		- -
me-	- - - - QR	arcus	- - - - AC	in	- - D	ipſi-	- -	fiat	- -
tro	BD - - - -	circu-	AN - - - -		O - -	que	AO	=	A I
	- - CI - -	li ſe-	- - AR - -		- S -		- -		- -
	- - - - QS	cans	- - - - AC		- - E		- -		- -, &c.

Quo pacto ipſæ AD, AE &c. appropinquabunt primæ; AR, AS &c. ſecundæ; & AH, AI &c. quartæ ſex mediarum proportionalium.

In pleriſque harum, ut & ſuperiorum conſtructionum, hoc peculiare annotamus, quod delineatis ſemel normalibus indefinitis, & abſciſſis rite datis, cætera conſtructio, ſeu appropinquatio, fieri poſſit, ut circinus non amoveatur e charta, ſed perpetuo alternis ſuper illa pedibus incedat, & quaſi in orbem ambulet; ſi modo concedatur rectæ biſectio mechanica, quæ nunc aperiendo, nunc claudendo circinum, peragitur.

Obſervandum etiam, non neceſſum eſſe, ut diametro CB arcus deſcribatur, ad determinanda puncta H & D: poteſt enim alterutrum horum, initio ſtatim operationis, accipi ad lubitum, & ab illo inchoari conſtructio: & quidem ſi conſtructionem compendifacere deſideres, poteris rectas AH vel AD tales aſſumere, quas, judicio oculorum, æſtimaveris, aut aliunde ſciveris, quæſitis proportionalibus quam proxime accedere.

Qualeſcunque vero aſſumantur; plerumque paucæ admodum circini revolutiones requiruntur, ut error penitus inſenſibilis evadat: adeo ut, præter geometricam hujus negotii ἀκρίβειαν, ad ipſam quoque praxim mechanicam vix quicquam accuratius & expe-

Digitized by Google

Num. XXXVII. expeditius dari poſſit: quod ſi quis ſecum rite penſitaverit, fatebitur, & hoc invento, non levem Geometriæ acceſſionem factam eſſe.

ANNOTATIO.

Harum conſtructionum fundamentum videſis N°. LIV. Propp. 29-35. ex quo non difficile eſt ſingulas demonſtrare. Videri etiam poteſt *March.* HOSPITALII *Tractatus Analyticus de Sectionibus Conicis*, Lib. IX. Prop. 12. pag. 351-358.

N°. XXXVIII.

NOVUM THEOREMA PRO DOCTRINA SECTIONUM CONICARUM,

Per JAC. BERNOULLI.

Act. Erud. Lipſ. 1689. Nov. p. 586

MIRUM eſt, in materia Veteribus ac Recentioribus adeo trita, relictum eſſe aliquid, quod eorum induſtriam adhuc effugerit; præſertim proprietatem adeo generalem, cujuſmodi eſt hæc, quæ ſequitur:

Si in triangulo per axem coni ACD, demittatur a vertice in baſin perpendicularis AI, & ex ea abſcindatur AN, æqualis perpendiculari AB, ex eodem vertice A in diametrum ex generatione coni-ſectionis HO demiſſæ; ac per N agatur FE parallela

lela baſi, ſecans crura trianguli per axem in F & E, erit FE Latus Rectum coni-Sectionis. Num. XXXVIII

DEMONSTRATIO.

Ducantur AQ & AL parallelæ diametro HO & baſi CD, quarum prior ſecet ipſam FE in G; eruntque Triangula FAG, HAL, HCO, ut & AGE, MLA, MOD, ſimilia: ſed & AL $=$ AG [eſt enim angulus LAN $=$ angulo BAG, demptoque communi BAN, angulus LAB $=$ NAG; præterea anguli ABL, ANG, recti, & latus AB $=$ lateri AN, ac propterea Triangula ABL, ANG ſimilia & æqualia] Hinc

1. In *Parabola.* FG : AF $=$ AL [AG] : AH ; quare Rectangulum FAG $=$ AH $\times$ FG. Sed, ex APOLLONIO *, Rect. FAG [AH $\times$ FG] : FG^2 [$=$ AH : FG] $=$ AH : R [Latus rectum Parabolæ.] Ergo FG vel FE $=$ R. *Q. E. D.*

Idem ex alia proprietate Parabolæ : HO : CO $=$ AG [AL vel OQ] : FG. Hinc HO $\times$ FG $=$ COQ $=$ OP^2 $=$ [ex natura Parabolæ] HO $\times$ R. Ergo FG vel FE $=$ R. *Q. E. D.*

2. *In Hyperbola & Ellipſi:* FG : AG $=$ AL : LH (unde FG $\times$ LH $=$ GAL.) Item AG : GE $=$ ML : AL; quare *ex æquo perturbate*, FG : GE $=$ ML : LH; &, *componendo* ſeu *dividendo*, FE : GE $=$ MH : LH; *permutandoque* FE : MH $=$ GE : LH $=$ FGE : FG $\times$ LH [GAL ſeu GA^2] $=$ R : MH, ex APOLLONIO †. Ergo FE $=$ R. *Q. E. D.*

Idem ex alia proprietate harum Sectionum:

GE : AG $=$ LA : ML, & AG : FG $=$ LH : LA, unde *perturbate* & *compoſite*, vel *diviſim*, ut antea, *permutandoque* FE : MH $=$ GE : LH $=$ GE : AG $+$ AG [AL] LH $=$ OD : MO $+$ OC:

* Conic. I. 11.
† Conic. I. 12. & 13.

Num. XXXVIII $OC : HO = COD [OP^2] : MOH = R : MH$, ex natura Sectionum. Ergo $FE = R$. *Q. E. D.*

3. *In Circulo* baſi ſubcontrarie poſito, res evidentior eſt, quam ut demonſtratione indigeat.

Demonſtratio univerſalis pro omnibus ſectionibus.

Ducatur HZ baſi parallela, ſecans ipſam AQ in X; eritque $HZ : FE = HX [LA$ ſeu $AG] : FG = HO : OC = HZ : R$; per ea quæ habet WALLISIUS in *Tractatu de Sectionibus Conicis* pag. 28. 37. & 43. Ergo $FE = R$. *Q. E. D.*

Corollarium I. Si centro A, radio quocunque AB, in plano trianguli per axem, deſcriptus ſit circulus, & circa illum rotetur planum BO, tangens ſubinde ejus peripheriam, ſecansque baſin coni ſecundum rectam OP, quæ baſi trianguli per axem perpendicularis eſt, omnes hac rotatione genitæ Coni-Sectiones, ſive Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipſes, ſive denique Circuli, idem habebunt Latus rectum, æquale videlicet rectæ FE.

Corollarium II. Quia $AI : CD = AN [AB] : FE [R]$; ſequitur, in quavis Coni-Sectione, Latus rectum eſſe quartam proportionalem ad AI, CD & AB. Unde, vel ex hoc indicio, colligo, nihil hucuſque conſtitiſſe Conicorum Scriptoribus de hoc Theoremate; cum non veriſimile ſit, illos (ſi ſciviſſent) deſignaturos fuiſſe rationem Parametri ad aliam rectam, per rationem Quadrati CD ad Rectangulum CAD (ut in Parabola) aut Rectanguli CQD ad Quadratum AQ (ut in Hyperbola & Ellipſi,) quam tamen per ſimplicem rationem rectarum conſtantium CD & AI, & quidem univerſaliter in quavis ſectione, characteriſare potuiſſent.

Cum Fratri hæc aperuiſſem, mox eadem ſuis quoque demonſtrationibus munivit; quas, quia non inconcinnæ mihi viſæ ſunt, hic ſubjungam; quod in novo Theoremate facile merebitur veniam:

1. *In Parabola*: $FG : HX = AG [HX] : AX$; proinde HX^2

Digitized by Google

$HX^2 = FG \times AX$; eſt autem * $HA : R = HA \times AX : HX^2$ [$FG \times AX$] $= HA : FG$. Ergo FG vel $FE = R$. *Q. E. D.* Num. XXXVIII

Aliter. $AH : FG = AH : HX + HX : FG = AF : FG + HX$ [AG] $: FG = AF \times AG : FG^2 = AH : R$*. Ergo $FG = R$. *Q. E. D.*

2. *In Hyperbola & Ellipſi.* $MH : FE = MH : HZ + HZ : FE = AG : GE + AX : AG$ [HX] $= AG : GE + AG : GE = AG^2 : EGF = MH : R$†. Ergo $FE = R$. *Q. E. D.*

* *Apollon.* Conic. I. 11.
† *Apollon.* Conic. I. 12. & 13.

N°. XXXIX.

JACOBI BERNOULLI

ANALYSIS

PROBLEMATIS ANTEHAC PROPOSITI.

De Inventione Lineæ deſcenſus a corpore gravi percurrendæ uniformiter, ſic ut temporibus æqualibus æquales altitudines emetiatur: & alterius cujuſdam Problematis Propoſitio.

SOlutionem Problematis nudam dedit Illuſtriſſimus HUGENIUS in *Novellis Roterodami:* Hanc poſtea excepit in *Actis Lipſ.* A. 1689. p. 195. *ſeqq.* Celeberrimi Auctoris * De- *Acta Erud. Lipſ. 1690. Mai. p. 217*

 mon-

* G. G. LEIBNITII.

Num. XXXIX. monſtratio Synthetica. Analyſin, quam ſuppreſſit uterque, ipſius Auctoris calculo differentiali inſtitutam nunc pando; cum in finem, ut Virum Celeberrimum ad par officii genus publico præſtandum, tentandamque, ſua Methodo, Problematis deinceps proponendi ſolutionem invitem.

Intelligatur grave demiſſum ab A per curvam quæſitam BFG, in qua ſumptæ ſint particulæ infinite parvæ, adeoque pro rectis habendæ, DG, FH, altitudinum æqualium GI, HL; eæque producantur in M, N, ut fiant Tangentes GM, HN; ipſique HN parallela ducatur GP. Celeritates gravis acquiſitæ in G & H eædem ſunt cum iis quas acquireret, deſcendendo perpendiculariter, ab eadem linea horizontali AC, per rectas CG, EH, quæ quidem ſunt ut quadrata ipſarum celeritatum, ut notum, Quibus poſitis,

CG eſt ad EH, ut quadr. celeritatis in G, ad quadr. celeritatis in H, ut DG*q* ad FH*q*, ut DG*q* ad GI*q* & GI*q* [HL*q*] ad FH*q*, ut GM*q* ad GC*q* & HE*q* ad HN*q*, ut GM*q* ad GC*q* & GC*q* ad GP*q*, ut GM*q* ad GP*q*. Unde Problema, ad puram Geometriam reductum, huc redit: Datis poſitione recta AC, & puncto A; invenire curvam BHG talem, ut applicata CG ad applicatam EH rationem habeat duplicatam ejus, quam habet tangens GM ad rectam GP parallelam tangenti HN. Patet autem, rectam AC, ad quam applicantur CG, EH, non poſſe eſſe axem curvæ, nec A verticem: cum alias applicata ad punctum A evaneſceret, ac proinde applicatarum ratio fieret infinite magna, ejuſdem ſubduplicata manente finita. *Q. E. Abſ.*

ANA-

Num. XXXIX.

ANALYSIS.

$$\begin{array}{l|llll} CG = a & HL : & HF = & GC : & GP \\ GM = b & dy : & \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = & a : & \frac{a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} \\ AE = x & CG : & EH = & GMq : & GPq \\ EH = y & a : & y = & bb : & \frac{aadx^2 + aady^2}{dy^2} \end{array}$$

$$a : y = bbdy^2 : aadx^2 + aady^2.$$

$$bbydy^2 = a^3dx^2 + a^3dy^2$$

$$bbydy^2 - a^3dy^2 = a^3dx^2$$

$$dy\sqrt{(bby - a^3)} = dx\sqrt{a^3}$$

Ergo & horum Integralia æquantur, nempe, $\frac{2bby - 2a^3}{3bb}\sqrt{(bby - a^3)} = x\sqrt{a^3}$; poſitoque $y - a^3 : bb = z$, habetur $\frac{2}{3}z\sqrt{bbz} = x\sqrt{a^3}$, vel $\frac{4}{9}bbz^3 = a^3xx$, & $z^3 = 9a^3xx : 4bb$. Quare demiſſa ex A perpendiculari $AB = a^3 : bb$, ductaque BR parallela ipſi AC, ſi vertice B, axe BR, & latere recto $9a^3 : 4bb$, ſeu $\frac{9}{4}$AB, deſcribatur Curva paraboloidica BHG, ejus naturæ, ut ſolidum ex latere recto in quadratum abſciſſæ æquetur cubo applicatæ; habetur quæſitum. Porro, quia per Curvam BHG deſcendens grave temporibus æqualibus æquales altitudines percurrit; tantundem eſt quoad deſcenſus altitudinem, ac ſi celeritate in B acquiſita deinceps uniformiter deſcenderet per BS; quo caſu conſtat, eodem tempore, duplo plus ſpatii confici, quam conficitur motu a quiete æqualiter accelerato: adeoque ſi BS dupla ſumatur ipſius AB, fore tempus deſcenſus per BH, poſt AB, æquale tempori per AB.

Digitized by Google

Num. XXXIX.

PROBLEMA

Viciſſim proponendum hoc eſto :

Invenire, quam curvam referat funis laxus & inter duo puncta fixa libere ſuſpenſus.

Sumo autem, funem eſſe lineam in omnibus ſuis partibus facillime flexilem. *

* Problematis iſtius, quod primum fere dubitantes Geometras uſum Calculi *Leibnitiani* docuit, ſolutiones dederunt, in *Actis Erudit.* 1691. Jun. pag. 273-282, Viri præſt. LEIBNITIUS, HUGENIUS, *Joh.* BERNOULLIUS. Proxime ſecuta ſunt Problemata Velariæ & Linteariæ, quæ omnia diverſis inveſtigari poſſunt mediis. Methodum Auctoris noſtri, a Fraterna, quam expoſiturus ſum, haud adeo diſſimilem fuiſſe, non temere conjectari licet.

TAB. XVIII. *b.* N°. 39. LEMMA. *Si filum perfecte flexile*, (Fig. 1) ABCDEFGHI, *in punctis* A & I *affixum, incurvetur in polygonum a potentiis quotlibet* BK, CK, DK, EK, FK, GK, HK, *quæ ſint omnes in æquilibrio: Dico, æquilibrium non turbari, ſi, ablata fili portione quavis* CDEFG, *& potentiis* CK, DK, EK, FK, GK *ipſi applicatis, producantur fila* BC, HG, *ad mutuum concurſum* T, *ibique applicentur potentiæ* TX, TV, *quarum illa*, TX, *verticalis æqualis ſit ſummæ potentiarum verticalium*, CL + DL + EL + FL + GL; *hæc*, TV, *horizontalis æqualis ſit ſummæ horizontalium* CM + DM + EM — FM — GM, *in quas ablatæ potentiæ*, CK, DK, EK, FK GK, *reſolvi poſſunt.*

Nota, per ſummam potentiarum horizontalium intelligi ſummam earum quæ in unam partem trahunt, demta ſumma illarum quæ trahunt in partem oppoſitam, & pariter, per ſummam verticalium, intelligi exceſſum ſummæ earum quæ trahunt deorſum ſupra ſummam earum, ſi quæ ſint, quæ trahunt ſurſum.

Nota etiam, reſolutionem potentiarum quæ in horizontales & verticales facta eſt, in laterales quaſvis, potuiſſe fieri, modo omnes CL, DL, EL, &c. TX; item CM, DM, EM, &c. TV, ſint inter ſe parallelæ.

DEMONSTR. Repræſentent CP, GQ, tenſiones filorum CB, GH, eæque reſolvantur in horizontales & verticales tenſiones CN, CR; GO, GS. Igitur punctum T, tenſionibus CP, GQ, conjunctim trahitur, ſurſum, niſu CR + GS; horizontaliter verſus H, niſu GO — CN. Sed trahitur a potentia TX deorſum, a potent. TV horizontaliter verſus V. Datur ideo æquilibrium ſi TX = CR + GS, & TV = GO — CN. Id autem ita comparatum

ratum eſt. Nam, ſi reſolvantur ſingulorum filorum CD, DE, EF, FG tenſiones in horizontales & verticales; neceſſe eſt, quoniam tres potentiæ CP, CK, & tenſio fili CD, circa punctum C ſunt in æquilibrio, tenſionem verticalem CR fili CB æqualem eſſe potentiæ verticali CL ſimul, & tenſioni verticali fili CD; ac, propter æquilibrium circa punctum D, tenſionem vertical. fili CD æqualem eſſe pot. DL & tenſioni vertic. fili DE, quæ etiam æquatur pot. EL & tenſioni vert. fili EF: hæc autem æqualis eſt pot. FL minus tenſione vert. fili FG, quæ tenſio, una cum pot. GL æquatur tenſioni vert. GS fili GH. Ergo $CR = CL + DL + EL + FL + GL - GS$, ſeu $CR + GS = [CL + DL + EL + FL + GL =] TX$. Similiter tenſio horizontalis CN fili CB, una cum pot. CM æqualis eſt tenſioni horiz. fili CD, & hæc tenſio, cum pot. DM æquatur tenſioni horiz. fili DE, quæ tenſio, cum pot. EM, æqualis eſt tenſioni horiz. fili EF: iſta vero æquatur pot. FM ſimul & tenſioni horiz. fili FG, quæ & potentiæ GM & tenſioni horizontali GO fili GH æqualis eſt. Ergo $CN + CM + DM + EM = FM + GM + GO$; unde $TV = [CM + DM + EM - FM - GM =] GO - CN$. *Q. E. D.*

Coroll. Completo Parallelogrammo TVZX erit TZ, media directio, & potentia æquipollens omn. pot. CK, DK, EK, FK, GK.

PROPOSITIO.

Num. XXXIX.

Sit filum perfecte flexile ab innumeris potentiis* BK, *in curvam* BAC *inflexum, quæritur curvæ natura.

Tab. XVIII. *b.* N. 35.

Sit AT [*Fig.* 2] tangens horizontalis Curvæ; AF, ipſi inſiſtens ad angulos rectos, axis; in quo, ſumta ad libitum abſciſſa AF dicatur x; FB ordinata, y; curva AB, z; potentia $BK = p\,dz$; ſinus totus $= 1$, ſinus anguli KBM, quem potentia BK cum horizonte conſtituit, s; ejus coſinus, vel ſinus anguli KBL, $\sqrt{(1 - ss)}$: adeoque potentiæ, verticalis $BL, p\,s\,dz$; horizontalis $BM, p\,dz\sqrt{(1 - ss)}$; quia BK, BL, & BM ſunt ut ſinus totus, ſinus ang. KBM, & ſin. ang. KBL. Igitur ſi, ducta tangente BT, capiatur $TV = \int psdz$, & $TX = \int pdz\sqrt{(1 - ss)}$; compleaturque parallelogrammum TVZX, erit TZ media directio, & potentia omnibus BK æquipollens.

Jam ſi tenſio fili in A dicatur a, potentia TA erit $a - TX = a - \int pdz\sqrt{(1 - ss)}$ potent. vero $TV = \int psdz$. Atqui, propter æquilibrium in T, potent. agentes ſecundum TA, TV, TB ſunt ut latera parallela $bE\ [dy]$, $BE\ [dx]$, $Bb\ [dz]$, trianguli BbE. Ergo $a - \int pdz\sqrt{(1 - ss)} : \int psdz = dy : dx$, hoc eſt, $a\,dx = dy\int p\,s\,dz + dx\int p\,dz\sqrt{(1 - ss)}$, quæ æquatio dabit curvæ BAC naturam.

Coroll. 1. Hinc etiam dabitur media directio & potentia æquipollens TZ.

Co-

Num. XXXIX. Coroll. 2. Tenſio fili Bb = $\frac{dz}{dx}\int ps\,dz$.

Ut ad ſpecialem caſum Funiculariæ vel Catenariæ deſcendamus, quoniam, hic, vires BK ſunt pondera, aut gravamina, particularum funis Bb; linea BK cadit in BL, evaneſcit angulus KBL, & ang. KBM rectus evadit. Unde fit $s = 1$, & $\sqrt{(1 - ss)} = 0$; quo ipſo, æquatio generalis mutatur in hanc $adx = dy\int p\,dz = Pdy$, (poſito P = ſummæ potentiarum).

Si P ſit functio data ipſius z, hoc eſt ſi funis gravamina [pdz] varientur utcunque, ſed relate ad funis longitudinem; erit $dz = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = \sqrt{(dy^2 + P^2 dy^2 : a^2)} = \frac{dy}{a}\sqrt{(aa + PP)}$ atque $dy = adz : \sqrt{(aa + PP)}$, & $dx = [Pdy : a] = Pdz : \sqrt{(aa + PP)}$. Ergo y & x functiones erunt ipſius z, datæ, ſaltem tranſcendenter. Aſſumpta igitur ad libitum z, dantur x & y & ipſa curva funicularia; ſaltem tranſcendenter.

Tenſio autem fili Bb = $\frac{Pdz}{dx} = \sqrt{(aa + PP)} = \frac{adz}{dy}$.

Exemplum. Ponamus funem uniformiter craſſum, proprio duntaxat pondere gravatum, qui caſus eſt Problematis ab Auctore propoſiti. Ergo $p = 1$, & $pdz = dz$, atque $P = [\int pdz =]\, z$. Igitur $dx = [Pdz : \sqrt{(aa + PP)}] = zdz : \sqrt{(aa + zz)}$ & integrando, $x + c = \sqrt{(aa + zz)}$. Quia vero abſciſſæ principium ponitur in A, erit $x = 0$, quando $z = 0$, unde fit $c = a$. Ergo $x + a = \sqrt{(aa + zz)}$, atque $z = \sqrt{(xx + 2ax)}$ & $dz = \frac{x + a}{\sqrt{(xx + 2ax)}}\,dx$. Igitur $dy = [adz : \sqrt{(aa + PP)} =]\; adx : \sqrt{(xx + 2ax)}$, æquatio eſt ad funiculariam vulgarem, quæ quoniam nequit integrari, indicio eſt curvam inter Mechanicas referendam eſſe.

Tenſio autem fili in B = $\sqrt{(aa + PP)} = \sqrt{(aa + zz)} = x + a$. Media directio TV, verticalis; Potentia æquipollens $= \int pdz = z$, pondus catenæ.

Quod ſi P non ipſius z, ſed ipſarum x, aut y ſit data functio, nihilominus naturam curvæ reperire licebit, quemadmodum N°. XLII. Nota g videre eſt.

Digitized by Google

N°. XL.

JACOBI BERNOULLI
QUÆSTIONES NONNULLÆ
DE USURIS,

Cum ſolutione Problematis de ſorte Aleatorum, propoſiti in Ephemerid. Gallic. *A.* 1685. *Art.* 25. *

Act. Erud. Lipſ. 1690. Mai. p. 219.

FRequens mos obtinet, ut qui alteri pecuniæ ſummam debet, & parato ære inſtructus non eſt, cum Creditore ſuo ita paciſcatur, ut, quod ſimul ac ſemel ſolvere nequit, hoc ſucceſſive & per partes ſolvere, ac interim dilationis nomine legitimam uſuram Creditori præſtare teneatur; ita quidem ut, quod quavis vice ultra debitam uſuram ſolvit, hoc in partem ſolutæ ſortis venire cenſendum ſit. Accidit autem poſt aliquod tempus, ut, perſoluta jam maxima parte debiti, alter ab altero debitæ & acceptæ pecuniæ rationes poſcat; quas aliter formet Creditor, aliter Debitor. Creditor hunc in modum:

Sors debita initio temporis - - - - - -	a
Hinc [poſito ſortem m tempore n parere uſuram p] uſura per tempus b - - - -	$abp:mn.$
Summa - -	$a+abp:mn$

Jac. Bernoulli Opera. Iii Exacto

* *Supra Num.* XIV.

No. XL. Exacto tempore b ſolvit Debitor - - - $f+abp:mn$

Reſiduum ſortis initio temporis c - - - - - $a-f$

Hinc uſura per tempus c - - - - $(acp-fcp):mn$

Summa - $a-f+(acp-fcp):mn$

Elapſo tempore c ſolvit Debitor - $g+(acp-fcp):mn$

Reſiduum ſortis initio temporis d, - - $a-f-g$

Hinc uſura per tempus d - - $(adp-fdp-gdp):mn$

Summa $a-f-g+(adp-fdp-gdp):mn$

Finito tempore d ſolvit Debitor $h+(adp-fdp-gdp):mn$

Reſiduum debiti ſub finem temporis d, in die præſenti rationum - - $a-f-g-h$

Debitor rationes ſuas ſic diſponit:

Tabula Debiti.

Sors debita - - - - - - - - a

Hinc uſura per tempus $b+c+d$, - $(abp+acp+adp):mn$

Summa debiti ad diem rationum - $a+(abp+acp+adp):mn$

Tabula Soluti.

Exacto tempore b ſolvi Creditori - - $f+abp:mn$

Hinc uſura per tempus $c+d$ ad diem uſque rationum - $(fcp+fdp):mn+(abcpp+abdpp):mmnn$

Finito tempore c ſolvi iterum - $g+(acp-fcp):mn$

Hinc uſura per tempus d ad diem præſentem - $gdp:mn+(acdpp-fcdpp):mmnn$

Hoc

Digitized by Google

Hoc ipſo die rationum ſolvo denuo $- h + (adp - fdp - gdp) : mn$ No. XL.

Summa ſoluti

$f + g + b + (abp + acp + adp) : mn + (abcpp + abdpp + acdpp - fcdpp) : mmnn$

Hæc ſi ſubtrahatur a ſumma debiti, remanet pro reſiduo debiti in diem præſentem, $a - f - g - h - (abcpp + abdpp + acdpp - fcdpp) : mmnn$

Hoc reſiduum, cum a Creditoris reſiduo $a - f - g - h$, differat, illoque minus ſit, tota quantitate $(abcpp + abdpp + acdpp - fcdpp) : mmnn$

Quæritur uter recte?

Reſpondetur facile: Creditoris rationes probas & genuinas, Debitoris vero erroneas eſſe, & in eo fallere, quod totum hoc, quod quavis vice ſolvit, in ſortem computet; cum ab illo prius detrahendum fuiſſet, quod ad eum uſque diem uſuræ nomine deberet.

Hinc fit, ut quantitas illa $(abcpp + abdpp + acdpp - fcdpp) : mmnn$, qua ambæ rationes differunt, præciſe exprimat uſuram, quam uſura Creditori perſoluta, ut ſors ſpectata, a die ſolutionis ad diem uſque rationum, parere poſſet; adeoque dum hanc ſibi remitti vult Debitor, uſuræ uſuram poſcere cenſendus eſt; quod regulariter in legibus prohibitum eſſe conſtat. Sed levia hæc ſunt, nec monuiſſem, niſi viderem ejuſmodi ſupputandi modum, qui in fraudem Creditorum vergit, Mercatoribus, ob commodiorem calculum, admodum ſolemnem eſſe.

Alterius naturæ hoc Problema eſt: Quæritur, ſi Creditor aliquis pecuniæ ſummam fœnori exponat, ea lege, ut ſingulis momentis pars proportionalis uſuræ annuæ ſorti annumeretur; quantum ipſi finito anno debeatur? Reſp. Si ſors vocetur a, uſura annua b, Creditori elapſo anno debebitur $a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2.3aa} + \frac{b^4}{2.3.4a^3} + \frac{b^5}{2.3.4.5a^4}$, &c. in infinitum; quæ ſumma major eſt, quam $a + b + bb : 2a$, ut patet: ſed minor quam $a + b + bb : (2a - b)$,

Digitized by Google

No. XL. $bb:(2a-b)$, quoniam $bb:(2a-b)$ eſt ſumma progreſſionis geometricæ $\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2.2\,a^2}+\frac{b^4}{2.2.2\,a^3}$, &c. quæ noſtra ſerie $\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2.3\,a^2}+\frac{b^4}{2.3.4\,a^3}$ &c. major eſt. Idcirco, ſi uſura ſit ſubvigecupla ſortis, ſeu $a=20$, & $b=1$, debebitur, poſt annum, plus quam $21\frac{1}{40}$, & minus quam $21\frac{1}{39}$: ſi $a=b$, debebitur plus quam $2\frac{1}{2}\,a$, & minus quam $3\,a$. Obſervo etiam, præſentem ſeriem in re geometrica ſuum uſum habere: nam ſi ad axem curvæ Logarithmicæ duæ rectæ applicentur, quarum minor dicatur a, ſitque portio axis inter utramque applicatam ad portionem ejuſdem inter applicatam quamcunque & reſpectivam tangentem, in conſtanti ratione b ad a: exprimetur major applicatarum per eandem hanc ſeriem $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2.3\,a^2}+$ &c. *

Porro Seriei hujus infinitæ occaſione recordor Problematis illius de ſorte Aleatorum, quod in *Ephemeridibus Gallicis*, A. 1685. Artic. 25. propoſui hunc in modum: Duo Aleatores A & B ludunt una teſſera; ea conditione, ut qui primus aſſignatum in illa punctorum numerum jecerit, vincat: A primo inſtituit unum jactum, & B unum, dein A duos jactus conſequenter, & B duos: hinc A tres, & B tres &c. Vel, A inſtituit unum jactum, dein B duos, hinc A tres, poſtea B quatuor &c. quouſque alteruter eorum vincat. Quæritur ratio ſortium? Hoc Problema cum fruſtra hactenus expectaverit ſolutionem, eandem, per ſeries infinitas, ſic exhibeo: Sors Colluſoris A ad ſortem Colluſoris B, in priori caſu, ſe habet, ut $1+(\frac{5}{6})^2+(\frac{5}{6})^6+(\frac{5}{6})^{12}+(\frac{5}{6})^{20}$ &c. $-\frac{5}{6}-(\frac{5}{6})^4-(\frac{5}{6})^9-(\frac{5}{6})^{16}$ &c. in poſteriori, ut $1+(\frac{5}{6})^3+(\frac{5}{6})^{10}+(\frac{5}{6})^{21}+(\frac{5}{6})^{36}$ &c. $-\frac{5}{6}-(\frac{5}{6})^6-(\frac{5}{6})^{15}-(\frac{5}{6})^{28}$ &c. ad unitatis complementum. Harum ſerierum termini repræſentant totidem poteſtates fractionis $\frac{5}{6}$, quarum indices creſcunt, diffe-

* Vide N[illegible] CI. Schol. Prop. 59.

differentiis ſervantibus inter ſe progreſſionem arithmeticam, cujus communis exceſſus ibi eſt binarius, hic quaternarius. * No.XL.

* Vide Artis Conjectandi Part. I. Append. Probl. 1. pag. 49-57.

N°. XLI.

SPECIMEN
CALCULI DIFFERENTIALIS
In dimenſione Parabolæ helicoidis, *Ubi de flexuris curvarum in genere, earundem evolutionibus, aliiſque.*

Per JAC. BERNOULLI.

CUm ex *Actis* nuperis conjecerim, Celeb. Dn. L. * Analyſin Problematis a ſe propoſiti, calculo ſuo differentiali inſtitutam, minime diſplicuiſſe; credidi nec ægre laturum ſequens illius ſpecimen, quod in gratiam Lectorum noſtrorum, quibus calculum hunc agitare volupe fuerit, in lucem emitto: ut, ſi forte mentem Viri acutiſſimi, ex iis quæ in *Actis* 1684. de Invento iſthoc ſuo edidit, ob ſummam brevitatem, non ſatis aſſecuti ſint; vel hinc ejus applicandi methodum diſcere poſſint. Quanquam ut verum fatear, qui calculum *Barrowianum*, (quem decennio ante in Lectionibus ſuis Geometricis † adumbra- *Act. Erud. Lipſ. 1691. Jan. p. 13.*

Iii 3 vit

* LEIBNITIO.

† Lectiones Opticæ & Geometricæ, *Auctore* IS. BARROW. Lond. 1674. 4°.

N. XLI. vit Auctor, cujuſque ſpecimina ſunt tota illa propoſitionum inibi contentarum farrago) intellexerit, alterum a Dn. L. inventum ignorare vix poterit; ut pote qui in priori illo fundatus eſt, & niſi forte in differentialium notatione, & operationis aliquo compendio, ab eo non differt.

Fig. 1. Cum axis vulgaris Parabolæ curvatur in peripheriam circuli BDM, curva BFGNA, quæ per extremitates applicatarum CF, DG, in centrum circuli A vergentium tranſit, dicitur nobis *Parabola helicoides*, vel ſi mavis, *Spiralis parabolica*; cujus propoſitum ſit inveſtigare tangentem LH, ſpatium curva comprehenſum, curvæ longitudinem, & flexuram, &c. Eſto hunc in finem $AB = r$, $BDMB = c$, Arcus $BC = x$, $CF = y$; & ducantur CL, AH, perpendiculares ipſi AC, ſitque CD particula circumferentiæ infinite parva, cui ſit ſimilis & concentricus arculus GE. Natura curvæ, $lx = yy$, adeoque $l\,dx = 2y\,dy$, & $dy : dx = l : 2y$.

I. *Tangens.*

$$AD : AG = DC : GE$$

$$r : r - y = dx : \frac{r - y}{r}\,dx$$

$$FE : GE = FA : AH = FC : CL$$

$$dy : \frac{r - y}{r}\,dx = r - y : \frac{(r - y)^2\,dx}{r\,dy} = y : \frac{(ry - yy)\,dx}{r\,dy}$$

Ut generalis expreſſionis fiat ſpecialis applicatio ad curvam propoſitam; ponantur loco dy & dx, ipſorum proportionalia l & $2y$ fietque $AH = (2y^3 - 4ryy + 2rry) : lr =$ (ſubſtituto lx pro yy) $2xy : r - 4x + 2ry : l$, & $CL = (2ryy - 2y^3) : lr = 2x - 2xy : r$

Maxima AH [aut CL] reperitur, ſi ejus differentiale, puta $(6yydy - 8rydy + 2rrdy) : lr$, [aut $(4rydy - 6yydy) : lr$,] æquetur nihilo: unde habetur $y = \frac{1}{3}r$ [aut $\frac{2}{3}r$,] ipſaque proin, tum AH, tum CL maxima $= 8rr : 27l$.

COROLL.

Coroll. Si ponatur latus rectum $l = rr : c$; ſcilicet, ut circumferentiæ integræ reſpondens applicata ſit ipſe radius (a), ut in præſenti ſchemate, erit AH vel CL maxima $= \frac{8}{27}c$. N. XLI.

Maximus angulus tangentis & applicatæ AFH, ſeu CFL invenitur ponendo rationem CL : CF ſeu $(2ry - 2yy) : lr =$ maximæ, hoc eſt, ejus differentiale $(2rdy - 4ydy) : lr = 0$; unde reſultat $y = \frac{1}{2}r$ ac proinde CL : CF $= r : 2l$. Speciatim vero in hypotheſi $l = rr : c$, exit $x = [yy : l = cyy : rr =] \frac{1}{4}c$, & CL : CF $= c : 2r$.

Coroll. Si in puncto I, ubi curva radium AM interſecat, ipſam tangat recta IK ſecans diametrum productam BAK in K; erit AK æqualis quartæ parti peripheriæ circuli. (b)

II. *Spatium.*

$(DC + GE) \times \frac{1}{2}DG = CDGE$, hoc eſt, $\frac{2rdx - ydx}{r} \times \frac{1}{2}y = \frac{2rydx - yydx}{2r} =$ [ſubſtituto $\frac{2ydy}{l}$ pro dx] $2yydy : l - y^3dy : lr$; cujus igitur integrale $2y^3 : 3l - y^4 : 4lr$, ſeu $\frac{2}{3}xy - lxx : 4r$ æquatur ſpatio curvilineo BFGDCB: quocirca, poſito $y = r$, fiet ſpatium totum BANGFBCDMB $= 5r^3 : 12l$, hoc eſt (in caſu $l = rr : c$) $\frac{5}{12}rc$; cumque circulus integer BDMB ſit $\frac{1}{2}rc$ ſeu $\frac{6}{12}rc$; erit dictum ſpatium ad circulum, ut quinque ad ſex; ideoque ſpatium reliquum BANGBA ſexta pars circuli.

III. *Longitudo Curvæ.*

$FGq = FEq + EGq = dy^2 + (rr - 2ry = yy)dx^2 : rr =$ [ſubſtituto

(a) Nam in æquatione $yy = lx = rrx : c$; quando $x = c$, y fit $= r$.

(b) In eadem ſcilicet hypotheſi $l = rr : c$. Tunc enim $x = \frac{1}{4}c$; $yy = rrx : c = \frac{1}{4}rr$, & $y = \frac{1}{2}r$, AH $= 2xy : r - 4x + 2ry : l = \frac{1}{4}cr : r - c + rr : l = \frac{1}{4}c - c + c = \frac{1}{4}c$.

N.XLI. ſtituto $2\,ydy : l$ loco dx] $(rrll + 4rryy - 8ry^3 + 4y^4)\,dy^2 : rrll$. Hinc FG $= dy\,\surd(rrll + 4rryy - 8ry^3 + 4y^4) : rl$; cujus quantitatis integrale, ſi dari poſſet, exhiberet longitudinem curvæ BFG; quæ tamen utcunque ſic cognoſcetur: Diametro AB deſcribatur ſemicirculus ATχB & abſcindatur A$\alpha = l$: hinc ductis perpendicularibus indefinitis quibuſlibet WV, ZY, æquidiſtantibus ab A & B, & ſecantibus peripheriam ſemicirculi in T & χ, agatur recta χTS, & juncta Sα, ſumtaque AK $=$ AS, fiat KR parallela ipſi αS, & ducatur in centrum ſemicirculi recta Rb, cui abſcindantur æquales WV, ZY, eruntque puncta V, Y, ad curvam quandam γVYδ, quæ ejus eſt naturæ ut abſciſſa BZ$=$DG, ſpatium BZYδB, applicatum ad Ab $= \frac{1}{2}$AB exhibeat rectam curvæ BFG æqualem.

Demonst. AK $=$ AS $=$ WT $=$ Zχ $= \surd$BZA $= \surd(y \times (r - y)) = \surd(ry - yy)$ & Aα [l] : AS [$\surd(ry - yy)$] $=$ AK [$\surd(ry - yy)$] : AR $= \frac{ry - yy}{l}$; quare ZY ($=$ WV $=$ Rb $= \surd(Abq + ARq) = \surd(\frac{1}{4}rrll + rryy - 2ry^3 + y^4) : l$; unde portio ſpatii ZY$\delta$B, latitudinis $dy = dy\,\surd(rrll + 4rryy - 8ry^3 + 4y^4) : 2l$, quæ applicata ad Ab $= \frac{1}{2}r$ exhibet $dy\,\surd(rrll + 4rryy - 8ry^3 + 4y^4) : rl =$ FG; & proin, *componendo*, totum ſpatium ZYδB ad $\frac{1}{2}r$ applicatum $=$ portioni curvæ BFG. *Q. E. D.*

Coroll. Sumtis BZ, AW æqualibus, ſi centro A, radiis AZ, Ab, AW, deſcribantur arcus ſecantes curvam in G, I, & N, [Nota mediam interſectionem I, in caſu præſentis Schematis, incidere in radium AM] portiones curvæ BG & AN, GI & NI, nec non BGI & ANI inter ſe æquantur: unde patet quod, in curvis etiam illis quæ rectificationem nondum acceperunt, nonnunquam partes æquales diſſimilares aſſignari poſſunt.

Id cum Fratrem monuiſſem, in his quoque non leviter verſatum, protinus animadvertit ille, poſſe cuilibet fere Spirali, æquatione algebraica expreſſæ, aliam curvam geometricam æqualem aſſignari: Deſcriptis enim centro A, intervallo AF & AG arcu-

arcubus $F\rho$, $G\pi$, ſi concipiatur curva $M\psi$ talis, ut applicatarum N.XLI.
ρx, $\varpi\psi$ differentia $\nu\psi$ æquetur arcui EG; erit propter $\nu x = \varpi\rho = EF$, & $\nu\psi = EG$, & angulos $\psi\nu x$, FEG, utrinque rectos, etiam $\psi x = FG$, & proinde *componendo*, tota portio curvæ $M\psi =$ toti portioni Spiralis BG. Ad inveniendam autem naturam curvæ $M\psi$, ſubſtituendus tantum in quantitate $(r - y)\,dx : r$, [quæ ſemper exprimit ipſam EG, vel $\nu\psi$] valor ipſius dx, qui in noſtra curva eſt $2ydy : l$, ut habeatur $2ydy : l - 2yydy : lr$, cujus integrale $yy : l - 2y^3 : 3lr$ denotat longitudinem applicatæ $\varpi\psi$, quæ ſi vocetur z, habebitur æquatio inter z & $yy : l - 2y^3 : 3rl$, ſeu $3rlz + 2y^3 - 3ryy = 0$, quæ relationem exprimit inter abſciſſam $M\pi$ (y) & applicatam $\pi\psi$ (z).

In genere vero Spiralis Parabolica gradus cujusvis, hac ratione commutatur in aliam Paraboloidem geometricam uno gradu altiorem (c). Sed & hoc obſervavimus, quod ſi curva ANIGK ſit Spiralis *Archimedæa*, & deſcribatur centro A ad axem AK communis Parabola $A\mu$, cujus parameter ſit quarta proportionalis ad peripheriam, diametrum, & radium circuli BDM; erunt, (quod memoratu dignum eſt) & curvæ, & illis comprehenſa ſpatia æqualia: nimirum ſumpto in recta AM quovis puncto λ, ſi ad illud applicetur recta $\lambda\mu$, ſecans parabolam in μ, & ducatur arcus λN concentricus peripheriæ circuli BM, ſecans helicem in N, æquabitur perpetuo portio helicis AN portioni curvæ parabolicæ $A\mu$; & ſpatium AN, recta AN & ſpirali comprehenſum, ſpatio parabolico $A\lambda\mu$ A (d). Quam miram Parabolæ & Spiralis convenientiam, poſt modum, apud WALLISIUM deprehendimus, qui de ejus detectione HOBBIUM & ROBERVALLIUM

(c). Sit enim Spiralis Parabolicæ æquatio $x = y^n : l$, erit $dx = ny^{n-1} dy : l$, quo ſubſtituto in $(r - y)\,dx : r$, fit $ny^{n-1} dy : l - ny^n dy : lr$, cujus integrale eſt $y^n : l - ny^{n+1} : (n+1)\,lr$. Ergo $z = ((n+1)\,ry^n - ny^{n+1}) : (n+1)\,lr$, quæ eſt æquatio ad Paraboloidem geometricam gradus $n + 1$.

(d) Id demonſtrare, calculum infinitesimalem intelligenti nihil habet difficultatis.

N. XLI. inter ſe diſceptaſſe refert; quaſi non poſſint plures & tempore & loco diſſidentes in idem inventum ſuapte ingenio incidere.

IV. *Flexura.*

Quod curva in partes contrarias flecti debeat, evidens eſt: quia enim peripheria BC, a vertice B aliquouſque, a linea recta ſenſibiliter non differt; ſequitur, ex natura Parabolæ, curvam in partibus vertici proximis verſus circumferentiam, in reliquis vero, ob curvaturam BC, verſus centrum cavam eſſe debere.

Si G ſit punctum flexus contrarii; erit AO ſegmentum radii, centro & tangenti interjectum Minimum (M.) Producatur GE in P, & ducatur PQ parallela ipſi EF; ſitque ſecans arcus BD $= s$, & tangens t; Sic erit $r : r - y$ [AG] $= t : \frac{t}{r}(r-y)$ [GP] $= s : \frac{s}{r}(r-y)$ [AP] Deinde GE $[(r-y)dx : r]$: EF $[dy]$ $=$ PG $[\frac{t}{r}(r-y)]$: PQ $[t\,dy : dx]$ Denique AF $[r-y]$: PQ $[tdy : dx]$ $=$ AO [M] : PO ſeu AO — AP $[M - \frac{s}{r}(r-y)]$; unde obtinebitur $M = (rrsdx - 2rsydx + syydx) : (rrdx - rydx - rtdy)$, poſitoque $ldx : 2y$ loco dy, & facta diviſione per dx, $M = (2rrsy - 4rsyy + 2sy^3) : (2rry - 2ryy - rlt)$: hujus igitur differentiale debebit eſſe $= 0$: at fractionis differentiale tum eſt $= 0$, cum termini ejus ducti in alterna differentialia æquantur: [etenim fractionis $y : z$ differentiale eſt $(\pm zdy \mp ydz) : zz$, unde ſi ſit $= 0$, erit & $\pm zdy \mp ydz = 0$, hoc eſt, $zdy = ydz$;] qua duce regula, pervenitur ad æquationem 16 membrorum (*); ad quam reducendam notanda ſunt ſequentia: Differentiale arcus ad differentiale tangentis & ſecantis rationem habet

(*) $(4rsy^4 - 8rrsy^3 + 4r^3syy +$ $\quad - 4r^4y^4 - 4rrltyy + 2r^3ltyy)\,ds -$
$6rltsyy - 8rrltsy + 2r^3lts)\,dy +$ $\quad (2rlsy^3 - 4rrlsyy + 2r^3lsy)\,dt$
$(4ry^5 - 12rry^4 + 12r^3y^3 + 2rlty^3$ $\quad = 0.$

habet cognitam; puta ad differentiale tangentis, quam quadratum radii ad quadratum ſecantis; & ad differentiale ſecantis, quam quadratum radii ad rectangulum ſub tangente & ſecante. Nam in quadrante ABD, $dx:dt = DC:EF = DC:GE + GE:EF = AD[AB]:AG + AB:AF = ABq[rr]:AFq[ss]$; quare $dt = ssdx:rr =$ [in præſente curva] $2ssydy:lrr$. Iterum $dx:ds = DC:GF = DC:GE + GE:GF = AD[AB]:AG + AB:BF = ABq[rr]:AFB[st]$ quare $ds = stdx:rr = 2stydy:lrr$; quibus valoribus pro ds & dt in æquatione ſubſtitutis, ut & $ss - rr$ loco tt, prodibit alia [f] quæ dividi poterit per $stdy$, ſic ut literæ s, t, & dy prorſus evaneſcant, remanente ſola incognita y, fiatque æquatio talis, $y^6 - 3ry^5 + 3rry^4 - r^3y^3 + \frac{3}{4}rrllyy - r^3lly + \frac{1}{4}r^4ll = 0$, quæ facta ulterius diviſione per $y - r$, reducitur ad hanc, $y^5 - 2ry^4 + rry^3 * + \frac{3}{4}rrlly - \frac{1}{4}r^3ll = 0$, cujus æquationis radix punctum flexus contrarii prodit; quod quidem, in caſu $l = rr:c$, quam proxime habetur, ducendo radium AC, ſic ut applicata CF ſit $\frac{1}{6}r$, vel arcus $BC = \frac{1}{36}c = 10$ gr. [g]

No. XLI. Fig. 2.

Hæc Methodus, pro curvarum flexuris inveniendis, cum admodum prolixa & minus naturalis mihi videretur, ex eo quod litteras ſuperfluas & in æquatione evaneſcentes adhibet; anſam nobis præbuit eaſdem, alia breviore & faciliore via, inveſtigandi; hoc modo: Flexum contrarium in eo curvæ loco concipio, ubi duæ particulæ contiguæ infinite parvæ in directum jacere intelliguntur, ut ſunt FG, FI; reliquis ad unam partem ſurſum, ad alteram deorſum flexis. Sequitur hinc 1°, quod in curvis, quarum axis rectus eſt & applicatæ parallelæ, anguli acuti EGF, MFI, ſeu DGL, CFL inter ſe æquales ſunt, & eorum, quos applicatæ cum curva hinc inde conſtituunt, maximi vel minimi,

Fig. 3.

Kkk 2 prout

[f] $(8rssty^6 - 24rrssty^5 + 24r^3sty^4 - 8r^4sty^3 + 6r^3llsty^2 - 8r^4llsty + 2r^5llst)\,dy = 0$.

[g] Nam, ſi, in æquatione, pro y ſcribas $\frac{11}{6}r$, & $rr:c = \frac{7}{44}r$ pro l, æquationis membrum prius efficit tantum $\frac{1}{400}r$.

No. XII. prout curvæ portio, quæ ad partes horum angulorum eſt, intra, vel extra eoſdem cadit; unde & ratio $DG:DL$ [$y:t$] minima vel maxima; adeoque per ſupra oſtenſa $ydt = tdy$; ſed cum etiam ſit ubique $tdy = ydx$ ut conſtat (h), erit $dt = dx$, differentiale ſcilicet portionis axis inter applicatam & tangentem æquale differentiali abſciſſæ: quod & ſic liquet: Quia GF, FI, jacent in directum, tangentes GL, FL ſecabunt axem in eodem puncto L, & proinde differentiale abſciſſæ DC ipſarum quoque DL, CL, differentia eſt. Aliud Theorema in *Actis* dedit Celeb. calculi Auctor: nempe cum Triangula EGF, MFI, ob angulos EGF, MFI æquales, ſint ſimilia; ſequitur, ſi EF, MI, hoc eſt, ipſa dx ſint æqualia, futura quoque æqualia EG, MF, ſeu dy; adeoque $ddy = 0$.

Fig. 4. 2°. In curvis, quarum applicatæ tendunt in commune punctum A, angulus $EGF = GAF + GFA = DAC + CFL$: unde cum CL ſit Tangens anguli CFL ad radium CF, & DH Tangens anguli EGF, vel DGH ad radium DG; erit differentia rectarum CL, DH, æqualis differentiæ Tangentium duorum angulorum, qui differunt angulo DAC, & quarum una eſt ad radium CF, altera ad radium DG: Nam quamquam differentia radiorum EG, ratione totius radii vel tangentis, evaneſcat; non tamen negligenda eſt, ſi cum ipſorum differentiis comparetur. Eſto $AC = r$, $DC = dx$, $CF = y$, $CL = t$: adeoque $FL = \sqrt{(yy+tt)}$; fiatque $AC[r]:DC[dx] = CF[y]:\frac{ydx}{r} =$ arcui, qui eſt menſura anguli DAC in radio CF: hic per §. 4, ad differentiam Tangentium eſt in ratione duplicata radii ad ſecantem: quare $FCq[yy]:FLq[yy+tt] =$ Arcus inventus $\frac{ydx}{r}:\frac{yydx+ttdx}{ry} =$ differentiæ duarum Tangentium, quarum utraque eſt ad radium CF, cui ſi addatur $EF = (r-y)dx:r$ (utpote

(h) Ex Triangulorem GEF, GDL ſimilitudine, eſt $GE[dy]:EF[dx] = GD[y]:DL[t]$.

Digitized by Google

(utpote, quæ eſt ad EG, ſicut DH ad DG, ſeu CL ad CF, tangens ad radium) erit aggregatum $(rydx + ttdx) : ry$, ſeu $dx + ttdx : ry$ differentia duarum Tangentium, quarum altera convenit radio CF, altera radio DG, hoc eſt, differentiæ rectarum CL, DH [t]: ac idcirco $dt = dx + ttdx : ry$. N.XLI.

Idem clarius oſtenditur, deſcripto ſuper C, radio CL, arcu LK: Nam angul. ACL + LCK = AMH = ADM + DAC = ACL + DAC, & propterea angul. LCK = DAC: (Nota, CM hic negligi, punctaque C & M pro coincidentibus haberi: eo quod ipſa CM differentialibus DC, LK, EG, ut ut infinite exiguis, infinities minor exiſtit,) unde AC [r]: CD [dx] = CL [t]: LK = $tdx : r$; iterumque GD [y]: DH [t] = LK [$tdx : r$]: KH = $ttdx : ry$; quocirca dt = [DH — CL = DH — CK = DC + KH =] $dx + ttdx : ry$.

Coroll. Si ſit r = infinito, hoc eſt, CA, DA, parallelæ, evaneſcet $ttdx : ry$, eritque $dt = dx$, ut ſupra.

Frater meus, loco rationis GD: DH, vel GA : AP, aſſumit GE: EF, vocando AF = y, AP = t, & EF = dz, & ſic invenit $dt = dz^2 : dy^2$, (¹) quæ Theoremata, ob univerſalitatem ſuam, merentur obſervari.

Applicatio ſpecialis ad Parabolam helicoiden.

Quoniam CL [t] ſupra reperta fuit $(2ryy - 2y^3) : lr$, erit $dt = (4rydy - 6yydy) : lr$; cumque ſit $dx = 2ydy : l$, erit, ſubſtitutis valoribus tt, dt, & dx, factaque diviſione per dy, & reducta æquatione, $y^5 - 2ry^4 + rry^3$ &c. = o, ut prius. Fig. 4.

V. *Summum curvæ punctum*

ſupra radium BA, invenitur faciendo nuper inventam AO =

Kkk 3 (2rrsy

(¹) Scil. GE [dy]: EF [dz] = EF [dz]: QN [$\frac{dz^2}{dy}$] = QN = AG [y]: AP [t] = $\frac{ydz}{dy}$ [$\frac{dz^2}{dy}$]: QP [dt] = $\frac{dz^3}{dy^2}$.

N.XLI. $2rrsy - 4rsyy + 2sy^3) : (2rry - 2ryy - rlt)$ infinitam, hoc eſt ponendo $2rry - 2ryy - rlt = 0$. ſeu [loco y ſubſtituendo $\sqrt{lx}$] $2r\sqrt{lx} - 2lx - lt = 0$, aut [in caſu $l = rr : c$] $2\sqrt{cx} - 2x = t$; quæ æquatio geometrice reſolvi nequit, ob ignoratam rationem x ad t, arcus ad tangentem. Mechanice prope verum invenitur, numerando a B verſus M, 72°. 12. Obiter noto, hinc etiam oſtendi poſſe, quadraturam circuli indefinitam, & in genere rectificationem ullius curvæ geometricæ in ſe redeuntis impoſſibilem eſſe. Hæc enim ſi poſſibilis eſſet, dari poſſet relatio inter curvam & applicatam, vel abſciſſam; cumque & harum relatio, tum inter ſe, tum ad tangentem data ponatur, data quoque foret ipſius curvæ ad tangentem ratio; quare ſi æquatio quæ relationem hanc exprimit, cum iſta $2\sqrt{cx} - 2x = t$, juxta notas Analyſeos leges debite conferretur ad eliminandam alterutram indeterminatarum x vel t; prodiret alia æquatio certi & definiti gradus; cujus radices, quarum nunquam plures eſſe poſſunt quam æquatio dimenſiones habet, determinarent omnia curvæ noſtræ ſuprema puncta: ſed hoc fieri nequit, quoniam ſpiralis iſta, ſi continuetur, infinitis gyris circa radium AB circumvolvitur, in quibus ſingulis aliquod punctum ſupremum exiſtit, quorumque adeo punctorum numerus infinitus eſt.

De Curvarum evolutionibus.

Fig. 5. Si DC curva ſit peripheria circuli, coibunt quæ ipſi normaliter applicantur DA, CA, KA &c. in communi puncto A; eruntque ſingulæ æquales eidem conſtanti rectæ: at ſi DC ſit quæcunque alia curva, erunt dictæ perpendiculares indeterminatæ, & interſecabunt ſeſe in totidem diverſis punctis AVXI, quæ juncta novam curvam efficiunt, cujus natura nunc indaganda eſt. Invenienda vero primo longitudo indeterminatæ CA, ita: Eſto curva propoſita RCD, cujus axis RB; abſciſſæ RN, RM; applicatæ NC, MD; tangens DCT; ſitque RN $= m$, CN $= p$, NT $= q$, unde porro TN $[q]$: NC $[p]$ = NC $[p]$: NP

aut

aut MO $[pp:q] = $ SD $[dp]$: SQ $[pdp:q]$. Ergo QS $[pdp:q]$ N. XLI.
+ SC $[dm] = $ QC $[(pdp + qdm):q]$ & OP = MN + OM − PN $= dm +$ diff. $(pp:q) = dm + (\pm 2pqdp \mp ppdq):qq$ $= (qqdm \pm 2pqdp \mp ppdq):qq$. Eſt denique QC − OP $[(ppdq - pqdp):qq]$: QC $[(pdp + qdm):q]$ = CA − PA aut CP aut $\sqrt{(CNq + PNq)}$ $[\sqrt{(ppqq + p^4)}:q]$: CA $[(pdp + qdm)\sqrt{(qq + pp)}:(pdq - qdp)]$.

Applicatio ad Parabolam.

Sit RCD Parabola, cujus latus rectum l, adeo ut ſit $lm = pp$, erit $ldm = 2pdp$, & $dm = 2pdp:l$, & $q = 2m$: quibus ſubſtitutis, invenitur CA $= (ll + 4pp)\sqrt{(ll + 4pp)}:2ll$, hoc eſt, quia PN $= \frac{1}{2}l$ & PC $= \sqrt{(\frac{1}{4}ll + pp)}$, erit CA = PC$c$: NPq, ſive quarta proportionalis ad PN & PC.

Ad inveniendam naturam curvæ AVX, quam formant interſectiones perpendicularium DA, CA, ratione axis RB, abſcindatur RH $= \frac{1}{2}l = $ PN, & dicatur HB, y, & BA, z; eritque AB + NC $[z + p]$: AC $[(ll + 4pp)\sqrt{(ll + 4pp)}:2ll] = $ NC $[p]$: CP $[\sqrt{(\frac{1}{4}ll + pp)}]$ & invenitur $llz:2 = 2p^3$. Iterum NC $[p]$: AB $[z]$ = PN $[\frac{1}{2}l]$: PP $[lz:2p]$; Sed y = HB = PB + BH = PB + NR $= lz:2p + pp:l$ ſeu $2p^3$ $[= llz:2]$ $= 2ply - llz$; hoc eſt, $3lz:4y = p$ & $4p^3 = [llz =]$ $27l^3z^3:16y^3$, hoc eſt $16y^3 = 27lzz$.

Præterea quia AD, AC ſunt perpendiculares curvæ DC, & particula DC infinite parva, erit AD = AC = AV + VC; ſed propter eandem rationem VC = VX + XK, & XK = XI + &c: quare AD = AV + VX + XI, &c: = curvæ AIH + HR: cumque curva AIH naſcatur ex interſectionibus minime diſtantium DA, CV, KX; ſequitur illam ibidem ab iiſdem tangi, & propterea curvam RKD eſſe eam ipſam, quæ deſcribitur ex evolutione ipſius HIA. Unde, uno quaſi oculi ictu, manifeſta ſunt ea omnia, quæ de Evolutis publicarunt Hugenius, aliique: Aditus etiam patet ad præclara εὑρήματα Celeberri-

N. XLI. berrimorum Virorum Tschirnhausii & Leibnitii, quæ circa curvas per interſectiones radiorum reflexorum formatas in *Actis* ediderunt.

N°. XLII.

SPECIMEN
ALTERUM
CALCULI DIFFERENTIALIS

In dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Areis Triangulorum Sphæricorum; una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliiſque.

Per Jac. Bernoulli.

I. DE SPIRALI LOGARITHMICA.

Acta Erud. Lipſ. 1691. Jun. p. 282. Fig. 1.

SI in plano circuli BCH jaceat curva BDEIPC, quam ſecent, eodem angulo obliquo, radii CB, CL &c. ex centro circuli C educti, dicetur Curva hæc *Spiralis Logarithmica*; quoniam ſumptis arcubus LM, MN &c. infinite parvis & æqualibus, hoc eſt, ipſis BL, BM, BN, arithmetice proportionalibus, radii DC, EC, IC, ſunt geometrice proportionales, ob triangula ſimilia DCE, ECI, &c. Spiralis iſthæc jam Wallisio, & Barrowio conſiderari cœpta eſt; nec actum agerem,

agerem; niſi affinitas illi intercederet cum Loxodromiis; ſeu Rumbis Nautarum, quibus dimetiendis nunc occupabimur: Ipſamet enim eſſet vera Loxodromica, ſi Terra plana foret. No.XLII.

1°. *Longitudo Curvæ.*

Centro C deſcribantur arcus EF, IG, PQ, & ducantur rectæ CH, CS, & QR perpendiculares ipſis CB, CD, quæ ſecent tangentes curvæ BH, DS, in H, S, R. Sic erunt triangula DFE, EGI, ſimilia, ob angulos FDE, GEI, ex hypotheſi, æquales, & DFE, EGI rectos; quare CD : DS = FD : DE = GE : EI = FD + GE : DE + EI, &c; hoc eſt, = DC : DIPC. Quare DS = DIPC. Eadem opera oſtenditur DR = DIP, adeoque & RS = PC.

Corollarium. Quia Spiralis hæc infinitis gyris circa centrum C convolvitur; patet, curvæ alicui interminatæ poſſe rectam finitam æqualem dari.

2°. *Spatium.*

Poſitis CB $= r$, CH $= t$, BM $= x$, CE $= y$, erit CM [r] : LM [dx] = CE [y] : EF [$ydx : r$]. Hinc triang. ECF = EF in $\frac{1}{2}$ EC $= ydx : r$ in $\frac{1}{2} y = yydx : 2r$. Sed DF [$dy$] : FE [$ydx : r$] = BC [$r$] : CH [$t$]. Unde $ydx = tdy$, adeoque triang. ECF [$yydx : 2r$] $= tydy : 2r$, & hujus integrale $tyy : 4r$ = omnibus triangulis FCE, GCI, &c. hoc eſt, ſpatio DIPCD. Si y ponitur $= r$, erit $tyy : 4r = \frac{1}{4} tr = \frac{1}{2}$ triang. BCH = toti ſpatio Spirali BDPCB, repetitis, videlicet, toties portiunculis circa centrum C exiſtentibus, quot gyris ſingulæ communes ſunt.

N.XLII.

II. DE LOXODROMIIS NAUTARUM.

Eſto jam, in eadem figura, BLDC ſuperficies ſphæræ, C polus, B L æquator, C B, C L &c. meridiani ſecantes curvam B I P C conſtanti angulo F D E, erit Curva hæc dicta *Loxodromica.*

1°. *Longitudo Loxodromiæ.*

Deſcriptis arcubus æquatori parallelis FE, GI, PQ, ut prius, erit haud abſimiliter: Sinus totus ad ſecantem anguli F D E $=$ DF: DE $=$ EG: EI $=$ DF $+$ EG, &c. DE $+$ EI, &c. hoc eſt, $=$ arcus meridiani DQC (complementum elevationis poli loci D) ad longitudinem Loxodromiæ DIPC: Et ita quoque arcus DQ, ſeu differentia latitudinum locorum D & P, ad partem Loxodromiæ DIP his locis interjectam.

Corollarium. Hinc portiones Loxodromiæ, inter duo quæcunque loca latitudine æquidifferentia, ſunt æquales; & generaliter, partes Loxodromiæ ejuſdem proportionales ſunt differentiis latitudinum inter partium terminos.

Fig. 2. Porro ad inveniendam locorum longitudinem, ex datis latitudinibus & angulo Rumbi, aut vice verſa: Eſto A BC, planum meridiani; A, centrum Sphæræ; C, polus: AB radius æquatoris, ſeu Sinus totus $= r$; BD, latitudo loci $= y$, DG, radius paralleli æquatoris $= z$; adeoque DE $= dy$, & DF $= dz$; tangens anguli Rumbi & meridiani $= t$; ipſe vero arcus æquatoris BL (in *Fig.* 1.) $= x$; ejuſque differentiale LM $= dx$. Quibus poſitis, erit primo $r : z = dx : \frac{zdx}{r} =$ different. paralleli (a) deinde $\frac{zdx}{r} : dy = t : r$; (b) adeoque $dy = zdx : t$; denique

(*fig.* 2.)

(a) Scilicet (Fig. 1.) CM [r] : CE [z] $=$ LM [dx] : EF [$zdx : r$].
(b) Nempe EF [$zdx : r$] : FD [dy] $=$ SC : CD $=$ HC [t] : CB [r] ob ſimilia Triangula SCD, HCB.

(*fig.* 2.) DE [dy] : DF [dz] $=$ AD [r]: AG [$\surd(rr - zz)$]; N.XLII.
unde dy [$zdx:t$] $= rdz: \surd(rr - zz)$; ac proinde $dx = trdz:$
$z\surd(rr - zz)$. quod ſic conſtruitur.

Applicetur extremitati radii AC normalis CP $= t$, & per punctum P, aſymptotis AC, AB, deſcribatur Hyperbola PI: deinde, aſſumpto in peripheria quadrantis quovis puncto D, agantur DO, DI parallelæ radiis AC, AB, & abſcindatur LM $=$ GI; ductaque AMN, ſumatur LO $=$ BN; erit punctum O ad curvam optatam OQ.

Demonst. AG [$\surd(rr - zz)$]: AC [r] $=$ CP [t]: GI vel LM [$tr:\surd(rr - zz)$] & AL [z]: LM [$tr:\surd(rr - zz)$] $=$ AB [r]: BN ſeu LO [$trr:z\surd(rr - zz)$]. Quare ſpatium OLVX, latitudinis LV ſeu dz, æquale $trrdz:z\surd(rr - zz) =$ (ut modo oſtenſum) rdx, & propterea totum ſpatium TBVX $= rx$; ideoque ſpatium hoc applicatum ad radium, exhibet rectam æqualem arcui æquatoris, qui differentiam longitudinum exhibet puncti B, & ejus in quo linea Loxodromica parallelum per E tranſeuntem ſecat. Non ſecus, ſi latitudo loci, e quo proficiſceris, ſit BD, & ejus, in quem per Rumbum datum perveniſti, BR; erit ſpatium OLSQ ad radium applicatum æquale arcui æquatoris, qui differentiam longitudinum dictorum locorum metitur (*).

Præterea, datis longitudinibus & latitudinibus loci a quo, & ad quem; Quæritur t, hoc eſt, in quem Rumbum navis dirigi debeat? Reſpond. Differentia longitudinum duorum locorum eſt ad differentiam duorum aliorum latitudine cum prioribus convenientium, ut tangens anguli prioris Rumbi ad tangentem anguli poſtremi. Etenim deſcripta alia hyperbola YZ & alia curva WK, erit, CP: GI [LM] $=$ AG: AC $=$ CY: GZ [LH], & *permutando* CP: CY $=$ LM: LH $=$ LM: LA$+$LA: LH $=$ BN [LO]: BA$+$BA: BT [LW] $=$ LO: LW; quod cum ubique valeat, erunt omnes LO, LW; hoc eſt, ſpatia LOQS, LWKS, diviſa per communem radium, hoc eſt, dif-

 ferentiæ

(*) Vide omnino Nos. XC. Art. 50. & XCI.

N.XLII. ferentiæ longitudinum, ut CP, CY, ſeu ut tangentes angulorum, quos Rumbi faciunt cum meridianis. Unde datis latitudinibus BD, BR, ſi fiat; ut ſpatium LOQS ad radium applicatum, ad datam longitudinum differentiam; ſic data CP ad aliam CY: erit hæc tangens anguli quæſiti.

Conſtructio Problematis ſuccinctior: Extenſo quadrante meridiani BC in rectam $\beta\kappa$, & abſciſſa quavis $\beta\delta = BD$, ſi applicetur $\delta\gamma$, quæ ſit ad $\beta\tau$ ſeu t, ut AB ad DG; erit curva $\tau\gamma$ ita comparata, ut ſpatium curvilineum $\delta\gamma\pi\rho$, ad radium AB applicatum ſit æquale arcui æquatoris, qui differentiam longitudinum exprimit locorum, quorum latitudines ſunt $\beta\delta$, $\beta\rho$, ſeu BD, BR. Cum enim ex conſtructione ſit, DG [z] : AB [r] $= \beta\tau$ [t] : $\delta\gamma$; erit $\delta\gamma = tr : z$, adeoque rectang. $\gamma\delta\epsilon = trdy : z = rdx$, per ſuperius oſtenſa.

Fig. 2. & 3.

Præterea, ſi ſpatium curvilineum $\beta\tau\pi\rho$ adeoque & ſingula rect. $\gamma\delta\epsilon$ [$trdy : z$] commutari intelligantur in alia parallelogramma, quorum communis altitudo ſit $\beta\tau$ [t], erit ſingulorum latitudo reſpectiva $rdy : z$, quæ eſt ad $\delta\epsilon$, ſeu dy, ut r ad z [radius ad ſinum complementi latitudinis $\beta\delta$, vel BD, ſive ut ſecans latitudinis ad radium.] Quare, ut r ad t, ſic unius parallelogrammuli latitudo $rdy : z$, ad $tdy : z$ [$= dx$], & ita ſumma omnium ad x, loci longitudinem. Hinc ratio perſpicitur conſtructionis *Tabulæ*, quam vocant *latitudinum creſcentium*; qua de videſis SNELLIUM, & P. DESCHALES.

2°. *Spatium Loxodromicum.*

Quod portionem ſuperficiei ſphæricæ curvæ loxodromicæ, & polo, vel æquatori, interjectum concernit, fiat $r : p$ [Radius ad Peripheriam] $= z : \frac{pz}{r} =$ circumferentiæ paralleli per D tranſeuntis, quæ ducta in latitudinem DE $= dy = rdz : \sqrt{(rr - zz)}$ exhibet $pzdz : \sqrt{(rr - zz)}$ aream annuli DE, ejuſque integrale $p\sqrt{(rr - zz)}$ dat ſuperficiem Zonæ ſphæricæ rotatione arcus BD ſuper axe AG genitæ. Quia $p\sqrt{(rr - zz)} = p$ in AG, obiter

obiter notamus inſigne *Theorema Archimedæum*, quod ſuperficies N.XLII.
fruſti ſphæræ cujuſlibet æquetur producto altitudinis ejus in peripheriam circuli maximi; & proportionalis partis proportionaliter: (d) adeoque quod ſuperficies portionum inter ſe ſint ut altitudines. Hinc $p : dx = p\sqrt{(rr - zz)} : dx\sqrt{(rr - zz)}$, ſeu, per ſuperius oſtenſa $trdz : z =$ areæ trapezii ſphærici, cujus baſes oppoſitæ ſunt differentiolæ arcuum æquatoris & paralleli; ejus itaque integrale æquale areæ ſpatii curvæ Loxodromicæ & æquatori interjecti: eſt vero integrale ipſius $trdz : z =$ ſpatio hyperbolico; quare ſi aſymptotis AB, AC, deſcribatur hyperbola pqr, eadem cum altera PI, erit portio ejus quæcunque pBVr æqualis ſpatio comprehenſo curva Loxodromica, æquatore, & meridiano dictam Loxodromicam ad latitudinem BD interſecante; cumque totum ſpatium TBVX ſit æquale rx, hoc eſt, ipſi radio AC in arcum æquatoris x, hoc eſt per modo laudatum *Theorema Archimedæum*, toti triangulo ſphærico duobus meridianis & æquatori intercepto; ſequitur reliquum TprX æquari ipſi ſpatio, utroque meridiano, Loxodromica & polo terminato.

Nota 1°. $Lq : LO = \frac{tr}{z} : \frac{ttr}{z\sqrt{(rr - zz)}} = \sqrt{(rr - zz)} : r =$ AG : AC. Unde alia habetur conſtructio curvæ OQ. 2°. Si duas Loxodromias idem æquatoris parallelus ſecet, & per puncta ſectionum tranſeant meridiani; ſpatia Loxodromiis, meridianis, & æquatori utrinque interjecta, erunt ut tangentes angulorum, quos Rumbi conſtituunt cum meridianis. Patet, quia ſpatia plurium hyperbolarum, quale p BV r, abſciſſa ab eadem VX ſunt ut ipſæ Bp.

(d) Id eſt, trapezium in ſuperficie Sphæræ deſcriptum, & comprehenſum peripheriis duorum circulorum parallelorum, atque duabus aliis per iſtorum polos tranſeuntibus, æquale eſt producto ex ejus altitudine, ſive diſtantia circulorum parallelorum, & arcu circuli maximi, qui metitur angulum a circulis perpendicularibus comprehenſum.

N. XLII. III. DE AREIS TRIANGULORUM SPHÆRICORUM.

Eſto ABC, Triangulum Sphæricum rectangulum ad C; D, *Fig.* 4. polus circuli AC; I, ſphæræ centrum; IA, IC, IF, radii; AF, DF, DC, DO, quadrantes circulorum maximorum; CH, OG, ſinus arcuum CA, OA; ſitque OC pars infinite parva cruris AC; ac ponatur $IA = r$; tangens arcus FE, ſeu anguli $BAC = t$; $IH = z$; $HC = \surd(rr - zz)$: erit HC $[\surd(rr - zz)]$: IC $[r]$ = HG vel Oo $[dz]$: OC $[rdz : \surd(rr - zz)]$ (*) & (per Doctr. Trigonom. Sphær.) IF, ſinus AF $[r]$: HC, ſin. AC $[\surd(rr - zz)]$ = Tang. FE $[t]$: Tangent. CB $[t\surd(rr - zz) : r]$, atque ſecans CB $[\surd(rr + tt(rr - zz) : rr)]$: Tang. CB $[t\surd(rr - zz) : r]$ = Rad. $[r]$: ſin. CB. $[tr\surd(rr - zz) : \surd(ttrr - ttzz + r^4)]$ Sed ſin. CB in CO $[rrtdz : \surd(ttrr - ttzz + r^4)$ = BCOL, per ſuperius citatum *Theorema Archimedæum*, cujus integrale æquale areæ Trianguli ABC.

CONSTRUCTIO. Deſcribatur ſemicirculus, centro I, radio $IM = r\surd(tt + rr) : t$ ſeu quarta proportionali ad tangentem & ſecantem anguli BAC, ac radium IA, tum fiat alia curva PQR, ejus naturæ, ut HQ ſit tertia proportionalis ad HN & radium ſphæræ IA, eritque planum AHQR æquale ſuperficiei Trianguli ſphærici ABC.

DEMONST. IMq $[(ttrr + r^4) : tt]$ — IHq $[zz]$ = HNq $[(ttrr + r^4 - ttzz) : tt]$ ſed, ex conſtr. HN $[\surd(ttrr + r^4 - ttzz) : t]$: IA $[r]$ = IA $[r]$: HQ $[trr : \surd(ttrr + r^4 - ttzz)]$ adeoque $QHG = trrdz : \surd(ttrr + r^4 - ttzz)$ = BCOL, &c.

COROLLARIUM I. Planum AIPR [= Triang. Sphær. AEF]

(*) Ob ſimilia Triangula HIC, OoC.

AEF] = applicatum ad radium IA = arcui EF, per *Theore-* N.XLII.
ma Archimedæum.

Coroll. 2. Si t = infin. hoc eſt, ſi ang. BAC rectus, erit IM = IA, & planum AHRQ ad radium applicatum = arcui AC. (f)

ADDITAMENTUM AD PROBLEMA FUNICULARIUM.

Poſtquam *Problematis* de *Curva funicularia* ſolutionem nuperrime exhibuiſſet *Frater*; ſpeculationem iſtam continuo promovi ulterius, & ad alios quoque caſus applicui; quo pacto, præter ea quorum tum mentio facta eſt, nonnulla ſeſe obtulerunt, quæ recenſere operæ pretium exiſtimo.

1. Si craſſities, vel gravamina funis, aut catenæ, inæqualia *Fig.* 5.
ſint; & ſic attemperata ut, dum eſt in ſtatu quietis, gravamen portionis HI ſit in ratione portionis rectæ utcunque ductæ LM, iiſdem perpendiculis HL, IM interceptæ; curva AIHB, quam funis, vel catena, ſic ſuſpenſa proprio pondere format, erit Parabolica. Sin gravamen portionis HI ſit in ratione ſpatii LOPM iiſdem perpendiculis HL, IM, intercepti; erit funicularia AB, curva Parabolæ vel cubicalis, vel biquadraticæ, vel ſurdeſolidalis &c. prout Figura CLO eſt vel triangulum, vel complementum ſemiparabolæ communis, aut ſemiparabolæ cubicalis &c.

Quod ſi vero gravamen portionis HI ſit in ratione ſpatii QRST rectis horizontalibus HQ, IR abſciſſi; erit Funicularia IB curva aliqua ex genere Hyperbolicarum (recta AG exiſtente una ex aſymptotis) puta vel Apolloniana, vel cubicalis, vel biquadrata &c. prout videlicet Figura AQT eſt vel triangulum, vel

(f) Huc referri poſſunt quæ dedit Auctor in N°. LII. de Teſtudine quadrabili.

Digitized by Google

N. XLII. vel complementum ſemiparabolæ communis, aut cubicalis; &c. (ɩ)

2. Si funis ſit uniformis craſſitiei, at a pondere ſuo extenſibilis, peculiari opus eſt artificio. Vocetur portio funis non extenſi, cujus ponderi æquipollet vis tendens imum funis punctum, a; & exceſſus longitudinis, quo portio hæc a dicta vi extenſa non extenſam ſuperat, b; ſumaturque in perpendiculo FA $= a$, & indefinita FC $= x$: tum fiat curva DE ejus naturæ, ut ſit applicata CD $= ab : \sqrt{(2aa + 2bx - 2a\sqrt{(aa + bb + 2bx)})}$ vel $a\sqrt{(aa + bx + a\sqrt{(aa + bb + 2bx)})} : \sqrt{(2xx - 2aa)}$, perinde enim eſt; ac ſpatio curvilineo ACDE conſtituatur æquale Rectang.

(ɩ) Reſumatur æquatio generalis ad Funicularias, (quæ in Nota ad N^{um}. XXXIX. demonſtrata eſt) $adx = Pdy$, aut $ax = \int Pdy$ & manifeſtum eſt, ſi P data ſit functio ipſius y, dari æquationem, quæ naturam curvæ exhibet; algebraicam, ſi ſit Pdy, quantitas integrabilis; tranſcendentem, ſi ſecus. Specialiter; ſi gravamen funis AB ponatur æquale areæ CBN curvæ CPN, quæ ſit ex Parabolarum genere, hoc eſt, ſi ponatur BN $= y^n$, & $P = \int y^n dy = y^{n+1} : (n+1)$, erit $ax = [\int Pdy =] \int y^{n+1} dy : (n+1) = y^{n+2} : (\overline{n+1}.\overline{n+2}.)$ Ergo funicularia AB erit ex Parabolarum genere, & quidem duobus gradibus altior Parabola CPN. Si ſit hæc recta parallela ipſi CB, hoc eſt, ſi gravamen portionis HI ſit ut LM, ponatur $n = 0$, & $y^n = 1$, & invenietur AB Parabola vulgaris, cujus æquatio $2ax = y^2$. Si CBN ſic Triangulum, ponatur $n = 1$, & AB erit Parabola cubicalis, cujus æq: $6ax = y^3$, &c.

Quod ſi vero P data ſit functio ipſius x, hoc eſt, ſi gravamen funis AB æquale ſit areæ ACV, curvæ AV; æquatio $adx = Pdy$ vel $\frac{adx}{P} = dy$, integrata dabit naturam curvæ AB, algebraicæ, ſi $dx : P$ ſit quantitas integrabilis; tranſcendentis, ſi ſecus. Si ponatur, ut poſuit Auctor noſter, curvam AV ex Parabolarum genere, hoc eſt, ſi ſit CV $= x^n$ erit $P = \int x^n dx = x^{n+1} : (n+1)$. Ergo $dy = adx : P = (n+1)\, adx : x^{n+1}$; Unde $y = -a : x^n$, adeoque AB eſt ex Hyperbolarum genere, convexitatem obvertens axi AC.

ſtang. FG, producanturque rectæ KG, DC ad mutuum occurſum in B: Sic erit punctum B ad requiſitam funiculariam AB. Suppono autem, extenſiones viribus tendentibus proportionales eſſe; tametſi dubium mihi ſit, an cum ratione & experientia hypotheſis illa ſatis congruat. Retinere autem iſtam nobis liceat, dum veriorem ignoramus. (h) N.XLII.

3. Occaſione *Problematis funicularii* mox in aliud non minus illuſtre delapſi ſumus, concernens flexiones, ſeu curvaturas trabium, arcuum tenſorum, aut elaterum quorumvis, a propria gravitate, vel appenſo pondere, aut alia quacunque vi comprimente factas; quorſum etiam Celeberrimum LEIBNITIUM in priva-

(h) Tenſio fili B*b* oſtenſa eſt, in Nota ad N^um. XXXIX, eſſe $adz:dy$. Ergo, cum extenſiones ponantur tenſionibus proportionales; ſi tenſio a efficit extenſionem b; tenſio $adz:dy$ efficiet extenſionem $bdz:dy$; & funis longitudo quæ erat a, evaderet $a+bdz:dy=(ady+bdz):dy$. Ideo, ſi ſumatur ejus particula, longitudinem habens dz, invenietur ejus pondusculum, vel gravamen $[pdz]=adydz:(ady+bdz.)$ Nam, ut longitudo tota $(ady+bdz):dy$ ad pondus totum a, ita longitudinis particula dz, ad ejus pondusculum $adydz:(ady+bdz)=ady:(ady:dz+b)$, quod dictum eſt pdz. Sed æquatio generalis $adx=dy\int pdz$, dat $addx:dy=pdz$ (poſita nempe dy conſtante). Igitur $addx:dy=ady:(ady:dz+b)$, vel multiplicando in crucem $a^2dyddx:dz+abddx=ady^2$. Mutiplicentur ſinguli termini per $dx:a$ & pro dz ſcribatur $\surd(dx^2+dy^2)$, eritque $adydxddx:\surd(dx^2+dy^2)+bdxddx=dy^2dx$, at integrando ac tranſponendo, $ady\surd(dx^2+dy^2)=xdy^2-\frac{1}{2}bdx^2$, duplicando & quadrando, $4aady^2dx^2+4aady^4=4xxdy^4-4bxdx^2dy^2+bbdx^4$, vel $dx^4-(4aady^2-4bxdy^2)\,dx^2:bb=(4aa-4xx)\,dy^4$, hæc æquatio quadratica, ſi reſolvatur, dabit $dx^2=(2aa+2bx-2a\surd(aa+bb+2bx))\,dy^2:bb$, vel $dy^2=bbdx^2:(2aa+2bx-2a\surd(aa+bb+2bx))$ aut $dy=bdx:\surd(2aa+2bx-2a\surd(aa+bb+2bx))$. Quod, ſi æquatio quadratica ordinata fuiſſet, ſecundum dimenſiones non ipſius dx, ſed ipſius dy, habuiſſemus $dy=dx\surd(aa+bx+a\surd(aa+bb+2bx)):\surd(2xx-2aa)$. Ergo, ſi ſit $CD=ab:\surd(2aa+2bx-2a\surd(aa+bb+2bx))$, aut $=a\surd(aa+bx+a\surd(aa+bb+2bx)):\surd(2xx-2aa)$ perinde enim eſt, cum ſint hæ quantitates æquales, habebimus $dy=CD\times dx:a$. Ergo $ay=\int CD\times dx=ACDE=AGKF=AG\times a$. Igitur $AG=y$.

N. XLII. privatis, quibus ſub idem me tempus honoravit, litteris digitum opportune intendere video. Videtur autem hoc Problema, cum ob hypotheſeos incertitudinem, tum caſuum mutiplicem varietatem, plus aliquanto difficultatis involvere priori; quanquam hic non prolixo calculo, ſed induſtria tantum opus eſt. Ego per ſolutionem caſus ſimpliciſſimi (ſaltem in præmemorata hypotheſi extenſionis) adyta Problematis feliciter reſeravi. Verum ut, ad imitationem Viri Excellentiſſimi, & aliis ſpatium concedam ſuam tentandi Analyſin; premam pro nunc ſolutionem, eamque tantiſper Logogripho occultabo, clavem cum demonſtratione, in Nundinis autumnalibus communicaturus. Si lamina elaſtica gravitatis expers AB, uniformis ubique craſſitiei & latitudinis, inferiori extremitate A alicubi firmetur, & ſuperiori B pondus appendatur, quantum ſufficit ad laminam euſque incurvandam; ut linea directionis ponderis BC curvatæ laminæ in B ſit perpendicularis; erit curvatura laminæ ſequentis naturæ:

Fig. 6.

Qrzumu bapt dxqopddbbp poylu ſy bbqnſqbſp lty ge mutds udthhtuhs tmixy yxdksdbxp gqſrkſgudl bg ipqandtt tcpgkbp aqdbkzs. (l)

4. Iſtis vero omnibus multo ſublimior eſt ſpeculatio de *Figura veli vento inflati* quanquam cum *Problemate Funiculario* eatenus affinitatem habet, quatenus venti continuo ad velum adlabentis impulſus ceu funis gravamina ſpectari poſſunt. Qui naturam preſſionis fluidorum intellexerit, haud difficulter quidem capiet, quod portio veli BC, quæ ſubtenſam habet directioni venti DE perpendicularem, curvari debeat in arcum circuli. At qualem curvaturam induat reliqua portio AB, ut difficilis eſt perquiſitio, ſic in re nautica eximii prorſus uſus futura eſt, ut præſtantiſſimorum Geometrarum occupationem juxta cum ſubtiliſſimis mereri videatur (k). Cæterum, in his Problematibus omnibus,

Fig. 7.

(l) Id eſt, *Portio axis applicatam inter & tangentem eſt ad ipſam tangentem ſicut quadratum applicatæ ad conſtans quoddam ſpatium.* Videatur Nus. LVIII. Art. III. §. 2.

(k) Videatur Nus. XLVIII.

bus, quæ quis nequicquam alia tentet Methodo, calculi *Leibnitiani* N.XLII. eximium & ſingularem plane uſum eſſe comperi, ut ipſum propterea inter primaria ſeculi noſtri inventa cenſendum eſſe æſtimem. Quanquam enim, ut nuper innui, anſam huic dediſſe credam calculum BARROWII, qualem appello, qui, ab hujus Viri tempore, paſſim fere apud Geometras præſtantiores invaluit, quemque etiamnum Nobil. TSCHIRNHAUSIO ſolemnem eſſe video: hoc tamen non eo intelligendum eſt, quaſi utiliſſimi inventi dignitatem ullatenus elevare, aut Celeberrimi Viri laudi meritæ quicquam detrahere & aliis aſcribere cupiam: & ſi quæ conferenti mihi utrinque intercedere inter illos viſa eſt affinitas, ea major non eſt, quam quæ faciat, ut, uno intellecto, ratio alterius facilius comprehendatur; dum unus ſuperfluas & mox delendas quantitates adhibet, quas alter compendio omittit. De cætero namque, compendium iſthoc tale eſt, quod naturam rei prorſus mutat, facitque ut infinita per hunc præſtari poſſint, quæ per alterum nequeunt: præterquam enim quod ipſum hoc compendium reperiſſe utique non erat cujuſvis, ſed ſublimis ingenii & quod Autorem quam maxime commendat.

N°. XLIII.

LETTRE
DE Mr. LE MARQUIS DE L'HOPITAL,
à *Mr.* Huygens,

Dans laquelle il prétend démontrer la régle de cet Auteur touchant le Centre de l'Oſcillation du pendule compoſé, par ſa cauſe phyſique, & répondre en même tems à Mr. Bernoulli.

Hiſtoire des Ouvrages des Sçavans. 1690. Juin. pag. 440.

Il y a quelques années, Monſieur, que j'ai lû avec admiration vôtre ſavant Traité des Centres d'Oſcillation, & que j'ai été pleinement convaincu de la vérité de vos démonſtrations. Cependant les *Journaux de Leipſic* m'étant tombés depuis peu entre les mains, j'ai trouvé dans celui du mois de *Juillet* de l'année 1686. le récit du différent que vous avez eu ſur ce ſujet avec Mr. l'*Abbé* Catelan, rapporté par Mr. Bernoulli *, qui décide en vôtre faveur, comme doivent faire aſſurément tous ceux qui prétendent tenir quelque rang parmi les Géométres. Mais j'ai été fort ſurpris de voir que la fin de ſon raiſonnement ſe trouve contraire à vos démonſtrations : ce qui m'a donné lieu de l'examiner avec ſoin ; & j'ai reconnu qu'il ſe ſert d'un principe très véritable, quoiqu'il ſe trompe dans l'application qu'il en fait.

* Ci-deſſus, No. XXIII.

Digitized by Google

fait. Car ce principe conduit, comme je vais montrer, à la même vérité que vous avez prouvée dans vôtre Propoſition V. **N.XLIII.**

Soit la verge DAB [*Fig.* 1.] inflexible, & ſans peſanteur, mobile autour du point fixe D, dans laquelle ſoient enfilés les deux poids égaux A & B, & ſoit la diſtance B D au point fixe, quadruple de A D; l'on demande la longueur D G du pendule ſimple iſochrone, c'eſt-à-dire, qui ſe meuve avec la même viteſſe que le pendule compoſé.

Pour réſoudre ce probléme, je conſidére les viteſſes avec leſquelles les corps A & B commencent à deſcendre dans le premier inſtant de leur chute, ou, ſi l'on aime mieux, les eſpaces qu'ils parcourent dans un même tems, quelque petit qu'on le prenne: & c'eſt dans ce ſens que je mets 1 pour la viteſſe, avec laquelle tout corps peſant, grand ou petit, commence à deſcendre ſur des plans également inclinés: car, comme l'on fait aſſez, cette viteſſe eſt égale dans tous les corps. Je conçois auſſi, que la quantité de mouvement d'un corps au commencement de ſa deſcente, naît de ſa maſſe multipliée par cette premiére viteſſe. Ceci ſuppoſé, il eſt conſtant que le corps A tend à deſcendre avec la même viteſſe que le corps B, & que ne le pouvant, parce qu'il eſt attaché en A, dont la viteſſe n'eſt que la quatriéme partie de celle de B, il doit hâter le mouvement du corps B dans le pendule compoſé; & toute la difficulté conſiſte à déterminer au juſte de combien ce mouvement doit être augmenté: & c'eſt ce que je fais en cette ſorte.

Soit x la quantité de mouvement du Corps A dans le pendule compoſé; L'excès reſtant de ſa quantité de mouvement ſera donc $A - x$, qui étant appliqué en A, fait effort ſur le point fixe D, & ſur le Corps B, que l'on doit enviſager comme étant immobile à ſon égard [puiſqu'il eſt évident que le corps B doit être cenſé ſans mouvement par rapport à cet excès] & par conſéquent la verge B D doit être regardée comme un levier appuïé par les deux bouts en B & D. L'on aura donc B D [4] eſt à B D [1] comme $A - x$ eſt à $\frac{1}{4} A - \frac{1}{4} x$, portion de l'excès de la quantité de mouvement du corps A, qui ſe diſtribuë en B: de ſorte que la quantité de mouvement du corps B dans le pendule compoſé, ſera $B + \frac{1}{4} A - \frac{1}{4} x$, c'eſt à dire, $\frac{1}{4} A - \frac{1}{4} x$. Or à cauſe de la verge inflexible D B, la viteſſe du corps B, dans le pendule compoſé, doit néceſſairement être quadruple de celle du corps A, & par conſéquent auſſi ſa quantité de mouvement, puiſque ces corps ſont égaux: d'où il ſuit qu'il y aura égalité entre $4x$, & $\frac{1}{4} A - \frac{1}{4} x$; d'où l'on tire une valeur $x = \frac{1}{17} A$, qui exprime la quantité de mouvement du corps A dans le pendule compoſé. Maintenant ſi l'on fait comme $\frac{1}{17}$ viteſſe du corps A dans le pendule compoſé, eſt à 1 viteſſe de tous les corps peſans au bout des pendules ſimples: de même D A [1], eſt à D G, [17]; ce ſera la longueur du pendule ſimple

iſochrone,

N. XLIII. iſochrone ; car les eſpaces étant entre eux comme les viteſſes, le tems doit être égal.

Si l'on ajoûte au pendule compoſé D A B [*Fig.* 2] le nouveau poids C égal à chacun des poids A & B, enſorte que DC ſoit double de DA, l'on doit conſidérer les poids A & B, comme étant attachés en G, leur centre d'oſcillation, au bout du pendule ſimple D G : & alors mettant x pour la quantité de mouvement du corps C, dans le pendule compoſé D C G, l'on aura $C - x$ pour l'excès reſtant de la quantité de mouvement du corps C, qui étant appliqué en C, fait effort ſur le point fixe D, & ſur le point G, que je regarde comme étant fixe à ſon égard. L'on aura donc DG [$\frac{17}{5}$] eſt à DC [2], comme $C - x$ eſt à ($10C - 10x$) : 17, portion de cet excès qui ſe diſtribue en G : d'où il ſuit que la quantité de mouvement des corps A & B dans le pendule compoſé D A C B ſera $\frac{5}{17} A + \frac{20}{17} B + \frac{10C - 10x}{17}$, c'eſt à dire, $\frac{35C - 10x}{17}$. Or à cauſe de la verge inflexible DB, la viteſſe du corps A dans le pendule compoſé ſera néceſſairement la moitié de celle du corps C, & celle du corps B ſera double de celle du corps C ; & de même auſſi leurs quantités de mouvement, ces trois corps étant égaux. Il y aura donc égalité entre $2x + \frac{1}{2}x$ & ($35C - 10x$) : 17, d'où l'on tire une valeur $x = \frac{2}{3}C$, qui exprime la quantité de mouvement du corps C dans le pendule compoſé DACB. Maintenant ſi l'on fait comme $\frac{2}{3}$ viteſſe du corps C dans le pendule compoſé, à 1 viteſſe de tout corps peſant au bout d'un pendule ſimple : de même DC [2] eſt à DE [3] ; ce ſera la longueur du pendule ſimple iſochrone. Si les poids A, B, C, étoient inégaux, l'on trouveroit toûjours, en ſuivant ce raiſonnement, le centre d'Oſcillation : de ſorte que cette méthode eſt générale, quel que ſoit le nombre des poids, & quelque inégalité qu'ils aïent entre eux. Il faut maintenant faire voir qu'elle ſert auſſi, lorſque les poids ſe trouvent de part & d'autre du point fixe.

Soit le pendule compoſé ADB [*Fig.* 3] mobile autour du point fixe D, & chargé de deux poids égaux A & B, & ſoit DB quadruple de D A ; il eſt viſible que le corps A doit retarder le mouvement du corps B, dans le pendule compoſé ; & pour trouver préciſément de combien, je nomme x la quantité de mouvement du corps B, dans le pendule compoſé ADB : & par conſéquent l'excès reſtant de ſa quantité de mouvement ſera $B - x$. Or à cauſe de la verge AB, la viteſſe du corps A doit néceſſairement être la quatriéme partie de celle du corps B. Donc ſa quantité de mouvement dans le pendule compoſé ſera $\frac{1}{4}x$ [car les corps A & B étant égaux, les quantités de mouvemens ſont proportionnées aux viteſſes.]

Or cette quantité de mouvement ne peut avoir été produite que par l'excès

Digitized by Google

l'excès reſtant de celle du corps B. Il eſt donc évident que cet excès $B - x$ doit vaincre la quantité de mouvement du corps A vers le bas, & lui en imprimer de plus $\frac{1}{4}x$ vers le haut, c'eſt-à-dire qu'il doit agir ſur le corps A, comme ſi la force $A + \frac{1}{4}x$ étant appliquée immédiatement en A, le pouſſoit vers le haut. Mais la force $B - x$, à cauſe du point fixe D, agit ſur le corps A, comme ſi la force $4B - 4x$ étant appliquée immédiatement en A, pouſſoit ce corps vers le haut. Il y aura dont égalité entre $4B - 4x$ & $A + \frac{1}{4}x$; d'où l'on tire une valeur $x = \frac{12}{17}B$, qui exprime au juſte la quantité de mouvement du corps B, dans le pendule compoſé ADB. Maintenant ſi l'on fait comme $\frac{12}{17}$ viteſſe du corps B, dans le pendule compoſé, eſt à 1 viteſſe de tout corps peſant au bout d'un pendule ſimple : de même DB [4] eſt à DG, [$\frac{17}{3}$] ce ſera la longueur du pendule ſimple iſochrone. N.XLIII.

Il eſt aiſé de conclure de tout ceci, que le principe de Mr. BERNOULLI eſt véritable, & qu'il ſe trompe dans la concluſion qu'il en tire : parce qu'il conſidére les viteſſes acquiſes des corps A & B, au lieu de conſidérer, comme nous avons fait, leurs viteſſes commençantes, & de plus leurs quantités de mouvement. Car ſans cela, on ne pourroit point appliquer ce principe, qui n'eſt autre que celui du levier, lorſque les corps ſont inégaux. De ſorte que je crois avoir pleinemennt ſatisfait à ſa demande, *Rogantur hac occaſione Eruditi* &c. *

Vous voyez, Monſieur, comme différentes routes conduiſent à la connoiſſance de la même vérité. Ce n'eſt pas que je veuille comparer celle-ci à la vôtre, qui eſt incomparablement plus ſavante & plus géométrique. Si vous jugez cependant qu'il ne ſoit pas inutile de faire voir, que les raiſons phiſiques que j'apporte ici s'accordent parfaitement avec vos démonſtrations, & qu'elles ſoient propres à lever le doute de Mr. BERNOULLI, je conſens que vous rendiez publique cette lettre, & je vous prie d'y ajoûter vos remarques, vous proteſtant que je n'appellerai point du jugement que vous en porterez, qui ne peut être que très éclairé & très équitable. Je ſuis très parfaitement &c.

* Ci-deſſus, pag. 280.

N°. XLIV.

Digitized by Google

N°. XLIV.

REMARQUES
DE Mr. HUYGENS
Sur la Lettre précédente & ſur le récit de Mr. Bernoulli, *dont on y fait mention.*

Hiſtoire des Ouvr. des Sça-vans 1690. Juin pag. 449.

J'AI toujours crû qu'il étoit difficile de trouver le Centre d'Oſcillation, d'une autre maniére que celle dont je me ſuis ſervi. Auſſi n'ai-je vû perſonne qui l'ait tenté heureuſement, ſoit à l'égard de la ſolution générale, ſoit au cas des pendules compoſés, dont les poids ſont en ligne droite avec le point de ſuſpenſion. C'eſt ce cas que Mr. le *Marquis de* L'Hôpital, après pluſieurs autres, s'eſt propoſé, & où je puis dire qu'il eſt le premier qui ait réüſſi. Car Mrs. Wallis & Mariote, & le Pére Deschales, n'ont cherché que le Centre de percuſſion, & n'ont pas pû démontrer légitimement que c'eſt le même que celui d'Oſcillation; quoique cela ſoit vrai. Au reſte, bien que la démonſtration de Mr. le *Marquis* ſoit bonne & bien fondée, & qu'elle ſemble fort naturelle; elle ne laiſſe pas que de comprendre pluſieurs choſes, qui peuvent d'abord faire de la peine aux Lecteurs; comme lorſqu'il conſidére la quantité de mouvement d'un corps tout au commencement de ſa chute; & lorſqu'il diſtingue & partage, comme il fait, le ſurplus du mouvement du corps A, ſavoir ce qu'il auroit davantage en tombant ſeparément, qu'en deſcendant comme partie du pendule compoſé; & enfin quand il dit qu'au pendule de trois poids, il faut conſidérer les deux A & B comme attachés en G, leur Centre d'Oſcillation. Ces choſes n'étant pas tout-à-fait évidentes, font voir que le chemin que Mr. le *Marquis* a pris eſt bien difficile, & qu'il a falu beaucoup de juſteſſe d'eſprit pour ne pas s'y égarer. Mr. Bernoulli, dans ſon récit de la diſpute entre Mr. l'*Abbé* Catelan & moi, ſur lequel je ferai enſuite quelques remarques, avoit ſuivi ce même chemin: mais n'aïant pû aller juſqu'à la fin, c'eſt une autre preuve de la difficulté qui s'y rencontre.

Je ſuis obligé à Mr. Bernoulli, d'avoir toujours pris mon parti dans cette diſpute avec Mr. l'*Abbé* Catelan. Cependant je n'ai pû compren-

dre

dre, comment après avoir dit que ma propoſition fondamentale du centre d'Oſcillation, dépend de ce grand principe des Méchaniques, ſavoir, *que le centre commun de gravité de pluſieurs poids ne ſauroit monter plus haut par l'effet de leur peſanteur, que d'où il eſt deſcendu*; il tourne enſuite contre moi certain raiſonnement qui eſt douteux, de ſon propre aveu, comme s'il étoit capable de mettre en doute la vérité de cette même propoſition; au lieu qu'il devoit plûtôt conclure qu'il y avoit de la faute dans ſon raiſonnement. N. XLIV.

Touchant ce qu'il m'impute, de n'avoir pas refuté dans ma premiére réponſe le faux principe de Mr. l'*Abbé*, & que dans la derniére je ne l'ai pas refuté par ſa cauſe phyſique: je dirai, que dans ma premiére réponſe, je croyois que c'étoit aſſez de montrer un défaut manifeſte dans le raiſonnement qu'on m'oppoſoit, ſans entrer plus avant en matiére; & que dans ma replique du 8 *Juin* 1684. je pourrois prétendre, auſſi-bien que Mr. BERNOULLI, d'avoir refuté ce principe par ſa cauſe phyſique; puiſque je fais voir qu'il répugne au grand principe naturel, *Que les corps peſans ne peuvent monter d'eux-mêmes*. Car je crois, que c'eſt autant en cela que conſiſte la cauſe phyſique, de ce que dans le pendule compoſé, les poids A & B, étant deſcendus conjointement au bas de leur vibration, n'acquiérent pas enſemble autant de viteſſe, que s'ils étoient tombés ſéparément des mêmes hauteurs; qu'en ce que le poids A conſume une partie de ſon mouvement en agiſſant ſur le point fixe F, ſuivant la démonſtration de Mr. BERNOULLI & de Mr. le *Marquis* de L'HÔPITAL. Et ma raiſon eſt, qu'il ſe perd ſouvent du mouvement, ſans qu'on puiſſe dire qu'il s'eſt conſumé à rien, comme dans pluſieurs cas du choc de deux corps durs, ſuivant ce que j'ai remarqué en publiant les Loix de ces ſortes de mouvemens dans le *Journal des Savans* en 1669. au Mois de *Février*: de ſorte que ce n'eſt pas une néceſſité que la quantité de mouvement ſe conſerve toûjours, ſi elle ne ſe conſume à quelque choſe; mais c'eſt une Loi conſtante, que les corps doivent garder leur *force aſcenſionelle*, & que pour cela la ſomme des quarrés de leur viteſſe doit demeurer la même. Ce qui n'a pas ſeulement lieu dans les poids des pendules, & dans le choc des corps durs, mais auſſi en beaucoup d'autres recherches de Méchanique.

J'avois montré, qu'en admettant le principe de Mr. *l'Abbé* CATELAN, la *force aſcenſionelle* des poids d'un pendule s'augmentoit, & par là leur commun centre de gravité pourroit monter plus haut que d'où il étoit deſcendu: d'où j'inferois que cela étant, on auroit trouvé le Mouvement perpétuel.

Mr. BERNOULLI ne demeure pas d'accord de cette conſéquence, à cauſe de l'obſtacle de l'air, & de quelques autres, qui en empêcheroient l'effet. Mais il devroit avoir conſidéré, que la hauteur qu'acquiert le centre de

N. XLIV. gravité par deſſus celle qu'il avoit, étant toujours d'une quantité déterminée, & l'effet des obſtacles n'étant pas déterminé, & ſe pouvant diminuer de plus en plus; on pourroit facilement faire une machine, où l'avantage du réhauſſement du centre de gravité ſurpaſſeroit l'empéchement des obſtacles. Mais c'eſt dequoi aſſurément l'on ne ſera jamais obligé de venir à l'épreuve.

No. XLV.

JACOBI BERNOULLI
DEMONSTRATIO CENTRI OSCILLATIONIS EX NATURA VECTIS,

Reperta occaſione eorum, quæ ſuper hac materia, in Hiſtoria litteraria Rotterodamenſi *recenſentur.*

Acta Erud. Lipſ. 1691. Jul. p. 317.

ANTE decennium eruditus quidam Gallus Illuſtris HUGENII doctrinam de centro Oſcillationis labefacturus ſuppoſuit, *Celeritatem totalem penduli compoſiti æquari ſummæ celeritatum partium ejus ſeparatarum.* Ego HUGENII aliquanto poſt ſuſcepta cauſa, principii hujus falſitatem ex natura vectis demonſtravi, juxta quam perpetuo partem celeritatis penduli in ipſo axe conſumi & deperdi neceſſum ſit; quod ſufficere poterat ad paralogiſmum Adverſario oſtendendum. Ideoque cum eadem opera determinare volebam, quanta præciſe celeritatis pars in axe abſumeretur; accidit mihi, ut rem, quam præter inſtitutum eſſe

eſſe judicabam, paulo negligentius curarem, indeque in calculum N. XLV.
inciderem ab *Hugeniana* propoſitione abludentem; quod ſuſpicari me fecit, diverſam eſſe rationem vectis cujus alterum fulcrum ſit in motu, quam quæ eſt vectis ordinarii: id quod tunc quidem aliis diſcutiendum reliqui, ipſemet vero materiam hanc ab eo tempore prorſus ſepoſui.

Interea præluſtris & generoſus quidam Vir, qui avitæ HOSPITALIORUM gloriæ nunc inſuper ſcientiarum litterarumque decus eximium addit, re maturius perpenſa, obſervavit huic meo principio e vulgari vectis natura deſumpto apprime cum *Hugeniano* calculo convenire; inque eo duntaxat peccatum a me eſſe, quod celeritatem penduli acquiſitam conſiderarim, cum naſcentis tantum ratio habenda fuiſſet. Cujus correctionis certior per litteras factus HUGENIUS approbavit methodum, ſed difficilem eandem pronunciat, & quædam haud ſatis evidentia continere aſſerit: veluti, quod celeritas vel quantitas motus penduli initialis, non acquiſita, ſpectanda ſit; quod diſtribuendus ejus exceſſus eo modo, quo fecimus, & quod in pendulo trium pluriumve ponderum, fulcrum vectis, reſpectu unius ponderis, concipiendum ſit in centro oſcillationis reliquorum: miratur denique cum illuſtri HOSPITALIO, quod Propoſitionis ſuæ veritatem, quam modo agnoſcere videbar, calculo meo dubiam reddere coner.

Ad quæ ſequentia notanda habeo: *Primo*, miror mirari Viros acutiſſimos, cum verba mea ſatis clare innuant, ex calculi iſtius ab *Hugeniana* hypotheſi diſſenſu me inferre voluiſſe potius, peculiarem, ut jam dixi, in oſcillatorio vecte obtinere communicationis motus legem, quam dictam hypotheſin ullatenus ſuſpectam reddere; quanquam, ſi verum fateri licet, nondum a me obtinere poſſum, ut hujus veritatem, vel in Axiomatum numero habeam, vel ab HUGENIO ſatis in propatulo conſtitutam arbitrer, eo præſertim caſu, quo pondera, durante motu ſuo mox inter ſe connexa, mox ſoluta ſupponuntur. *Secundo*, Ratio cur celeritas penduli initialis, non acquiſita, ſpectanda ſit, attendenti obſcura eſſe nequit; nec mihi fuiſſet olim, ſi vel per momentum ſpeculationi inhæſiſſem diutius. Intelligantur pondera quotvis B,

Digitized by Google

No. XLV. C, D, E, virga inflexili AB connexa, junctim deſcendere in perpendicularibus, ut ante hac ſuppoſui: celeritates quas acquirunt eo momento quo perveniunt in H, I, K, L, ſunto HM, IN, KO, LP, quæ cum proportionales eſſe debeant, ob commune vinculum, ipſis ponderum diſtantiis ab axe AB, AC, AD, AE; ſequitur virgam, cui implicata ſunt, ipſorum deſcenſui cum his celeritatibus continuando nihil afferre alterationis, & propterea nullum pondus hactenus in alterum quicquam de motu ſuo transferre. Supereſt ergo ſolus gravitatis impulſus, qui quolibet temporis inſtanti acquiſitis celeritatibus de novo ſuperadditur, qui alterationem patiatur. Repræſentetur hic, (cum omnibus corporibus æqualis imprimatur) per æquales lineolas MQ, NR, OS, PT, quæ quidem, reſpectu celeritatum acquiſitarum HM, IN, KO, LP, uti hæ ipſæ, reſpectu ſpatiorum percurſorum BH, CI, DK, EL, habendæ pro incomparabiliter parvis, ſic ut hæc tria QM, MH, HB, habeant ſe quodammodo, ut linea, ſuperficies & corpus. At vero, ob interpoſitam virgam, fieri nequit ut pondera ſimul ſint in punctis Q, R, S & T, hoc eſt, in recta QT parallela ipſi MA; quin potius in directum jacere debent cum axe A, ſecundum rectam VWXY; adeo ut, cum pondera axi propiora terminos ſuos S & T nondum attigerunt, remotiora ſuos Q & R jam prætererint, parte reſidua virium gravitatis ab illis in hæc tranſlata, parte in axe abſumpta. *Tertio*, in pendulo trium pluriumve ponderum, centrum oſcillationis omnium, excepto uno, conſiderat Hospitalius ceu fulcrum reſpectu reliqui. Hoc quia inevidens judicat Hugenius (quanquam verum deprehendam) & præterea quia ad demonſtrationem aliter quam per inductionem inſtituendam parum aptum, malo rem invertere, & pondus duntaxat extimum habere loco fulcri, quod ferat reliqua pondera omnia, ſuis quæque locis, vectem urgentia. *Quarto*, diſtributio, ſeu tranſlatio quantitatis motus (olim ſolas celeritates conſideravi, quia pondera ſuppoſui æqualia) nihil obſcuritatis habere tandem poteſt, fluitque ex natura vectis ordinarii: nimirum ponderis D incrementum celeritatis extra virgam eſt OS, in virga tantum OX,

OX, reſiduum XS; quantitas ergo motus tranſferenda, tum in axem, tum in pondus extimum $D \times XS$; unde AB eſt ad AD, ſicut $D \times XS$ ad $D \times AD \times XS : AB$, portionem quantitatis motus tranſferendam in ſolum pondus B. No. XLV.

Similiter portio, quam de motu ſuo pondus E in pondus B tranſmittit eſt $E \times AE \times YT : AB$. At pondus C, quod majus celeritatis incrementum in virga quam extra virgam accipit, motui ponderis B contraria ratione adimere cenſendum eſt portionem $C \times AC \times WR : AB$. Eſt vero totum incrementum quantitatis motus, quod ponderi extimi B a reliquis ponderibus accedit, præter id quod a propria gravitate nanciſcitur, $B \times VQ$. Tandem ſit Z interſectio rectarum QT, VY, & ducatur GZ parallela rectis BV, CW, &c.

Quibus poſitis, centrum oſcillationis ſic invenitur. Per hypotheſin, & ex natura vectis, eſt $(E \times AE \times YT + D \times AD \times XS - C \times AC \times WR) : AB = B \times VQ$, quare, æque-multiplicando & addendo, erit $E \times AE \times YT + D \times AD \times XS = C \times AC \times WR + B \times AB \times VQ$, ſeu [quia YT, XS, WR, VQ ipſis ZY, ZX, ZW, ZV, vel ipſis GE, GD, GC, GB proportionalia] $E \times AEG + D \times ADG = C \times ACG + B \times ABG$; additis utrique parti, tum $E \times AEq + DE \times ADq$, tum $C \times CAG + B \times BAG$, fiet $E \times EAG + D \times DAG + C \times CAG + B \times BAG = E \times AEq + D \times ADq + C \times ACq + B \times ABq$; unde tandem $AG = (B \times ABq + C \times ACq + D \times ADq + E \times AEq) : (B \times AB + C \times AC + D \times AD + E \times AE)$. Si quædam pondera ultra axem, ex adverſa parte, conſtituta ſint; eadem pro AG invenitur quantitas; niſi quod membra denominatoris ponderibus iſtis reſpondentia fiant negativa.

Jam vero puncti G a virga ponderibus B, C, D, & E gravata abrepti & per rectam GZ deſcendentis, incrementum celeritatis, cum pervenit ad F, neceſſario eſt FZ, quæ eſt æqualis, ob Parallelogrammum FQ, ipſi MQ vel NR &c. incremento ſcilicet velocitatis, quod pondus quodlibet deſcendens a propria gravitate acquirit; quod cum ſimiliter valeat in omnibus ſpatii GZ partibus, ſequitur, ſpatium iſtud, hoc eſt, angulum GAZ, eodem

N. XLV. dem tempore pertranſiri a virga, ſive omnibus ponderibus B, C, D, & E, ſive tantum unico pondere in G gravata; & proin G fore centrum oſcillationis; quod itaque repertum eſt. Neque variat demonſtratio pro pendulo ordinario, cui pondera ita inhærent, ut per arcus circulorum deſcendere cogantur, cumque reperta quantitas AG eadem ſit cum illa, quæ alias pro centro percuſſionis invenitur, ſequitur *centrum oſcillationis* & *percuſſionis* corporum, ut recte notavit Hugenius, unum idemque eſſe; quanquam Wallisius in Cono, exempli gratia, aliud percuſſionis, Hugenius aliud oſcillationis centrum aſſignat: fallitur enim Wallisius, in eo quod integræ baſi coni circuliſque baſi parallelis, non majorem diſtantiam ab axe rotationis celeritatemque tribuit ea, quam ipſa horum circulorum centra obtinent.

Hæc vero centri oſcillationis demonſtratio ſic reformata, uti generalis eſt & facilis, inque geometrica exactitudine *Hugeniana* neutiquam cedit; ſic eidem in eo præferenda videtur, quod principium vectis, quo nititur, indubitatum eſt ac evidens, cum *Hugeniana* hypotheſis obſcura fere ſit, nec aliam ob cauſam pro vera habeatur, quam quod nihil in contrarium afferri poſſit; intellige in ſolidis corporibus: in liquidis enim res magis dubia videtur; cum vix appareat, quomodo cum iſta hypotheſi conciliari poſſit ſpontaneus communis centri gravitatis aſcenſus, qui accidit, cum metallum in imo liquoris acidi poſitum ac diſſolutum, aut liquor graviori leniter ſuperinfuſus eidem ſenſim permiſcetur; id quod anſa & fundamentum extitit Perpetui Mobilis nuper a *Fratre* inventi ac in *Actis* publicati, cui proin ibidem ſubjunctam ſtricturam neutiquam officere exiſtimamus. Cæterum collegeram, quod ſi celeritas totalis penduli compoſiti minor eſſe debeat ſumma celeritatum partium ejus ſeparatarum, reliquum in axe premendo conſumi neceſſum ſit. Negat Hugenius hanc conſequentiam, dicendo, ſæpe numero deperdi aliquid de motu, quod nullibi inſumatur. At ego contra ſentio, ſi quid amittatur, illud perpetuo alicubi impendi, ſed quandoque in premendo firmo obice, quandoque in tollendo motu contrario; adeo

adeo ut, cum penduli noſtri pondera moveantur in eandem par- No.XLV.
tem, jure inferre potuerim, motum deperditum neceſſario in axe premendo conſumptum eſſe.

Denique & illud dubium eſt, quod mihi objicit Vir acutiſſimus, effectum videlicet reſiſtentiæ aeris, diſruptionis vinculi, quod partes penduli connectit, aliorumque obſtaculorum indeterminatæ quantitatis eſſe, minuique in infinitum poſſe, ſic ut non tollat (ut exiſtimaram) poſſibilitatem motus perpetui, qui alias obtineret, ſi ſine his impedimentis centrum gravitatis penduli altius aſcendere quam deſcendere ſupponeretur. Conſtat enim, id quod de motu communicatur aut abſumitur occurſu obſtaculorum, ad celeritatem mobilis, & hanc ad motus altitudinem determinatam ſemper relationem obtinere.

Tantum de his. Notum occaſione præſentis materiæ Eruditis facio, *Fratrem* meum obſervaſſe, quod præter HUGENII Cycloidem infinitæ dentur curvæ, per quas deſcendens grave oſcillationes peragat iſochronas: item non ſolum cum NEWTONO & TSCHIRNHAUSIO infinitas Cycloides animadvertiſſe, quæ ſui evolutione ſeipſas deſcribant; ſed & detexiſſe quampiam ex alio quam Cycloidalium genere, quæ eadem proprietate gaudeat.

Videatur Nus. XCVIII.

N°. XLVI.

N°. XLVI.

SOLUTIO

CURVÆ CAUSTICÆ

Per vulgarem Geometriam Carteſianam; aliaque.
Autore Joh. Bernoulli *Med. Cand.*

Act. Erud. Lipſ. 1691. Janu. p. 30.

QUIA modus, quo naturam Curvæ cauſticæ, Nob. D. T. (a) primum conſideratæ, per vulgarem Geometriam inquiſivi, diverſamque deprehendi ab ea, quam applicatæ ſemicirculi in punctis biſectionum formant, non cuivis obvius eſt, placet hic eum, in gratiam amatorum hujus Geometriæ plenius exponere: ubi primò notare convenit, quod [fig. 1.] CB radius reflexus paralleli DC, ſit æqualis ipſi AB, interceptæ inter centrum A & punctum interſectionis B. Nam ob angulum ACF = ACE, & DCF = BCE, erit angulus ACB = ACD = CAB: Ergo BC = AB. *Q.E.D.*

Hoc præliminato, hujus curvæ generationem ſic concipio: Sint [Figura

(a) Nob. De Tschirnhausen in *Actis Erud.* 1682. Octob. p. 364. dixerat curvam quam perpetuo tangunt radii a ſemi-circulo reflexi, poſitis incidentibus parallelis, ita deſcribi poſſe. Sit E C e (fig. 6.) ſemicirculus reflectens; AC ſemidiameter radiis incidentibus FD, f d parallela; E e diameter ad eos perpendicularis; deſcribantur ſemicirculi EGA, A g e; & pars radii incidentis GD, intercepta inter ſemicirculos ECe, EGA, biſecetur in H: erit punctum H unum eorum, quæ conſtituunt cauſticam EHBhe. Hunc errorem hic refutat Noſter, & eum ipſe De Tschirnhausen in *Actis Erud.* 1690. Febr. pag. 71. candide agnovit. „ Quod ad circulum attinet, „ inquit, nuper Dn. Bernoulli, „ hic in hiſce ſtudiis eximie verſatus „ & egregiis ſpeciminibus clarus, ob„ ſervavit curvam, quæ hic per re„ flexos radios formatur, ad ſex aſ„ cendere dimenſiones: ego vero ex „ calculo olim collegeram illam qua„ tuor tantum eſſe dimenſionum. Qua„ propter rationes denuo ſubducens, „ quæ ſatis olim prolixæ erant, cum „ nondum inſtructus eſſem neceſſariis „ compendiis, illico deprehendi er„ rorem qui irrepſerat.

Digitized by Google

gura II.] tres radii prædicto modo reflexi AF, BE, CD, ſe mutuo ſecantes in punctis G, H, I, quorum quilibet, ex hypotheſi, curvam quæſitam tangit; ideoque punctum contactus radii BE non poterit eſſe in HB; ſecus AF curvam ſecaret; nec etiam erit in GE, alias DC ſecaret; utrumque contra hypotheſin: erit ergo in GH. Intelligantur nunc puncta A & C magis appropinquari ad B; magis itaque accedent etiam ad ſe invicem puncta H & G, ut ita arctius limitetur punctum contactus; ſi ergo A & C coincidant in B, concurrent quoque G & H, adeo ut contactus plane determinatus ſit, nimirum in concurſu punctorum G & H. Liceat concurſum hunc appellare *punctum concurrentiæ*, quod in hoc ſpeciali exemplo ita comparatum eſt, ut unica linea EB per illud duci poſſit, quæ ſit æqualis ipſi conterminæ KB; cum per quodlibet aliud punctum G, vel H, cis vel ultra punctum concurrentiæ, ſemper duæ lineæ EB & DC, vel EB & AF duci poſſint, ita ut tam KC = KB, quam KB = BE, vel tam KA = AF, quam KB = BE. Num. XLVI.

Quod hactenus dictum eſt de puncto concurrentiæ in radio reflexo EB, pariter etiam intelligendum erit de omnibus aliis, in radiis reflexis, FA, DC &c. Ideoque problema propoſitum huc recidit: *Invenire naturam Curvæ, quam formant puncta concurrentiæ radiorum reflexorum.*

Ad hoc inveſtigandum, ponatur more *Carteſiano* [Figura 3.] $AB = x$, perpendicularis $BC = y$, $AK = a$: invenienda itaque eſt CD, quæ ſi producatur ad E, DE ſit = AE; & reſultans æquatio habebit duas radices æquales, quia ſupponitur C eſſe punctum concurrentiæ, per quod, ſcil. unica linea DE ducitur, ita ut ſit = AE: ponatur ergo $CD = z$, & AE [ED] $= m$; erit $CE = m - z$, $BE = \sqrt{(mm - 2mz + zz - yy)}$ & $AE = AB - BE = x - \sqrt{(mm - 2mz + zz - yy)} = m$; reducta æquatione invenitur $m = (xx - zz + yy) : (2x - 2z)$; porro quia $\sqrt{(aa - xx)} = GB$, erit $GC \times GH$ [$DC \times CF$] $= aa - xx - yy$; proinde $CF = (aa - xx - yy) : z$, & $DF = (aa - xx - yy + zz) : z$, & $EF = (aa - xx - yy + zz) : z - m$, ideoque $DE \times EF$ $=$ [$KE \times KI$] $= aa - mm = (aa - xx - yy + zz)\, m : z - mm$; invenietur ergo $m = aaz : (aa - xx - yy + zz) = (xx - zz + yy) : (2x - 2z)$; reducta æquatione habetur $z^4 - 2xxzz - 2yyzz - aazz + 2aaxz + x^4 + 2xxyy + y^4 - aaxx - aayy = 0$

Hæc æquatio duas radices æquales habens multiplicetur per duas progreſſiones arithmeticas.

$$\begin{array}{lllllllllll}
-0, & -1, & -2, & -3, & -4 & & +4, & +3, & +2, & +1, & +0, \\
z^4 & * & -2xxzz & +2aaxz & +x^4 & = 0 = & z^4 & * & -2xxzz & +2aaxz & +x^4 \\
 & & -2yyzz & & +2xxyy & & & & -2yyzz & & +2xxyy \\
 & & -aazz & & +y^4 & & & & -aazz & & +y^4 \\
 & & & & -aaxx & & & & & & -aaxx \\
 & & & & -aayy & & & & & & -aayy
\end{array}$$

Num. XLVI.

provenient duæ æquationes ⊙ & ☿

$$\odot\quad \begin{array}{llcl} 4xxzz & -\,6aaxz & -\,4x^4 & =0=4z^4 * \begin{array}{l} -\,4xxzz + 2aaxz \\ -\,4yyzz \\ -\,2aazz \end{array} \text{☿} \\ +\,4yyzz & & -\,8xxyy & \\ +\,2aazz & & -\,4y^4 & \\ & & +\,4aaxx & \\ & & +\,4aayy & \end{array}$$

multiplicetur ⊙ per z, & ☿ per $(xx+yy+\frac{1}{2}aa):z$, provenit

$$\begin{array}{lll} 4xxz^3 & -\,6aaxzz & -\,4x^4z \\ +\,4yyz^3 & & -\,8xxyyz \\ +\,2aaz^3 & & -\,4y^4z \\ & & +\,4aaxxz \\ & & +\,4aayyz \end{array} = 0 = \begin{array}{l} 4xxz^3 \\ +\,4yyz^3 \\ +\,2aaz^3 \end{array} * \begin{array}{ll} -\,4x^4z & +\,2aax^3 \\ -\,8xxyyz & +\,2aaxyy \\ -\,4aaxxz & +\,a^4x \\ -\,4y^4z & \\ -\,4aayyz & \\ -\,a^4z & \end{array}$$

quarum hanc ab illa ſi ſubtrahas, reſiduum per aa diviſum, erit

$$\text{♃}\quad \begin{array}{lll} 6xzz & -\,8xxz & +\,2x^3 \\ & -\,8yyz & +\,2xyy \\ & -\,aaz & +\,aax \end{array} = 0$$

multiplicetur ⊙ per $3x$, & ♃ per $2xx+2yy+aa$, habebitur

$$\begin{array}{lll} 12x^3zz & -\,18aaxxz & -\,12x^5 \\ +\,12xyyzz & & -\,24x^3yy \\ +\,6aaxzz & & -\,12xy^4 \\ & & +\,12aax^3 \\ & & +\,12aaxyy \end{array} = 0 = \begin{array}{lll} 12x^3zz & -\,16x^4z & +\,4x^5 \\ +\,12xyyzz & -\,32xxyyz & +\,8x^3yy \\ +\,6aaxzz & -\,16y^4z & +\,4aax^3 \\ & -\,10aaxxz & +\,4xy^4 \\ & -\,10aayyz & +\,4aaxyy \\ & -\,a^4z & +\,a^4x \end{array}$$

ſubtractione peracta, reſiduum eſt

$$\text{☾}\quad \begin{array}{ll} 16x^4z & -\,16x^5 \\ +\,32xxyyz & -\,32x^3yy \\ +\,16y^4z & -\,16xy^4 \\ -\,8aaxxz & +\,8aax^3 \\ +\,10aayyz & +\,8aaxyy \\ +\,a^4z & -\,a^4x \end{array} = 0$$

multiplicetur ♃ per z, & ☿ per $\frac{3}{2}x$, habebitur

$$\begin{array}{lll} 6xz^3 & -\,8xxzz & +\,2x^3z \\ & -\,8yyzz & +\,2xyyz \\ & -\,aazz & +\,aaxz \end{array} = 0 = 6xz^3 * \begin{array}{ll} -\,6x^3z & +\,3aaxx \\ -\,6xyyz & \\ -\,3aaxz & \end{array}$$

& ſub-

& ſubtractionis reſiduum erit

$$\begin{array}{llll} & 8xxzz - 8x^3z & + 3aaxx & = 0 \\ + & 8yyzz - 8xyyz & & \\ + & aazz \;\; - 4aaxz & & \end{array}$$

quod ſi ſubtrahatur ex duplo ⊙, reſiduum erit

$$\begin{array}{llll} 3aazz - 8aaxz & - 8x^4 & = 0 \\ + 8x^3z & - 16xxyy, & \\ + 8xyyz & - 8y^4 & \\ & + 5aaxx & \\ & + 8aayy & \end{array}$$

hoc multiplicetur per $2x$ & ♃ per aa, erit

$$\begin{array}{lll} 6aaxzz - 16aaxxz - 16x^5 & = 0 = 6aaxzz - 8aaxxz & + 2aax^3 \\ + 16x^4z \;\; - 32x^3yy & \qquad - 8aayyz & + 2aaxyy \\ + 16xxyyz - 16xy^4 & \qquad - a^4z & + a^4x \\ \qquad + 10aax^3 & & \\ \qquad + 16aaxyy & & \end{array}$$

reſiduum

$$\begin{array}{llll} ♀ & 8aaxxz & + 16x^5 & = 0 \\ & - 16x^4z & + 32x^3yy & \\ & - 16xxyyz & + 16xy^4 & \\ & - 8aayyz & - 8aax^3 & \\ & - a^4z & - 14aaxyy & \\ & & + a^4x & \end{array}$$

addantur nunc ♀ & ☾, & dividendo per $2yy$, habebitur $8xxz + 8yyz + aaz - 3aax = 0$, ideoque erit $z = 3aax : (8xx + 8yy + aa)$, & per æquationem ♀ eſt $z = (16x^5 + 32x^3yy + 16xy^4 - 8aax^3 - 14aaxyy + a^4x) : (8aaxx - 16x^4 - 16xxyy - 8aayy - a^4)$. Multiplicando per crucem, & reducta æquatione ad cyphram orietur tandem

$$\begin{array}{lllll} 64x^6 - 48aax^4 & + 12a^4xx & - a^6 & = 0 \\ + 192yyx^4 & - 96aayyxx & - 15a^4yy & \\ & + 192y^4xx & - 48aay^4 & \\ & & + 64y^6 & \end{array}$$

Hæc, quæ vera eſt æquatio naturam curvæ determinans, ad pauciores dimenſiones reduci nequit, cum per poſitionem $y = \frac{1}{2}a$, æquatio $256x^6 - 27a^6 = 0$, irreducibilis oriatur; unde conſequitur, diverſam eſſe ab

Num. XLVI. ea, quam applicatæ ſemicirculi in punctis biſectionum formant, ut pote cujus natura per æquationem biquadraticam exprimitur ([b])

$$\begin{aligned} 16x^4 - 8aaxx + a^4 &= 0 \\ - 8ayxx - 2a^3y & \\ + 16yyxx + aayy & \end{aligned}$$

Haud abſimili modo invenitur natura curvæ ABC, (*Fig.* 4) quæ talis eſt, ut a quocunque curvæ puncto B tangens utrinque protenſa, & a cruribus anguli recti FA, FC intercepta, ED, ſit æqualis conſtanti datæ. Invenio namque pro æquatione naturam curvæ exprimente [poſito FG $= x$, GB $= y$, ED $= a$] ([c])

$$\begin{aligned} x^6 - 3aax^4 + 3a^4xx - a^6 &= 0 \\ + 3yyx^4 + 21aayyxx + 3a^4yy & \\ + 3y^4x^2 - 3aay^4 & \\ + y^6 & \end{aligned}$$

Curvæ autem portio BC [ut & hoc moneam] æqualis eſt $\frac{3}{2}$ BD, proinde longitudo totius curvæ ABC æquatur $\frac{3}{2}$ AF vel $\frac{3}{2}$ ED.

Inſuper natura curvæ CKIH, quæ ex evolutione curvæ ABC deſcribitur

([b]) Eſt enim FH $=$ FG $+ \frac{1}{2}$GD $=$ FG $+ \frac{1}{2}$ FD $- \frac{1}{2}$FG $= \frac{1}{2}$ FD $+ \frac{1}{2}$FG vel 2FH $=$ FD $+$ FG. Sed poſita AE $= a$, FH $= x$, AF $= y$, eſt FD $= \sqrt{(aa - yy)}$ & FG $= \sqrt{(ay - yy)}$. Ergo $2x = \sqrt{(aa - yy)} + \sqrt{(ay - yy)}$, aut $4xx = aa - yy + ay - yy + 2\sqrt{(aa - yy)(ay - yy)}$, & $(4xx - aa - ay + 2yy)^2 = 16x^4 - 8aaxx + a^4 - 8ayxx + 2a^3y + aayy + 16xxyy - 4aayy - 4ay^3 + 4y^4 = 4a^3y - 4aayy - 4ay^3 + 4y^4$, quæ ad cyphram reducta ipſiſſima eſt Auctoris æquatio.

([c]) Dicatur inſuper FD $= z$, & erit GD $= z - x$, atque $EF^2 = ED^2 - DF^2 = aa - zz$. Igitur, propter BG parallelam FE, erit $EF^2\ [aa - zz] : FD^2\ [zz] = BG^2\ [yy] : GD^2\ [zz - 2zx + xx]$, ideoque $aazz - z^4 - 2aaxz + 2xz^3 + aaxx - xxzz = yyzz$, quæ ordinata, & per duplicem progreſſionem arithmeticam multiplicata, poſt varias reductiones, eliminata z, tandem dabit æquationem Auctoris noſtri. Sed ea multo facilius, per Calculum infiniteſimalem obtineatur. Videatur *Analyſis infin. parvorum* March. HOSPITALII, §. 152. *ſq.* ubi oſtenditur FG [x] $= z^3 : aa$, ideoque GD $= z - z^3 : aa = (aa - zz)z : aa$, nec non GB [$y$] $= (aa - zz)\sqrt{(aa - zz)} : aa$, propter FD : GD $=$ EF : GB: unde eliminata z, habetur æquatio Auctoris noſtri. Vide ibidem demonſtratas pleraſque hujus curvæ, & ejus evolutæ proprietates.

bitur, [poſito $FG = x$, $GI = z$] exprimitur per hanc æquationem [4]. Num. XLVI.

$$\begin{aligned} 4x^6 - 12aax^4 + 12a^4xx - 4a^6 &= 0 \\ + 12zzx^4 - 24aazzxx + 12a^4zz & \\ + 12z^4xx - 15aaz^4 & \\ + 4z^6 & \end{aligned}$$

Curvæ hæ habent hanc proprietatem inſignem : Spatium curvilineum BDC eſt ad ſpatium curvilineum DKC ubique ut 4 ad 5.

Facta FL & FM $= \frac{2}{5}$ AF ſeu FC, ductiſque MN & LN parallelis FC & AF: erit punctum concurſus N centrum gravitatis curvæ ABC.

Facta vero FO $= \frac{2}{5}$ FG, erit centrum gravitatis portionis AB in linea parallela OP

Facta FQ $= \frac{2}{5}$ GB, erit centrum gravitatis portionis BC in linea parallela QR.

Cæterum animadvertit *Clariſſimus Frater*, methodum hanc poſſe generalem effici, & adhiberi ad determinandas naturas omnium Evolutarum & Cauſticarum, hoc eſt curvarum, quæ per interſectiones perpendicularium aut radiorum reflexorum formantur : Etenim ſi duæ rectæ [*Figura* V] BD, CD, fingantur eſſe perpendiculares ad curvam ACB, vel radiorum incidentium LB, LC reflexi, interſecantes ſeſe in communi puncto D; ſequitur utique, quod vice verſa ex dato puncto D duæ quoque hujuſmodi lineæ inflecti poſſint, quæ ſint vel perpendiculares curvæ AB, vel reflexi radiorum in punctum L vergentium. Quo circa, ſi rectæ AE, ED, utut indeterminatæ, conſiderentur tantiſper ut cognitæ & determinatæ; hoc eſt, punctum D ut datum, & quæratur exinde longitudo z, puta ipſius DB vel BL, vel BG, vel AG [prout hoc illudve ſimplicius videbitur] habebit æquatio, longitudinem z exprimens, duas radices æquales quidem, ſicubi puncta B & C indiſtantia, hoc eſt, punctum D in curva optata fuerit : quare, ſi porrò dicta æquatio nota methodo tractetur, & eliminetur ex illa littera z, reſultabit alia, quæ relationem indeterminatarum x & y, ſive rectarum AE, DE, adeoque naturam curvæ quæſitæ exhibet. E quibus concludit, Geometriam vulgarem, ſi dextre adhibeatur, poſſe nonnunquam ad ea quoque problemata extendi, quæ abſque reconditiore indiviſibilium Geometria ſolvi non poſſe credebantur; quanquam cætera cum hac neutiquam comparari mereatur. Speciatim annotat, evolutam Parabolæ expeditiori calculo ſic inveniri, quam nuper illam ope methodi infinite parvorum repererat. Poſitis enim

[4] Demiſſa ex K normali $KS = s$, & vocata $FS = x$, quoniam $BK = BC = \frac{1}{3} BD$, erit $DK =$ [illegible] BD, & $DS = \frac{1}{2} GD = [aa - zz] z : 2aa$ $= x - z$ atque $KS [s] = \frac{1}{2} BG = (aa - zz) \sqrt{(aa - zz)} : 2aa$; unde, eliminata z, habetur æquatio.

Num. XLVI.

Latere recto Parab. $= a$		$AI + IE = AG + GF + FE$
	erit $AG = zz : a$	$\frac{1}{4}a + x = zz : a + \frac{1}{4}a + ay : 2z$
$AI = \frac{1}{4}a$	$GF = \frac{1}{4}a$	$x = zz : a + ay : 2z$
$IE = x$	$EF = ay : 2z$	
$ED = y$		
$BG = z$		

$$2z^3 * - 2axz + aay = 0 = 2z^3 * - 2axz + aay$$
$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & & 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$-4axz + 3aay = 0 = 6z^3 - 2axz$$
$$z = 3ay : 4x \qquad 3zz = ax$$
$$zz = 9aayy : 16xx \qquad zz = ax : 3$$

Unde $9aayy : 16xx = ax : 3$ & $27ayy = 16x^3$

N°. XLVII.

N°. XLVII.

ADDITAMENTUM
AD SOLUTIONEM
CURVÆ CAUSTICÆ
Fratris Joannis BERNOULLI,
Una cum Meditatione de Natura Evolutarum, & variis oſculationum generibus.

ANtequam *Frater* hanc ſuam lucubratiunculam *Geneva* mihi tranſmiſiſſet, pervenit ad Nos *September Actorum*, ubi Celeberrimus LEIBNITIUS in excuſſione *Solutionum Problematis Catenarii* [de quarum pulchro conſenſu nobis multum gratulamur] occaſionem captat recordandi ſubtiliſſimæ ſuæ *Meditationis de Contactu* [quem ſignificanter vocat] *oſculi*, * memorando HUGENIUM primum animadvertiſſe, quod centra circulorum curvas oſculantium perpetuo incidant in lineas iſtas, quas proxime contemplati ſumus, eas ſcilicet, ex quarum evolutione illæ deſcribuntur. Qua occaſione Evolutas aliter reperire, inſimulque oſculorum naturam Geometris paucis hactenus ſatis perſpectam, plenius cognoſcere didici; quod jam oſtendo. Pono iterum [Tab. XVII. N°. 46. *Fig.* 5.] $AE = x$, $ED = y$, $DB = z$, & BG, vel $AG = u$: conſideroque tres priores *Act Erud. Lipſ.* 1691. Mart. pag. 110.

* G. G. L. *Meditatio nova de Natura anguli contactus & oſculi, horumque uſu in practica Matheſi, ad figuras faciliores ſuccedaneas difficilioribus ſubſtituendas.* Acta Erud. Lipſ. 1686. Jun. pag. 289.

Digitized by Google

Num. XLVII. priores ut datas, hoc eſt, ſuper puncto dato D concipio deſcriptum eſſe circulum radio DB, & quæro exinde per naturam curvæ ACB quartam *u*, cujus valor exprimetur per æquationem tot dimenſionum, in quot diverſis punctis circulus iſte curvam ſecat, vel ſecare poteſt. Sint duæ interſectiones proximæ B & C, ac intelligatur ſuper D novus deſcribi circulus, radio continuo majori vel minori, quouſque puncta B & C propius ſubinde coeuntia tandem in unum coaleſcant, quod ſit B; quo facto & ipſæ CH & BG uniuntur, radixque æquationis *u* duos æquales valores acquirit, radius vero DB fit curvæ perpendicularis, ipſamque cum ſecaſſet antea, nunc tangit circulus: ad quem proin contactum inveniendum multiplico repertam æquationem per progreſſionem arithmeticam, & quod provenit cum dicta æquatione [aliave per aliam progreſſionem arithmeticam ſimiliter quæſita] methodo, qua ſupra uſus eſt *Frater*, confero, ut eliminata littera *u* habeam æquationem inter *x* & *y* [quam tamen neceſſario etiam ingredietur *z*]. Quare ſi hac data manente, cæteræ *x* & *y* ſpectentur ut indeterminatæ, denotabit æquatio ultima lineam, in qua ſumpto ubivis puncto D, circulus ſuper illo deſcriptus radio conſtanti DB curvam AB tangit. Quod ſi nunc radius DB, ſive *z*, continuo major minorve aſſumatur, naſcentur ſubinde aliæ curvæ infinitæ, quæ omnes inter ſe & principali AB erunt parallelæ, ceu eodem conſtanti intervallo perpendiculari DB ab illa diſtantes, hacque inter ſe affinitate gaudent, quod ab evolutione ejuſdem curvæ ID per filum DB [in infinitum, ſi vis, ex parte B productum] facta ſimul omnes deſcribantur; unde principali AB *condeſcriptæ* dici poſſunt.

Porro ſi circulus OCBPQS [ut in ea quam hic ſiſtimus figura 1 Tab. XVIII. N°. 47.] præter contactum curvæ TCBPRS in puncto B, eandem inſuper ſecat alibi in punctis C, P, S, ab alterutra vel utraque parte: tum fluere intelligatur centrum D in recta indefinita DB, & novi ſubinde concipiantur circuli per B tranſeuntes; ſic manebit quidem contactus ſingulorum cum curva fixus in B, at interſectiones reliquæ erunt ambulatoriæ, permeabuntque omnia curvæ puncta: nimirum ſi circulus curvam tangat

gat exterius in B, & centrum D fluat verſus idem punctum: aut N.XLVII
ſi tangat illam interius, & recedat centrum ab eodem, futurum utroque modo, ut interſectiones P, C, contactui B proximæ huic continuo appropinquent, quouſque alterutra earum, puta C, in illum incidat, & ſic duabus interſectionibus, quibus contactus B æquivalet, tertiam jungendo, oſculum primi gradus efficiat: ubi hoc ſingulare evenit, quod poſtquam C cum B coaluit, [P nondum attingente ipſum B, vel etiam nulla exiſtente interſectione P,] arcuum circuli CO [hoc eſt, BCO] & BP alter ab intra, alter ab extra curvam oſculatur, eamque adeo revera ſecat, non tangit; ipſo contactus genere perfectiori contactum quaſi deſtruente, & in ſectionem transformante. Quod ſi durante fluxu puncti D per rectam BD contingat, ut ambæ interſectiones C & P eodem momento ad punctum B appellant [quod accidit, cum portiones curvæ BC, BP, aut prorſus ſimilares ſunt, aut ſaltem in partibus ſuis minimis ipſi B proximis eandem flexionem, curvedinem, ſeu declivitatem habent,] tum circulus curvam in puncto B excipiet oſculo ſecundi gradus; coincidentibus ibidem quatuor interſectionibus, ſed ſectione jam iterum in contactum abeunte; vel potiùs [quia ob ſimultaneum appulſum punctorum C & P nulla in B ſectio præceſſit] ipſo contactu externo tantum in internum verſo, aut viciſſim; qui vero altera vice ſectionis naturam indueret, ſi quinta interſectio accederet, & denuo rediret in contactum, ubi ſexta. In genere oſculationes graduum a numero impari denominatorum ſunt ſectiones, a pari contactus. Jam vero tametſi ulteriori fluxu puncti D per rectam BD, circuli, quorum centrum eſt, creſcere vel decreſcere pergant, nulla amplius reliquarum interſectionum oſculo in B addi poteſt; præterquam enim quod interſectiones P & C in contactu B non ſtabiles manent, ſed ex eodem ſubinde emergentes ad oppoſitas curvæ partes prorepunt, aut prorſus evaneſcunt; cæteræ [qualis S] a contatu B perpetuo longius recedere coguntur; tantum abeſt ut ei appropinquent: ad hoc enim efficiendum requireretur, ut novi iſti circuli, imaginatione ſupplendi, curvam noſtram & prius ipſum circulum hic expreſſum [quem in B tangere ſupponuntur] alicubi inter B & S ſec-

Num. XLVII. ſecarent, quod abſurdum: unde diſcimus, quod ſi circulus quamcumque curvam primi vel ſecundi gradus oſculo amplectitur, nullus allius circulus inter ipſum curvamque duci poteſt. Secus ſentiendum de hyperbolis & ellipſibus: quia enim duæ hyperbolæ, vel ellipſes duorum laterum cum tranſverſi tum recti, in vertice ſe tangentes, in duobus quoque aliis punctis ſe ſecare queunt, fieri poteſt, ut dum una earum, fluxu lateris ſui, ampliatur, vel contrahitur; alteram tandem oſculo ſecundi gradus ſalutare incipiat, collectis in ipſo vertice duabus illis interſectionibus; quod contingit, ubi ambo recta latera æquata fuerint: quo circa ſubſtituta, in ſchemate noſtro, loco circuli hyperbola, quæ propoſitam curvam TCBPR itidem ſecundi gradus oſculo amplectatur, & eandem præterea ſecet alibi, poterunt utique duæ interſectiones proximæ, hinc inde exiſtentes, fluxu tranſverſi lateris ad punctum B adduci, oſculumque ſic duobus gradibus perfici; quippe quod, manente latere recto, interea non turbari potuit: atque tum inter hyperbolam & curvam alteram nulla amplius hyperbola interjici poterit. At hoc non impedit, quominus altera curvarum [quam magis compoſitam ſupponimus] ampliatione vel contractione ſui inter angulum oſculi RPQ ſe inſinuare, & ſectionem S ad punctum P vel B adducendo perfectiorem congreſſum efficere valeat. Oſculum duarum curvarum, quod fluxu ſolius ſimplicioris curvæ dividi amplius nequit, dicetur oſculum *completum*; quod fluxu neutrius ita dividi valet, ut alibi nova curvarum ſectio oriatur, *coitus* appellabitur. Curva curvam *complete* tum oſculatur, cum illam tanti gradus oſculo complectitur, quot ordinarie punctis *aliam ſui nominis* ſecare poteſt, quanquam inferior gradus ſufficere poſſit. Ita parabola aliam parabolam quatuor quidem punctis ſecare poteſt; at quia nunquam omnes hæ quatuor interſectiones coaleſcere poſſunt, fit ut ſi quam curvam ſecundo, nonnunquam etiam primo tantum gradu oſculatur, jam complete oſculetur: uti circulus quamcunque curvam oſculatur, complete oſculatur; uti recta quamcumque tangit, complete tangit; hyperbolæ vero vel ellipſis oſculum, niſi tertiæ, vel quartæ ſit perfectionis, completum non eſt. Quod ſi omnes interſectiones,

nes, quibus alias datæ curvæ ſe mutuo ſecare poſſunt, in unum punctum confluant, oritur *coitus*, qui eſt conſummatiſſimus earum congreſſus, quo quam maxime fieri poteſt, ſibi aſſimilantur vel uniuntur; quanquam in diverſis curvarum generibus unus alio perfectior eſſe poſſit; nec datur perfectiſſimus, niſi fortaſſe curvarum congruentiam perfectiſſimum coitum appellare velis. Num. XLVII.

Jam vero, relictis ſuperiorum graduum oſculis, ad conſiderationem Evolutarum deſcendamus, reaſſumpto, in eumdem finem, primi gradus oſculo. Hoc quia conſiſtit in concurſu trium interſectionum, pono nuperam æquationem pro his interſectionibus inventam habere tres radices æquales, eamque bis multiplico per progreſſionem arithmeticam, aut brevius ſemel per productum duarum, & quod reſultat, cum alia, aliiſve, per productum duarum progreſſionum ſimiliter quæſitis æquationibus varie confero, donec eliſa, non tantum littera u, ſed & ipſa z, æquationem inveniam, quam ſolæ x & y [ſed tamen ambæ neceſſario] ingrediantur. Ea enim ſuppeditabit lineam, in qua ſumptum quodvis punctum centrum eſſe poteſt circuli alicujus curvam propoſitam primo gradu oſculantis, cujuſque cum evoluta identitatem HUGENIUM notaſſe ex relatione Celeberrimi LEIBNITII conſtare ſupra diximus. Ipſa vero z, hoc eſt, radius circuli oſculatoris, ſeu longitudo fili evolventis, ex ſe indeterminata, per ipſam x vel y determinationem accipit. Exemplum Parabolæ reaſſumo; Tab. XVII. N°. 46. *Fig.* 5.

Lat. rect. Parab. $= a$	DB $= z$	erit AG $= uu : a$
AE $= x$	BG $= u$	EG $=$ [AE $-$ AG] $= x - uu : a$
ED $= y$		BG $+$ DE $= u + y$

$$EGq + (BG + DE)\,q = DBq$$

$$u^4 : aa - 2xu^2 : a + xx + uu + 2yu + yy = zz,$$

 hinc

Num. XLVII.

hinc

$$\begin{array}{rrrrrl} u^4 & * & -2axu^2 & +2aayu & +aaxx & =0 \\ & & +aau^2 & & +aayy & \\ & & & & -aazz & \\ \hline 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & \\ 4. & 3. & 2. & 1. & 0 & \\ \hline 0. & -3. & -4. & -3. & 0 & \\ & & +8axu & -6aay & & =0 \\ & & -4aau & & & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrl} u^4 & * & -2axu^2 & +2aayu & +aaxx & =0 \\ & & +aau^2 & & +aayy & \\ & & & & -aazz & \\ \hline 4. & 3. & 2. & 1 & 0 & \\ 3. & 2. & 1. & 0 & -1 & \\ \hline 12. & 6. & 2. & 0 & 0 & \\ \hline 12uu & * & -4ax & & & \\ & & +2aa & & & \end{array}$$

five $u = 3ay : (4x - 2a)$ | $uu = (2ax - aa) : 6$

five ponendo $t = x - \frac{1}{2}a$

$u = 3ay : 4t$, & $uu = 9aayy : 16tt = at : 3$

unde $27ayy = 16t^3$.

Ad inveniendum circulum, qui curvam propoſitam ſecundo gradu oſculetur, coincidentibus in puncto oſculi quatuor interſectionibus, pono æquationem habere quatuor radices æquales, eamque multiplico per productum trium progreſſionum arithmeticarum, quod aliquoties repeto; donec via conſtet, non tantum ipſas u & z, ſed alterutram quoque ipſarum x vel y ex æquatione eliminandi : ſic reliqua determinata erit, & per ipſam etiam cæteræ determinabuntur. Itaque non niſi definitus exiſtit circulorum numerus, qui curvam quampiam ſecundi gradus oſculo complecti poſſunt, ſecus ac illorum, qui eandem duntaxat primo gradu oſculantur. Centra vero horum circulorum non poſſunt alibi quam in ipſis evolutis exiſtere, quandoquidem quatuor radices æquales etiam tres, & oſculatio perfectior imperfectiorem continet: non hærent autem in mediis evolutarum partibus, quia circulus oſculator ſuper quovis evolutæ puncto intermedio deſcriptus, curvam neceſſario ſecat contra naturam oſculi ſecundi gradus. Sit N centrum, NB radius circuli oſculatoris, erit NB [= NM + MC] > recta NC: iterum ſit M centrum & MC radius, erit MC [= NB — NM] < recta MB; quare circulus oſculator verſus principium evolutionis jacet extra, verſus finem intra curvam, ideoque ſecat. Hærent ergo centra illa in extremitatibus

mitatibus evolutarum, earumque mutuis contactibus: unde quot locis curva oſculi ſecundæ perfectionis capax eſt [eſt vero, ubi curvedo ejus maxima eſt, vel minima] tot requiruntur ad illam evolutione deſcribendam aliæ curvæ, & una præterea. Ita ſemiparabola cubica AEG, [Tab. XVIII. N°. 47. *Fig.* 2.] (in qua videlicet abſciſſæ AB ſunt ut cubi ordinatarum BE) tametſi in eandem partem cava ſit, nec pars ejus ulla ſimilaris alteri, non poteſt unius ſolius curvæ evolutione tota deſcribi, ſed requiruntur duæ, quarum una DH, axi AC aſymptotos, inſervit deſcribendæ portioni EA, altera DI portioni EG, quæque communi extremitate ſua D centrum definiunt circuli, curvam in E ſecundo gradu oſculantis. Reperitur autem circulus hic oſculator (poſito latere recto Parabolæ 1) faciendo $AC = \frac{2}{9}\sqrt{\sqrt{45}}$; $CD = 2 : 5\sqrt{\sqrt{45}}$; $DE = \frac{3}{5}\sqrt{\sqrt{\frac{4}{5}}}$, ut fiat $BE = 1 : \sqrt{\sqrt{45}}$. (*) Num. XLVII.

Summatim dicta recolligo: *Contactus* ſimplex circuli & curvæ cujuſvis invenitur per *duas* radices æquales, & locus centri ejus

 eſt

(*) Si, juxta methodum Auctoris, dicatur AC, x; CD, y; ED, z; BE, u; & ideo AB, u^3; cum ſit $BC^2 + (BE - CD)^2 = DE^2$, habebitur æquatio
$$u^6 - 2xu^3 + xx + uu - 2yu + yy = zz,$$
ſeu
$$u^6 ** - 2xu^3 + uu - 2yu + yy \left.\begin{matrix} \\ +xx \\ -zz\end{matrix}\right. = 0$$
quam ſi multiplices 1°, per
90, 40, 12, 0, — 2, 0, 0
productum ex 3 progr. arith.
6. 5. 4. 3. 2. 1. 0
5. 4. 3. 2. 1 0 — 1
3. 2. 1 0. — 1. — 2. — 3
habebis $90u^6 - 2uu = 0$, ſeu $u^4 = \frac{1}{45}$ aut $u = 1 : \sqrt{\sqrt{45}} = BE$
At ſi dictam æquat. multiplices 2°. per
20, 60, 24, 6, 0, 0, 0,
productum ex 3. progr. arithm.
6, 5, 4, 3, 2, 1, 0
5, 4, 3, 2, 1, 0, — 1
4, 3, 2, 1, 0, — 1, — 2
habebis $120u^6 - 12xu^3 = 0$, vel $x = 10u^3 = 10u^4 : u = \frac{10}{45}\sqrt{\sqrt{45}} = \frac{2}{9}\sqrt{\sqrt{45}} = AC$.

Denique, ſi hanc multiplices per
72, 30, 8, 0, 0, 2, 0
productum ex 3. progr. arithm.
6, 5, 4, 3, 2, 1, 0
4, 3, 2, 1, 0, — 1, — 2
3, 2, 1, 0, — 1, — 2, — 3
habebis $72u^6 - 4yu = 0$, vel $y = 18u^5 = 18u^4 . u = \frac{18}{45} : \sqrt{\sqrt{45}} = 2 : 5\sqrt{\sqrt{45}} = CD$.

ED vero, ſeu z; cum ſit $zz = (x - u^3)^2 + (u - y)^2 = (\frac{1}{5}\sqrt{\sqrt{45}})^2 + (3 : 5\sqrt{\sqrt{45}})^2 = \frac{9}{25}\sqrt{\frac{4}{5}}$; erit $z = \frac{3}{5}\sqrt{\sqrt{\frac{4}{5}}}$.

Num. LXVII. eſt ad infinitas lineas condeſcriptas, hoc eſt, *ſuperficiem: Oſculum primi gradus* reperitur per *tres* radices æquales, & locus centri oſculantis circuli eſt ad *lineam* [ſcilicet *Evolutam*]. *Oſculum ſecundi gradus* indagatur per *quatuor* radices æquales, & locus centri oſculantis eſt ad *punctum*, vel *puncta* [Evolutarum ſcilicet extremitates].

Quæ cum ita ſe habeant, difficulter capio, quo ſenſu verum eſſe poſſit, quod dicitur, (b) *contactum inveniri per duas radices æquales, flexum contrarium per tres, & oſculum primi gradus per quatuor; ſeu duos contactus coincidentes*, &c. Vidimus enim, in oſculo primi gradus tres tantum interſectiones coincidere, non duos contactus, qui quatuor interſectionibus æquivalent: Poteſt quidem centrum oſculatoris circuli ſeu punctum Evolutæ D [Tab. XVII. N°. 46. *Fig.* 5.] conſiderari ut concurſus duarum curvæ perpendicularium minime diſtantium BD, CD; at tum reperitur, nec per tres, nec per quatuor, ſed per duas tantum radices æquales, ut ſupra ex *Fratris* ſchediaſmate liquet. Et quanquam ſi perpendiculares iſtæ habentur pro radiis circulorum centro D deſcriptorum, & per B & C tranſeuntium, eatenus concurſus harum perpendicularium ſpectari poteſt ut concurſus duorum contactuum, nullo modo tamen per quatuor radices æquales, ex noſtra æquatione elicietur; quoniam eo ſenſu quantitas z fit indeterminata, hoc eſt, ipſæ DB, DC, quæ deberent poni radii ejuſdem circuli, inæquales redduntur, illa hac perpetuo minore exiſtente, ſiquidem $BD + DN = BN = NM + MC < ND + DC$; adeoque $DB < DC$.

Quod flexum contrarium ſpectat, is revera per tres æquales radices invenitur, at non aliam ob cauſam, quam quod ejus inventio caſus tantum ſpecialis eſt generalis inventionis oſculationum primi gradus: in omni enim flexu contrario circulus oſculator

(b) A Leibnitio in *Meditatione* ſuperius laudata. Videatur Nus. LV.

lator abit in lineam rectam, & fit radii infinite magni; (e) quanquam non viciſſim, ubicunque circulus oſculator infinite magnus eſt, ibi requiritur flexus in contrarium. In Paraboloidibus omnibus [excepta Parabola communi] circulus oſculator verticis infinite magnus, veruntamen nonniſi in illis, quorum poteſtates a numero impari denominantur, flexus contrarius ſupervenit, cæteræ ubique verſus eaſdem partes curvæ manent. Num. XLVII.

(e) Exceptiones patitur hæc Propoſitio, de quibus videatur Num. LXXVI.

N°. XLVIII.

JACOBI BERNOULLI

Mathematum Profeſſoris Baſileenſis

CURVATURA VELI.

In literis ejus d. 9. Martii hujus Anni, Lipſiam perſcriptis communicata.

EX iis, quæ celeb. Dn. LEIBNITIUS * & ego †, ſuperiori anno, de Loxodromiis Nauticis in lucem emiſimus, colligi poteſt, quod ſi verus Navis curſus, ejuſque velocitas ſemper cognita eſſent, omnia data haberentur, ſupputarique ad quodvis momentum poſſet, ubi terrarum Navis verſetur; in quo conſiſtit *Act. Erud. Lipſ.1691. Mai.p.202*

* *Acta Erud. Lipſ.* 1691. April. pag. 181.
† Supra, N°. XLII.

Num. XLVIII.

tit ultima Hiſtiodromices perfectio, & deſideratiſſimum Longitudinum Problema. At illa duo cognoſci nequeunt, niſi prius cognoſcatur quantitas deviationis a plaga, in quam Navis dirigitur [Gallis, *la derive du Vaiſſeau*] quæ vero nec ipſa haberi poteſt, niſi priùs ſciatur, juxta quam directionem Velum a vento impellatur; ſed nec hæc determinari poteſt, niſi ipſa Veli Curvatura comperta habeatur, † adeo ut totius negotii certitudo tandem in cognitione *Figuræ Veli* terminetur; quæ quia huc uſque latuit, efficit, ut Nautæ nondum optatum in his finem aſſequi potuerint, & fallacibus plerumque conjecturis deludantur.

Huic inveſtigandæ cum me nuper applicuiſſem pertinacius, tandem, poſt aliquot conamina, voti compos factus fui, comperique [ne curioſum Lectorem diu morer,] Problema ſubtiliſſimum in ipſam *Funiculariam* deſinere; adeo fuit in fatis, ut quæ figura conveniunt, in diverſis linguæ noſtræ Dialectis nomine quoque convenirent, idemque vocabulum *Seyl* & Germanis *Funem*, & Belgis *Velum* ſignificare debuerit. Præſtitit hic etiam *Frater* aliquid, poſtquam ejus Methodum (ſignificarat enim per litteras ſe calculum *Leibnitianum* plurimum perfeciſſe,) Problemate ad puram Geometriam reducto, velut ſpecimine tentaturus, curvaturam Veli ſub iſta proprietate deliteſcentem ei communicaſſem: [*Sumptis æqualibus Curvæ portiunculis, Cubi ex primis differentiis ordinatarum ſunt proportionales ſecundis differentiis abſciſſarum*] ſuppreſſo quo huc perveneram artificio; namque & ipſe ex proprietate hac Funiculariam feliciter elicuit.

Veruntamen etiamſi conſtet, Velum vento inflatum funis curvedinem inducere, hoc nondum ſufficit, ad determinandum [quod palmarium eſt] juxta quam directionem, quaque vi a vento impellatur, niſi quoque conſtet, quibus ſuppoſitionibus uſus fuerim, ut Problema a concreta Geometria ad puram reducerem, curvamque ſub caracteriſtica hac proprietate exhiberem. Notum eſt, quod in theoria Artis Nauticæ, Velum conſiderari vulgo ſoleat inſtar Figuræ planæ, quæ a vento juxta directionem ſibi perpendicularem impellatur: unde cum talis non ſit, quid mirum,

† Imo, Vide Notam (*p.*)]

mirum, ſi ex ficta hypotheſi plerumque erroneæ, quandoque etiam cum inæſtimabili hominum merciumque damno conjunctæ, concluſiones deducantur? Agnoſcit hac in parte imperfectionem Artis Anonymus Gallus * ſub finem libelli egregii, quem *de la Théorie de la Manœuvre des Vaiſſeaux* inſcriptum, ante paucos annos, juſſu Regio edidit, monetque Velum in ſuis partibus, ob curvaturam ſuam, ſecundum varias directiones impelli, adeoque inter omnes directiones mediam quandam aſſumendam eſſe; at quænam illa ſit, uti determinare non audet, ſic per meras conjecturas æſtimat, quod ego ſcientifice & accurate conſequi docebo, & quidem ita, ut vel ſtupidiſſimus Nauta meas regulas deinceps in uſum transferre poſſit, quas ſequentibus Poſitionibus comprehendam. (*) Num. XLVIII.

* Dnus *Bern.* RENAUD, cujus Vitam vide in *Hiſt. Acad. Reg. Scient. Pariſ.* ad *Annum* 1719. Excuſus eſt liber *Pariſ.* An. 1689. *in* 8. *cum fig.* Vid. *Acta Erud.* Lipſ. 1690. p. 388.

[*] Data eſt N°. XXXIX, æquatio generalis exprimens naturam Curvarum in quas flectitur filum ab innumeris potentiis ſingula ejus puncta urgentibus incurvatum. Quæ, ut ad filum ab incumbente fluido, vel adlabente inflexum applicetur, ſtatuenda eſt, in eadem Fig. N. XXXIX. (TAB. XVIII. 6 No. 36.) potentia BK perpendicularis ad Bb, quia preſſiones fluidorum exeruntur per lineas ad ſuperficiem preſſam perpendiculares. Ideoque Triangula KBL & KBM erunt ſimilia Tr. BbE, & ſinus s anguli KBM $=$ ſinui $dy:dz$ anguli bBE, atque ſinus $\sqrt{(1-ss)}$ anguli KBL $=$ ſinui $dx:dz$ anguli BbE. Quibus in æquatione generali $adx = dy\int psdz$ $+ dx\int pdz\sqrt{(1-ss)}$ ſubſtitutis, ea reducitur ad $adx - dx\int pdx = dy\int pdy$. Hæc ſimplicior evadit, dividendo per dx, $a - \int pdx = \frac{dy}{dx}\int pdy$; differentiando, $-pdx = \frac{pdy^2}{dx} + \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}\int pdy$; ſcribendo $-dxddx:dy$ pro ddy [quia poſita dz conſtante, diff. æquationis $dz^2 = dx^2 + dy^2$ eſt $0 = dxddx + dyddy$] $(pdx^2 + pdy^2):dx = [dx^2ddx + dy^2ddx]\int pdy : dx^2dy$; dividendo per $[dy^2 + dy^2]:dx^2$; $pdx = \frac{ddx}{dy}\int pdy$, vel $pdy:\int pdy = ddx:dx$. Igitur $pdy = ddx$, aut, [multiplicando homogeneitatis gratia, per $b:dz$] $pdy = bddx:dz$, vel $pdydz = bddx$.

Jam, tenſio fili in B, quæ N°. XXXIX generaliter inventa eſt

I. Si

Num. XLVIII. 1. Si ſubtenſa veli EBF, [*Fig.* 1.] hoc eſt, per extremitates veli ducta recta E F lineæ directionis venti AB perpendicularis eſt, arcuatur velum in *Circuli ſegmentum*, cujus baſis EF, axis AB directioni venti parallelus. (b)

2. Vis qua velum juxta axem AB impellitur, componitur ex celeritate venti, & ſubtenſa veli. (c)

3. Hinc, ab eodem vento, eadem vi impelluntur vela EBF, ELF, quorum ſubtenſa eadem.

4. Et idem velum EBF majore vi impellitur, ubi diductis extremitatibus E & F in arcum majoris circuli tranſierit.

5. Celeritas navium eodem ſecundo vento velitantium, cæteris paribus, ſunt ut velorum ſubtenſæ.

6. Potentia ſuſtinens venti impetum, ſeu firmitas veli requiſita, ne rumpatur, in omnibus ejus punctis eadem eſt, & componitur ex celeritate venti & radio circuli. (d)

7. Hinc potentia impellens ad potentiam ſuſtinentem, ſeu agens ad patientem eſt, ut ſubtenſa veli ad radium.

8. Ve-

$\frac{dz}{dx}\int psdz$, hic erit [propter $s = dy : dz$] $\frac{dz}{dx}\int pdy = \frac{dz}{dx} \times \frac{bdx}{dz} = b$. Eſt igitur ubique conſtans & uniformis. Sed in A ponebatur $= a$. Ergo $b = a$, & æquatio $pdydz = bddx$ evadit $pdydz = addx$.

Directio autem media biſecat angulum ATB, quia potentiæ per TA, TB trahentes, quæ ſunt tenſiones fili in A & B, ſunt æquales.

[b] In 9 prioribus §§. Auctor aſſumit hypotheſin, quam tamen ipſe poſtea [N°. LXVI.] repudiavit, ſcil. preſſionem aeris, qui poſt appulſum ad velum effluere nequit, undique æqualem eſſe: hoc eſt, aſſumit p, quæ celeritatem venti hic denotare poteſt, eſſe quantitatem conſtantem. Ergo $pdydz = addx$, integrando fiet $pydz = adx$ vel $ydz = adx : p$ & [quadrando, & pro dz^2 ſcribendo $dx^2 + dy^2$] $yydx^2 + yydy^2 = aadx^2 : p^2$, unde eſt $dx = ydy : \sqrt{(aa : pp - yy)}$, quæ integrata dat $a : p - x = \sqrt{(aa : pp - yy)}$; æquatio ad circulum cujus radius eſt $a : p$.

[c] Vis, qua velum juxta axem impellitur, æqualis eſt ſummæ preſſionum verticalium $= \int pdy = py$. Componitur itaque ex [p] celeritate venti, & [y] ſubtenſa (dimidia) veli. Hinc fluunt art. 3. 4. & 5.

[d] Firmitas, aut tenſio, fili inventa eſt $= a = p \times a : p$. Componitur itaque ex [p] celeritate venti, & [$a : p$] radio circuli. Hinc. art. 7. 8. & 9.

8. Velum EBF minorem requirit firmitatem velo ELF, cujus major radius. Num. XLVIII.

9. Idemque velum EBF minus ſubit rupturæ periculum, ſi adductis ſuis extremitatibus curvetur in arcum minoris circuli.

10. Porro ſi velum EGB [*Fig.* 2.] ſuper extremitatibus ſuis E & B ita ſit expanſum, ut per extremitatem B directioni venti AB ducta perpendicularis recta BD tangat velum in B; curvatur velum in *Funiculariam*, cujus vertex B, axis AB (e)

11. Ut longitudo veli EGB ad axem BA; ita ſinus totus BC, ad rectam CH tangentem anguli CBH, quem faciunt duæ lineæ directionis, una venti, altera ſecundum quam a vento velum impellitur. (f)

12. Hinc

(e) Nunc aſſumit Auctor aliam hypotheſin, ſingulas nempe fili particulas Bb impelli venula, ſeu rivulo, ut ita dicam, aereo, cujus celeritas v, latitudo bE [dy]. Sumatur itaque $Be = vdy$, & ex preſſione obliqua derivetur perpendicularis $BK = vdy^2 : dz$ [Nam Bb [dz] : bE [dy] = Be [vdy] : BK]. Sed BK, in æquatione generali, vocabatur pdz, hic igitur $p = vdy^2 : dz^2$. Unde æqu. $pdydz = addx$, reducitur ad $dy^3 : dz = addx : v$; Quæ, multiplicata per $dx : dy^3$ poterit integrari. Evadit enim $dx : dz = adxddx : vdy^3 = adxddx : v\sqrt{(dz^2 - dx^2)^3}$, cujus integralis eſt $x : dz + a : vdz$ [conſtans addita, ut x & z ſimul evaneſcant] $= a : v\sqrt{(dz^2 - dx^2)} = a : vdy$. Ergo $(x + a : v)\, dy = (a : v)\, dz$, aut [quadrando, & pro dz^2 ſcribendo $dy^2 + dx^2$] $(xx + 2ax : v + aa : vv)\, dy^2 = (aa : vv)\, dy^2 + (aa : vv)\, dx^2$; unde $dy = adx : v\sqrt{(2ax : v + xx)}$ quæ eſt æquatio ad Funiculariam vulgarem, cujus Parameter $= a : v$. Vid. Not. ad N. XXXIX.

Quoniam autem $dz = (x + a : v)\, dy : (a : v) = (x + a : v)\, dx : \sqrt{(2ax : v + xx)}$, erit, integrando, $z = \sqrt{(2ax : v + xx)}$ & $2ax : v = zz - xx$; atque $dz : dy : dx = (x + a : v) : (a : v) : z$; id quod annotaſſe, utile erit in ſequentibus.

(f) Media directio TZ biſecat angulum ATB. Huic ſi parallela ducatur BN, erit Iſoſceles Triangulum BbN. Nam ang. bBN = BTz = ATz = FBN = bNB. Igitur $bN = bB = dz$, & $EN = bN - bE = dz - dy$. Ergo BE [dx] : EN [$dz - dy$] $= z : x + \frac{a}{v} - \frac{a}{v} = z$[AB] : x [AF] hoc eſt, longitudo veli AB, ad axem AF, ut BE ad EN, vel, ut ſinus totus ad tangentem anguli EBN quem faciunt directiones EB venti, & NB veli; hoc eſt, in fig. Auctoris, ut BC ad CH.

Digitized by Google

Num. XLVIII. 12. Hinc angulus directionis venti & impulſionis veli perpetuo ſemirecto minor.

13. Si recta BC ſit Parameter & punctum C centrum funiculariæ, ſumaturque portio veli BG = CH & per G ducatur recta FG parallela ipſi BH, erit hæc & curvæ perpendicularis, & ſimul linea directionis veli, & axis æquilibri impulſionum. [g]

14. Eadem reperitur aliter, ſi velum ita ſecetur in G, ut ſegmentum EG ſe habeat ad ſegmentum BG, ſicut aggregatum quadratorum EGB & AB ad differentiam eorundem. [h]

15. Producta recta FG tranſit per mutuum occurſum rectarum BD, ED, extremitates veli B & E tangentium: hinc conſtat, quomodo ex concurſu rectarum tangentium ED, BD ducenda ſit perpendicularis ad funiculariam DF, quæ alias ſine reſpectu ad velum habito difficulter inveniretur. [i]

16. Vis, qua velum ſecundum directionem ſuam FG, impellitur, componitur ex celeritate venti & differentia quadratorum EGB & AB applicata ad radicem aggregati eorundem. [k]

17. Hinc

(g) Hactenus recte. Sed cum arbitraretur Auctor mediam directionem eſſe perpendicularem ad Curvam, quæſivit punctum G in quo normalis ad curvam eſſet ipſi BH parallela, ſeu, in quo dy eſſet ad dx ut BC ad CH. Sed eſt ubique dy ad dx ut [$a : v$] Parameter BC ad arcum [z] BG. Ergo BC : CH = BC : BG. Igitur CH = BG. Unde quidem ſequitur GF eſſe perpendicularem ad Curvam, & mediæ directioni parallelam. Sed non eſt ipſa media directio, quæ ad curvam obliqua N°. LXVI oſtendetur. Errorem ſuum Auctor agnovit, & correxit, N. LVIII & LXVI, quos vide.

(h) Quoniam BE [z] : BA [x] = BC [$a : v$] : BG = $ax : vz$, erit EG [$z - ax : vz = (zz - ax : v) : z$]: BG [$(ax : v) : z$) = $zz - \frac{ax}{v} : \frac{ax}{v} = 2zz - \frac{2ax}{v} : \frac{2ax}{v}$ [ſcribendo $zz - xx$ pro $2ax : v$] = $zz + xx : zz - xx$.

(i) Hic error ab Auctore agnitus & correctus N°. LXVI.

(k) Potentia TZ, ſeu vis, qua velum impellitur ſecundum directionem mediam, & tenſio veli in B ſunt inter ſe, ut latera parallela BN, Bb, Trianguli BbN. Sed BN = [13. II. Elem.] = $\sqrt{(Bb^2 + bN^2 - 2bN \times bE)} = \sqrt{(2dz^2 - 2dzdy)} = \sqrt{(2dz\,(dz - dy))}$. Ergo Potentia TZ ad Tenſionem [a] in B = $\sqrt{(2dz\,(dz - dy))} : dz = \sqrt{2\,(dz - dy)} : \sqrt{dz} = \sqrt{2x} : \sqrt{(x + a : v)} = \sqrt{4xx} : \sqrt{(2xx + 2ax : v)} = 2x : \sqrt{(xx +}$

17. Hinc idem velum fortius impellitur, quo magis diminuitur ejus axis, quod obtinetur adducendo propius extremitatem veli E ad tangentem BD. Num. XLVIII.

18. Robur veli, ſeu firmitas requiſita, ne dilaceretur, ubique eadem & componitur ex celeritate venti & parametro BC [ſive differentia quadratorum EGB & AB applicata ad duplum axis BA.] Nota hic diſcrimen inter velum funemque, qui in ſummis quam imis partibus majore firmitate opus habet. (l)

19. Hinc vis impellens ad vim ſuſtinentem, ut duplum axis BA ad radicem aggregati quadratorum EGB & AB. (m)

20. Conſtat etiam ex ſecunda & decima ſexta inter ſe collatis, quod ſi ſemel de velocitate navis, quæ velum juxta hypotheſin primæ expanſum habet, experientia conſtiterit, eadem quoque in hypotheſi decimæ cæteris paribus ſupputari poſſit.

21. Quod ſi Veli extremitates ſint in punctis E & G, & per G ducta recta GI directioni venti GL perpendicularis, cum velo expanſo angulum faciat, nec illud ſecet, curvatur velum in *portionem Funicularia*. (n)

22. Si portio hæc continuetur ad verticem uſque B, ponanturque axes æquilibrii impulſionum totius curvæ EB & portionis GB per 13, 14, iique proportionentur reſpectivis viribus impulſionum, erit prior axis diagonalis, alter latus alicujus parallelogrammi, cujus latus alterum eſt axis æquilibrii portionis EG, & ſimul virium quibus impellitur proportionem exhibet. (o)

23. Ad æſtimandam ergo directionem veli & impulſus vim; poſtu-

$\surd(xx+zz)$ [ſcribendo nempe $zz-xx$ pro $2ax:v$]. Ergo Potentia $TZ = 2ax:\surd(xx+zz) =$ [quia $2ax = v(zz-xx)$] $= v(zz-xx):\surd(xx+zz)$; compoſita ex celeritate venti, & differentia quadratorum veli & axis, applicata ad radicem aggregati eorundem.

(l) Firmitas vel Tenſio veli, ubique eadem [$a = v \times a:v$] componitur ex celeritate v, & parametro $a:v = (zz-xx):2x$.

(m) Vis impellens [$v(zz-xx):\surd(zz+xx)$] eſt ad vim ſuſtinentem [$a = v(zz-xx):2x$] ut $2x$ ad $\surd(zz+xx)$.

(n) Sequitur ex Art. 10.

(o) Ex notiſſimo Theoremate; de compoſitione virium ſequitur ultro.

Num. XLVIII. poſtulatur, ut datis punctis E, G, longitudine portionis EG, & poſitione rectæ GL axi parallelæ, duci poſſit funicularia ejuſque vertex aſſignari; quod Nauclerus hac praxi mechanica conſequetur facile; Punctis E, G, & recta GL in plano ſimiliter poſitis, ductaque EM, ad G, L, perpendiculari, erigatur planum, & in illo recta GL ad perpendiculum, firmataque catenulæ extremitate in puncto E, ejus annulo inſeratur ſtylus & promoveatur ſuper recta EM, quo uſque catena tranſeat per punctum G, & ſimul intercepta ejus pars portioni datæ EG adæquetur; nam ſi ſecus eveniat, alii annulo inſerendus ſtylus, donec æqualis fiat; tum notetur ſtyli locus M, & biſecta recta EM, dimittatur perpendiculum AB ſecans catenulam, quæ poſitionem veli referet, in optato vertice B. (p)

24. Si veli denique extremitates ſint E, B, [*figura* 3.] & ex B ducta recta BG, directioni venti perpendicularis, ſecet velum in G, curvatur ejus portio GB in *circulum*, altera EG in *funiculariam* quæ continuata per GC habeat parametrum CD æqualem circuli radio GA. Intelligitur curva tota uno motu continuo deſcribi, ſi concipiatur evolutæ funiculariæ IFH filum circumplicari GFH ope plumbi filo annexi, & ex E demiſſi, illudque poſtquam convolutum fuerit circa partem curvæ HF, offendere in deſcenſu ſuo clavum A, poſitum in centro futuri circuli. Requiritur autem ad conſtructionem curvæ, ut datis punctis E, B, longitudine ejus EGB, & poſitione recta BG, dari poſſint ſegmenta curvæ. Mechanice Nauclerus, poſtquam velum vento inflatum fuerit, rem facile expediet: ducta enim poſitione data BG, dantur arcus & ſubtenſa GB, & hinc radius circuli AG, ipſumque punctum G; & quia datum quoque punctum E, & curva EG longitudine, dabitur eadem etiam poſitione, per præcedentem. Unde & dabuntur axes æquilibrii, vireſque impulſio.

(p) Facilius multo; Ducantur veli tangentes in E & G, quod mechanice efficere, ope funiculorum tenſorum, nihil habet difficultatis; & angulus, quem comprehendunt tangentes, biſecetur. Linea biſecans mediam directionem exhibet.

Digitized by Google

pulſionum tum funiculariæ EG, tum circuli GB, ac proinde æquilibrii veli totius EGB, ſeu parallelogrammi diagonius, vireſque quibus juxta hunc impellitur, per 2. & 22. (q) Num. XLVIII.

25. Nota, ſupponi, quod fluidum, poſt adlapſum ad portionem veli EG, libere poſſit motum ſuum proſequi: At hypotheſis hæc in rigore ſumpta, ut opinor, vera non eſt. Videtur enim torrens fluidi a ſtagnante ejus portione in ſegmento GB ita ſufflaminari debere, ut ſupra chordam GB ad partes G exundet, ibique certum formet ſpatium BGL, intra quod omnis aer vel ſtagnare prorſus vel labi ſaltem ſegnius cogatur, & ſic plus motus ſui in veli portionem EG transferre neceſſum habeat, quam alias faceret, ſi non impedito curſu poſſet pergere: unde conſequitur velum quidem in parte GB circuli, in parte LE funiculariæ curvaturam induere, at in parte GL mediæ inter utramque naturæ eſſe, & quæ ab exuberantis fluidi figura ejuſque in velum agendi ratione dependeat. Hanc vero uti conjecturis, quæ in promptu mihi ſunt, definire nolo, ita eorum ſagacitati quorum pluris intereſt rem nauticam perficere, indagandam relinquo. Ego interea pro homine mediterraneo ad negotium maritimum, quo non eſt aliud e quo rebus humanis major accedit utilitas, plus ſatis contuliſſe mihi videor.

Quia in eo huc uſque fui, in Funiculariæ uſum in re nautica oſtenderem, lubet hic quoque aliam ejus proprietatem non inelegantem, quæ in Staticis aliquando uſui futura eſt, quamque *Fratris* induſtriæ debemus, aperire: Sit recta horizontalis AD [*Fig.* 4.] Vectis nullius gravitatis & ſimul axis funiculariæ CE, punctum B vectis hypomochlium & curvæ centrum, ſitque AB = BC, & in A appenſum pondus F, atque aliud huic æquale G ubivis in curva conſtitutum, cujuſvis deſcenſus impediatur per filum DHG, quod trochleam H complectens perpendiculariter

(q) Imo tota curva BGE funiculariæ portio eſt, agnoſcente Auctore [N°. LXVI.] Media autem directio ſemper invenitur per biſectionem anguli, quem comprehendunt Tangentes extremæ.

Num. XLVIII. cularīter ex vecte dependeat; erunt ſic conſtituta pondera æqualia F & G in æquilibrio. (s)

Proxime *Elateris curvaturam* dabo. (t) Deprehendo hic vero [quod in anteceſſum monere lubet] rem ſatis memorabilem. Ut enim linteum vento tumidum *Funicularia*, ſic idem ab incumbentis liquoris pondere expanſum *flexi Elateris* curvaturam induit.

(s) Sit AB $=$ BC $= a:v$, Funiculariæ parameter, pondus F, vel G $= 1$, eritque momentum ponderis F $= 1 \times a:v = a:v$; momentum vero ponderis G $=$ BD $\times$ tenſion. funis DH. Sed BD $= x + a:v$; Tenſio vero funis DH ad pondus G, ut altitudo plani inclinati juxta quod G deſcendere nititur, ad ejus longitudinem, hoc eſt, ut dy ad dz, vel ut $a:v$ ad $x + a:v$. Igitur, cum pondus G ſit $= 1$, erit funis DH tenſio $= \frac{a:v}{x+a:v}$. Ergo BD$\times$ tenſ. funis DH, ſeu momentum ponderis G $=$ $(x+a:v) \times \frac{a:v}{x+a:v} = a:v =$ momento ponderis F. Erunt igitur pondera F & G in æquilibrio.

(t) Vide Num. LVIII.

N°. XLIX.

No. XLIX.

LINEÆ CYCLOIDALES,

EVOLUTÆ, ANT-EVOLUTÆ, CAUSTICÆ, ANTI-CAUSTICÆ, PERI-CAUSTICÆ.

Earum uſus & ſimplex relatio ad ſe invicem. Spira mirabilis. Aliaque.

Per JAC. BERNOULLI.

Cycloïs *mechanica* [quæ ex revolutione circuli ſuper linea recta oritur] jam toto hoc ſeculo pervulgata extitit. *Geometrica*, quæ ex circuli ſuper circulo rotatione naſcitur, Clariſſimis Viris TSCHIRNHAUSIO †, & NEWTONO *, primum conſiderari cœpit. Evolutarum notitiam Illuſtri HUGENIO debemus. Cauſticæ præfatum itidem Nobiliſſ. TSCHIRNHAUSIUM ** Auctorem agnoſcunt. Cycloidales in genere ſpectatæ, cæteræque initio memoratæ curvæ, neglectæ fere hactenus; ſed nec extitit, qui Evolutarum & Cauſticarum cæterarumque ab his dependentium relationem mutuam exhiberet. Hanc ego paucis abhinc diebus, cum in contemplatione inventi *Tſchirnhau-* *Acta Erud. Lipſ. 1692. Mai. p. 207.*

† *Acta Erudit.* 1690. April. pag. 169.
* *Phil. Nat. Princ. Math.* Lib. I. Sect. X. Prop. 48. 49.
** *Acta Erudit.* 1682. Nov. pag. 364.

N. XLIX. *ſiani* paulo attentius verſarer, reperi, ac ob rei præſtantiam & utilitatem publico ocius impertiendam duxi, præmiſſis, quatenus neceſſariæ videbuntur, terminorum fere novorum definitionibus.

Si curva quævis ſuper alia ſibi æquali & ſimili, hoc eſt, eadem ſuper ſe ipſa inverſe poſita, puta *d* H *m* ſuper D H M [*Fig.* 1.] rotetur, ita ut perpetuo in punctis ſimiliter poſitis ſeſe contingant, deſcribet punctum *a*, in plano genitricis curvæ *d* H *m* ubivis acceptum & ab illo una abreptum, curvam F *a*, quam ob affinitatem cum Cycloide *Cycloidalem* nuncupo. Ipſam D H M, ſuper qua rotatio peragitur, voco *Expoſitam.* Curvam B L, ex cujus evolutione Expoſita DHM ope fili LBH deſcribitur, appello *Evolutam*, Rectam BH *Radium*, punctum B *Centrum circuli* expoſitam in H *oſculantis.* Porro curvam CI, quam radiorum AH, ex puncto quovis A emanantium, reflexi HI ſuis interſectionibus formant, voco *Cauſticam ex puncto* A. Et ſi reflexus IH, producatur ultra expoſitam in *a*, ut ſit H*a* æqualis HA, crit, quam punctum *a* formabit, curva F *a*, *Anti-Cauſtica.* Sin radius incidens A H producatur in *i* ut ſit H *i* æqualis radio reflexo H I, crit punctum *i* ad Curvam E *i* dictam *Peri-Cauſticam.* Denique, ſi radius circuli oſculatoris BH producatur in *b*, donec H *b* fiat æqualis ipſi HB, formabit punctum *b* *Ant-Evolutam* Curvam G *b*. Reperi autem, cum recordarer D. LEIBNITIUM affinia quædam antehac de *Lineis opticis* in *Actis* * publicaſſe, *Cauſticas* & *Anti-Cauſticas* noſtras quodammodo eaſdem eſſe, quas Vir Celeberrimus ἀκάμπτους ϗ ἀκλάστους nuncupat. Officium tribus lineis *Anti-Cauſtica*, *Peri Cauſtica* & *Ant-Evoluta* [ne omni uſu deſtitutæ videantur] hoc tribuo, ut prima determinet locum imaginis puncti radiantis A ex Cauſtica C I per reflexionem conſpectæ; altera ſit ipſa totius Cauſticæ in ſpeculum DHM projectæ, & ab oculo in A exceptæ imago; tertia denique locum imaginis oculi ſemet ipſum ex Evoluta intuentis indicet. Præterea obſervatu dignum, *Anti-Cauſticam* ex evolutione Cauſticæ deſcribi, & inſuper eandem eſſe cum Cycloidali, quotieſcunque punctum lineans *a* reſpectu genitricis curvæ *d* H *m* ſimiliter poſitum eſt, ac punctum

* A°. 1689. Janv. pag. 36. *ſq.*

punctum radians A reſpectu expoſitæ DHM ([a]): proinde Cauſticam ACI $=$ *a* HI $=$ *a* H $+$ HI $=$ AH $+$ HI, hoc eſt, aggregato radii incidentis & reflexi, vel ſaltem eodem majorem minoremve conſtante longitudine. N. XLIX.

Palmarium autem, quod oſtendere ſuſcepi, relationem concernit, eamque longe ſimpliciſſimam, inter *Cauſticas* & *Evolutas*, quam ſic determino: *Si in puncto radiante A, erigatur radio incidenti AH perpendicularis AN, ſecans radium circuli oſculatoris HB [productum ſi opus ſit] in N, ſiatque ut 2 HN — HB ad HB, ſic AH ad HI abſcindendam ex radio reflexo HI, erit punctum I in Cauſtica ex A* ([b]); adeoque ſi 2 HN $=$ HB, fiet

HI

([a]) Sit F*a* Cycloidalis genita ex rotatione curvæ *d* H *m* ſuper DHM & H*a* ducta ex puncto contactus H ad punctum lineans *a* erit ad deſcriptam F*a* perpendicularis. Sed ſi ſumatur punctum radians A, ſimiliter poſitum reſpectu genitricis *d* H *a* ac punctum lineans *a* reſpectu expoſitæ DHM, non modo ſemper erit AH $=$ *a* H, ſed inſuper *a*H producta deſignabit radium reflexum HI emanantis AH. Nam, propter ſimilem ſitum rectarum HA, H*a*, eſt ang. AHR $=$ ang. *a*HR $=$ ang. oppoſ. *r*HI. Ergo radii AH reflexus eſt HI. Igitur recta *a* HI, perpendicularis ad Cycloidalem, perpetuo tangit cauſticam CI. Cycloidalis igitur quæ [propter HA $=$ H*a*] eadem eſt cum Anti-Cauſtica, ex evolutione Cauſticæ deſcribitur.

([b]) Sint H, *b* [*Fig.* 3.] expoſitæ puncta viciniſſima; HB, *b*B radii circuli oſculatoris ad curvam H*b* normales; AH, A*b* radii incidentes; HI, *b*I reflexi. Summa angulor. AHB, & HA*b* æqualis eſt ang. ASB, qui pariter æqualis eſt ſummæ ang. A*b*B, *b*BH. Ergo ſumma ang. AHB, HA*b* æqualis ſummæ ang. A*b*B, *b*BH; atque ideo differentia angul. AHB, A*b*B, æqualis differentiæ ang. A & B. Paritur ang. BTI æqualis ſummæ tam angulor. BHI, HB*b*, quam angulor. B*b*I, HI*b*. Igitur hæ ſummæ ſunt æquales, atque ideo differentiæ angul. BHI, B*b*I, æqualis differentiæ ang. B & I. Jam autem, ex lege reflexionis, æquales ſunt ang. AHB, A*b*B, angulis BHI, B*b*I, & horum differentia æqualis illorum differentiæ. Quare etiam differentia ang. A & B æqualis eſt differentiæ angulorum B & I. Eſt igitur ang. B medius arithmeticus inter ang. A & I, & anguli B duplum æquale ſummæ angul. A & I. Angulor. autem A, I, B menſuræ, ſunt arcus HQ, HO, H*b* [centris A, I, B, per H deſcripti,] diviſi per ſuos reſpective radios HA,

N. XLIX. HI infinita; hoc eſt radii reflexi contigui erunt paralleli: ſi 2 HN < HB, radii reflexi fient divergentes: ſi 2 HN > HB, fient convergentes: ſi HN = HB, [ut in præſenti ſchemate] erit HI = AH; denique ſi HN vel AH infinita, hoc eſt, ſi punctum A radiet ex infinita diſtantia, fiet congreſſus radiorum in puncto medio radii reflexi HI, abſciſſi a perpendiculari BI (c). Valet etiam regreſſus a data Cauſtica ad punctum radians, vel ab utroque dato ad Evolutæ puncta invenienda. At quanti uſus ſit hoc Theorema, præſertim in catoptricis, & quam fœcundum in deducendis corollariis, quamque elegantes & expeditæ praxes inde fluant, periti harum rerum judicent. Ego unum tantum alterumve, in exemplum adducam.

1. Si punctum radians A reperiatur in peripheria circuli HcP, ſuper ſemi-radio circuli oſculatoris HP, ceu diametro deſcripti, radii reflexi contigui erunt paralleli; ſi illud extra peripheriam conſtitutum ſit, erunt hi convergentes; ſi intra, divergentes (d)

2. Si

HA, HI, HB. Sed [propter HbO = IbV = HbQ, angulos rectos O, Q, & communem hypothenuſam Hb] æqualia ſunt Triangula HOb, HQb, adeoque HO æquale HQ. Et Triangula bHQ, HAN, præter rectos Q, A, habentia angulos æquales bHQ, AHN [uterque enim cum ang. QHS rectum efficit] ſunt ſimilia, adeoque dant HA : HN = HQ : Hb, unde $Hb = \frac{HN}{HA} HQ$. Menſuræ igitur angulorum A, I, B, ſunt HQ, HQ, $\frac{HN}{HA}$HQ vel HA, HA, HN, diviſi per radios HA, HI, HB. Quamobrem cum ſit A + I = 2B vel I = 2B − A, erit $\frac{HA}{HI} = \frac{2HN}{HB} - \frac{HA}{HA}$, vel, [multiplicando per H B. H I] H A. H B = 2 H N. H I − H B. HI, quæ æquatio in Analogiam reſoluta dat, ut 2HN − HB ad HB, ſic HA ad HI.

(c) Nam, ubi HN & AH ſunt infinite majores quam NB, Analogia 2HN − NB : HB = AH : HI, reducitur ad 2 HN : HB = AH : H I, vel H N : AH = HB : 2HI. Unde &c.

(d) Nam ſi A ſit in peripheria circuli HcP, H N eſt = H P, & 2HN = 2HP = HB. Si A ſit extra peripheriam HcP, HN eſt > HP, & 2HN > HB. Si A ſit intra HN < HP, & 2HN < HB.

2. Si radii reflexi contigui ſunt paralleli, habebit Anti-Cauſtica in parte oppoſita flexum contrarium; ſi illi convergant, erit hæc concava; ſin divergant, convexa verſus partes expoſitæ DHM. N. XLIX.

3. Si expoſita curva DHM eſt geometrica, ejus Evoluta, Cauſtica, Cycloidalis, cæteræque omnes tales erunt. De Evoluta conſtat ex demonſtratione HUGENII in *Horologio oſcillatorio*, & nupero meo ſchediaſmate de angulo oſculi. * De cæteris liquet ex relatione, quam tum inter ſe, tum ad Evolutam habent. Speciatim quod Cycloidalem ex circuli ſuper circulo rotatione ortam attinet; ejus puncta geometrice inveniri poſſunt, non tantum cum ambo circuli æquales, ſed & ſubinde cum inæquales fuerint [modo determinatam rationem habeant]; nonnunquam per geometriam communem [ut puncta Cycloidis *Tſchirnhauſianæ*] aliquando per conicas ſectiones, aliquando per altioris generis curvam, &c. At indefinite conceptum Problema ſupponit ſectionem anguli in data ratione. Nam poſito, rotationem in D incepiſſe, ſi ducantur ſubtenſa DH & communis circulorum tangens HR, fiatque angulus RH*d*, qui ſit ad angulum RHD reciproce, ut radius expoſiti ad radium genitoris, ſecabit recta H*d* genitorem circulum in *d*, quod vel ipſum erit punctum lineans, vel ſaltem ad punctum lineans *a* poſitionem datam habebit. (e)

4. Quia Evoluta tota Circuli in unum punctum abit, quod eſt ejus centrum, hinc Cauſtica *Tſchirnhauſiana* dicto citius determinatur (f): ſed nec minus facile inveniuntur puncta alterius cujuſvis Cauſticæ, ex puncto diſtantiæ finitæ.

 5. Ejus

* Supra N°. XLVII. p. 473.

(e) Ex geneſi Cycloidalium circularium arcus DH arcui *d*H longitudine eſt æqualis. Ergo arcus DH menſura per angulos, ad ſimilem menſuram arcus *d*H, reciproce, ut radius circuli expoſiti ad radium genitoris, & in eadem ratione eſt angulus DHR ad *d*HR angulum.

(f) Demiſſa ſcil. in radium reflexum perpendiculari, ex medio ſemidiametri ad punctum reflexionis ducti, per Not. (c). Eſt igitur radii reflexi pars inter circulum expoſitum & Cauſticam intercepta, dimidium partis radii incidentis, quæ inter expoſitam ſemipeeripheriam, & diametrum ejus intercipitur. Vid. Num. *ſeq*.

Digitized by Google

N. XLIX. 5. Ejus Pericauſtica eſt Ellipſis, cujus minima ſemidiameter radio circuli eſt æqualis, maxima ejuſdem ſeſquialtera (g). Cauſtica ergo *Tſchirnhauſiana* per reflexionem oculo ex infinita diſtantia aſpectanti apparet Ellipſis.

6. Quoniam e converſo Parabolæ Cauſtica [*Fig.* 2.] ex radiis D B axi AN parallelis, tota concentratur in ejus umbilicum F, qui proin *Focus* appellatur; hinc, per Theorema noſtrum, expedite conſtruitur Paraboloides illa IH, ex cujus evolutione Parabola ABC deſcribitur, hoc pacto: ſumto in curva parabolica ubivis puncto B, & abſciſſa in axe FP = FB, ut ſit ducta BP curvæ perpendicularis; fiat angulus rectus BFG, vel, ſi mavis, erigatur in umbilico normalis ad axem FT, & producatur BP uſque in T; eritque dupla ipſius BG, vel PT, nempe BH, radius circuli Parabolam in B oſculantis, hoc eſt, punctum H in optata Paraboloide. (h)

7. Hinc porro quædam elegantes Parabolæ proprietates demonſtrantur: ut, quia dicta Cauſtica colligitur in punctum, & ex puncti evolutione circulus deſcribitur, ſequitur, Anti-Cauſticam Parabolæ eſſe peripheriam circuli CM ſuper F deſcripti, vel ei verius concentricam aliam, adeoque FC = FB + BM = FB + BD. Quod ſi permutatis inter ſe puncto radiante & foco Parabolæ, illud in puncto F collocari, hic in puncto axis infinitæ diſtantiæ colligi intelligatur, erit ex foci evolutione deſcripta Anti-Cauſtica circulus infinite magnus, hoc eſt, recta axis perpendicularis EL, diſtans a vertice A quantum umbilicus; ac propterea B L = B F. Sequitur & in revolutione Parabolæ ſuper ſe ipſa, focum, loco Cycloidalis, rectam E L deſcribere.

8. Quin

(g) Ex Nota præced. Peri-cauſtica habet ordinatas ordinatarum ſemicirculi expoſiti ſeſquialteras. Hæc igitur ellipſis eſt.

(h) Nam, ex demonſtr. Nota (c), congreſſus radiorum fit in medio radii reflexi abſciſſi a perpendiculari demiſſa ex centro circuli oſculantis; vel, quod idem eſt, in extremitate radii reflexi abſciſſi a perpendiculari demiſſa ex medio radii oſculatoris. Quia igitur is congreſſus fit in F, & eſt GF ad BF perpendicularis, BG eſt ſemiſſis radii oſculatoris, & BH = 2BG = radio oſculatori. Eſt autem Triang. F P T = F B G. Ergo P T = B G & 2PT = 2BG = radio oſculi.

8. Quin & Cauſtica ex radiis RB axi perpendicularibus uno ductu calami ſic determinatur: Ex radio reflexo abſcinde BS = FT, vel ſi videatur elegantius, ipſi FG fac parallelam & æqualem BS, eritque S utroque modo punctum in optata Cauſtica (i). Quæ conſtructio conferri poteſt cum *Tſchirnhauſiana*, menſis Februarii 1690. N. XLIX.

9. Super omnia vero utilitatem novi Theorematis commendare poteſt, quod occaſionem ſubminiſtraverit detectioni *Curvæ mirabilis*. Sic voco *Loxodromicam* illam *planam*, ſeu *Spiralem Logarithmicam* (cujus dimenſionem, ſpeciminis loco, in ſuperioris Anni *Actis* (k) exhibui], propterea quod non modo ſui evolutione ſeipſam deſcribere, [quod jam olim etiam *Fratri* meo obſervatum in *Actis* retuli], ſed præterea ſui ipſius *Ant-Evolutam*, *Cycloidalem*, *Cauſticam* ex umbilico, *Anti-Cauſticam*, *Peri-Cauſticam* eſſe, & infinitis aliis modis ex ſeipſa generari poſſe deprehendi, & quidem ita, ut perpetuo non tantum ſimiles, vel ejuſdem ſpeciei curvæ prodeant [ut fieri ſolet in evolutione Cycloidis *Tſchirnhauſianæ*] ſed prorſus identicæ & poſitione tantum diverſæ, taleſque quæ ſibi ſuperimpoſitæ plane congruant. Quorſum ſpecialiter adaptavi ſchema primum, in quo ADHM eſt expoſita Spiralis, hujus naturæ, ut ex umbilico A projecta recta quævis AH curvam ſecet conſtanti angulo AHR: BL ejus Evoluta: CI Cauſtica ex umbilico A: F*a* Cycloidalis Anti-Cauſtica: EI Peri-Cauſtica: G*b* Ant-Evoluta; ubi ſequentia notare convenit. (l)

a. Omnes

(i) Cum ſit ang. GBS = GBR & GBD = GBF, erit SBD = RBF; ideoque [addito communi RBS] FBS = RBD = recto. Ergo ſi BS = FG, erit BFGS parallelogr. rectangulum. Abſcinditur ergo radius reflexus BS a perpendiculari GS demiſſa ex medio G radii oſculatoris BH. Congreſſus radiorum ſit igitur in S, hoc eſt, punctum S eſt in Cauſtica. Sed BS = FG = FT.

(k) Supra N°. XLII. pag. 442.

(l) Quæ de Spira mirabili Auctor habet noſter, demonſtrabimus, ſed ordine nonnihil inverſo.

I. Si a dato puncto A [*Fig*. 4.] ad expoſitam quamcunque Curvam H*bb* ducti radii AH, A*b*, ita producantur, ut producti AL, A*l* ad radios AH, A*b* datam rationem habuerint,

tan-

N.XLIX. tangent productorum extremitates curvam Lll expoſitæ ſimilem; id eſt, curva Lll per productorum extremitates deſignata expoſitæ eſt ſimilis.

Propoſitio Axiomatis loco aſſumi poteſt. Manifeſtum enim eſt figuras AH*h*, AL*l* ſola magnitudine differre.

II. Si ad extremitatem H radii cujuſvis AH, ipſi adjungatur ſub angulo dato AHK recta quæpiam HK ad AH datam rationem habens, tanget rectæ adjunctæ extremitas K curvam K*k* expoſitæ ſimilem.

Quia datus eſt ang. AHK & data laterum AH, HK ratio, datum eſt ſpecie triangulum AHK, Datus ideo ang. HAK, & data ratio AH ad AK. Curva H*h* quieſcente, gyretur curva K*k* circa punctum A, & gyrando deſcribat angulum KAH, ut AK cadat ſuper AH, & ſit AL, curva K*k* perveniente in L*l*. Ergo radius AH ad productum AL, id eſt AK, datam rationem habet. Curva igitur L*l*, id eſt K*k*, expoſitæ H*h* eſt ſimilis, per præced.

Coroll. Si Triang. AHK latera AH, AK habuerit æqualia, curva K*k* cum gyratione deſcripſerit ang. KAH congruet cum expoſita H*h*. Eo igitur in caſu, genita expoſitæ ſimilis eſt & æqualis.

III. Spirales logarithmicæ ſimiles ſunt etiam æquales.

Sint H*h*, L*l*, Spirales logarithmicæ ſimiles, eodem umbilico A deſcriptæ. Centro A, radiis AL, A*l*, deſcribantur circuli LM, *lm*, Spirali H*h* occurrentes in M, *m*. Quia latera AL, A*l* lateribus AH, A*h*, circa eundem angulum A ſunt proportionalia, ſimilia ſunt Tr. AH*h* AL*l*, atque ideo æquales ſunt ang. AH*h*, AL*l*. Sed, ex natura Spiralis, æquales ſunt ang. AH*h*, AM*m*. Igitur ang. AL*l*, AM*m* ſunt æquales. Sunt etiam latera AL, A*l*, lateribus AM, A*m* æqualia. Ergo prorſus æqualia ſunt Tr. AL*l*, AM*m*, & illud circa punctum A gyrando & angulum LAM deſcribendo cum iſto congruet. Pariter congruent A*ll*, A*mm*, & quotcunque volueris Triangula congruent. Congruere igitur poſſunt curvæ L*ll*, H*h*M*m*, quas ideo rite dixeris æquales vel eandem.

Coroll. I. Ergo, in hyp. Prop. II. Si expoſita H*h* fuerit Spiralis logarithmica, genita K*k* eſt eadem Spiralis.

Coroll. II. Spirales L*l*, & M*m* inter ſe conſtituunt angulum LAM, quem metitur arcus LM centro A deſcriptus, & inter utramque interjectus. Nam, ſi L*l* circum A gyrando deſcribat angulum LAM, cum HM congruit.

Coroll. III. Is angulus LAM proportionalis eſt logarithmo rationis AL ad AH, radii ad radium productum. Etenim N°. XLII, Art. I. oſtenſum eſt, ſi ſumantur in Spirali logarithmica radii in geometrica progreſſione, eſſe angulos quos comprehendunt in arithm. progr. Sunt igitur hi illorum logarithmi. Angulus verbi gr. MAH eſt logarithmus rationis AM [vel AL] ad AH.

Corroll. IV. Ductis, ut libet, radiis AL, A*h*, angulus quem conſtituunt Spirales H*h*, L*l*, æqualis eſt angulo LA*h* radiorum una cum angulo

Digitized by Google

gulo qui logarithmus eſt rationis eorum A L : A *b*. Nam ang. LAM, quem conſtituunt ſpirales, æqualis eſt ang. LA*b*, ſimul & ang. *b*AM, qui logarithmus eſt rationis A M [vel AL] ad A*b*.

Ex his facillime ſequitur Auctoris Prop. α; eaſdem ſcil. eſſe cum ſpirali expoſita DH, [*Fig*. 1]

1°. *Evolutam* ejus AB. Evolvatur enim Spiralis AB, ſitque BH radius evolutæ, ipſi æqualis, ipſamque tangens in B, perpendicularis autem in H ad curvam evolutione deſcriptam D H. Demonſtratum eſt N°. XLII. Art. I. AH normalem ad radium A B, ex tangente reſcindere partem BH curvæ AB æqualem. Ergo punctum H reperitur in curva evolutione deſcripta. Quoniam igitur in rectangul. Tr. A B H, datus eſt ang. ABH (ex ſpiralis natura) datum eſt ſpecie Triangulum, & data ratio radii AB ad adjunctam BH ſub dato angulo ABH. Ergo curva DH eadem cum curva AB [*Cor*. 1. III].

2°. *Antevolutam* G*b*. Quia datum eſt ſpecie Tr. A H B, datus eſt ang. A H B. Datus ideo ang. deinceps A H *b*. Data quoque ratio AH ad HB, vel H*b*, radio AH adjunctam ſub angulo dato. Ergo G*b* curva eadem cum curva DH. [*Cor*. 1. III.]

3°. *Cauſticam* CI. Per Theor. cujus demonſtrationem vide Nota (*c*), eſt 2HN—HB:HB = HA:HI. Sed hic H N = H B, ideoque 2 H N —HB = HB. Quare HA = HI. Præterea datus eſt ang. AHB. Datus igitur BHI, ipſi, ex lege reflexionis, æqualis. Data itaque AHI, ſumma eorum. Ergo radio AH adjungitur recta H I ipſi æqualis, ſub dato angulo AHI. Curva igitur CI eadem eſt cum curva DH.

4°. *Anticauſticam* F*α*. Propter datum ang. AHI, datus eſt ang. deinceps AH*α*, ſub quo adjungitur radio AH recta H *α* ipſi æqualis. Ergo genita F *α* eadem cum expoſita D H.

5°. *Pericauſticam* E*i*. Quoniam H*i* = HI = HA; productus A *i* eſt radii AH duplus. Ergo [Prop. I.] curva E*i* curvæ DH ſimilis, & [*Cor*. 1. III.] eadem.

Ex his tam aperte fluunt Prop. β. γ. . . η, ut iis demonſtrandis immorari neceſſe non ſit. Prop. θ. demonſtratio habetur ex Cor. 3. aut 4. III. Hinc enim ſequitur angulum expoſitæ cum . . . . . .

evoluta = ang HAB. rect. + Log. AH:AB
cauſtica - - HAI[AHR] + Log. AH:AI
anticauſtica-HA*α*[AHB] + Log. A*α*:AH
pericauſtica - - - - - - - Log. A*i* : AH
antevoluta - - HA*b* + Log. A*b*: AH.

Hi autem anguli, & hæ rationes, dato angulo quo ſpiralis a radiis ſuis ſecatur, datæ ſunt. Ergo & anguli quem ſpirales inter ſe conſtituunt dati ſunt, ſaltem tranſcendentaliter, hoc eſt, conceſſis logarithmis.

Eſt autem logarithmus rationis æqualitatis nullus. Quare, ubi quædam ex prædictis rationibus fit ratio æqualitatis, tunc, abſque logarithmis, datur angulus cujus menſuram ingreditur logarithmus illius rationis.

Sic, pone AH = AB, id quod fit ang. A B H exiſtente 45 gr. &

N. XLIX. α. Omnes iſtæ ſex Spirales ſunt eadem Helix, hoc eſt, eodem angulo a ſuis radiis ex umbilico projectis ſecantur.

β. Omnes poſt infinitos anfractus in communi umbilico A coeunt.

γ. Nulla alteram alibi tangit ſecatve.

δ. Si radius incidens & reflexus, HA, HI, producantur ultra H ad uſque occurſum Peri-Cauſticæ & Anti-Cauſticæ in *i* & *a*, & jungantur puncta A, *a*, *i* & I, erit A *a i* I Parallelogrammum rectangulum, cujus diagonalis *a* I tangit Cauſticam & latus *a i* Peri-Cauſticam.

ε. Si per H ducantur HB, HR, parallelæ oppoſitis Parallelogrammi lateribus, tanget una expoſitam, evolutam altera.

ζ. Triangula AH*a*, ABI, ſunt ſimilia: AH = HI = H*a* = H*i*; Cauſtica ACI = 2 HI. Evoluta AB = HB.

η. Si communi umbilico recta projiciatur ſecans ſpirales, harum tangentes omnes per ſectionum puncta ductæ erunt parallelæ, & portiones, umbilico ac ſectionibus interjectæ, rectæ portionibus conterminis ſunt proportionales.

θ. Si ſuper communi umbilico, tanquam centro, deſcribatur quocunque radio circulus ſecans ſpirales in punctis B, C, D, E, F, G; erunt ſpiralium omnium portiones centro & peripheria interjectæ æquales: radiorum vero ex centro ad interſectiones ductorum anguli ſunt iidem cum angulis, quos ipſæ ſpiræ poſt infinitos circuitus in centro inter ſe conſtituunt. Speciatim, ſi angulus communis radiorum ex umbilico projectorum cum ſpiralibus

ang. expoſitæ cum evoluta eſt æqualis [HAB] recto.

Pone AH = AI; quo caſu æquilaterum eſt Triang. AHI, & HAI ſeu AHR eſt 60 gr., & ang. expoſitæ cum cauſtica erit quoque 60 gr.

Pone A*a* = AH, ſeu pone Tr. AH*a* eſſe æquilaterum, & AHR 30 gr. & erit ang. expoſitæ cum anticauſtica 60 gr.

Nec minus liquet angulum cauſticæ cum anticauſtica = *a*AI + Log. A*a*: AI = recto + Log. AH: AB = angulo cauſticæ cum expoſita.

Pariter ang. evolutæ cum cauſtica = BAI + Log. AI: AB = *a*AH + Log. A*a*: AH [ſunt enim ſimilia Triangula AH*a*, ABI] = angulo expoſitæ cum anticauſtica.

Digitized by Google

ralibus ſit ſemirectus, Helix Expoſita & Evoluta faciunt rectam: N. XLIX.
Si ille 60 gr. Expoſita & Cauſtica itidem faciunt angulum 60 gr. Si ille 30 gr. Expoſita & Anti-Cauſtica faciunt angulum 60 gr. In genere vero ſpectata angulorum relatio eſt tranſcendentalis. Angulus Evolutæ cum Cauſtica perpetuo æquatur angulo Expoſitæ cum Anti-Cauſtica, ſicut & angulus Evolutæ cum Expoſita angulo Cauſticæ cum Anti-Cauſtica.

ι. Præter recenſitas autem quinque Spiras infinitis inſuper aliis modis transformari poteſt expoſita Helix, ſic ut ſemper eadem Helix prodeat; ad id enim obtinendum non eſt neceſſe, ut HI, H*a* vel H*i* ſint æquales HA, neque etiam ut H*b* æquetur ipſi HB; ſed nec opus, ut angulus AHI per HB, aut AH*a* per HR ſit biſectus &c. Generaliter namque verum eſt, quod quotieſcunque rectæ ex umbilico in Expoſitam projectæ AH adjungitur in H alia ad quaſcunque partes, veluti H*d*, dummodo angulus interceptus AH*d* ſemper conſtans ſit, crura quoque AH, H*d* conſtantem rationem ſervent, adjunctæ extremitas *d* eandem numero cum Expoſita, & circa communem umbilicum conſtitutam Helicem deſcribet.

Neſcio vero, an hujus proprietatis meminiſſe tanti ſit, cum omnibus omnino curvis æque competere videam, quanquam ignorem id a quoquam obſervatum eſſe. Nimirum ſi cuique expoſitæ curvæ DHM applicetur quodvis Triangulum AH*a*, illudque ſupra datum punctum A rotari, & ſimul fluere intelligatur ita, ut manente angulo H in peripheria expoſitæ, latera omnia creſcant decreſcant-ve proportionaliter, ipſumque Triangulum ſibi ſemper maneat ſimile, deſcribet angulus *a* curvam ſimilem & eandem [*ſpecie*] cum expoſita, ſubinde & *numero*, ubi AH, A*a* fuerint crura Trianguli Iſoſcelis. *Numero* eaſdem curvas voco [forte rectius quam exiſtimarent Logicorum filii] quæ ſibi ſuperimpoſitæ congruunt. At quod Evolutæ, Cauſticæ, Anti-Cauſticæ &c. non perinde quoque eædem ſpecie numerove ſunt in quovis curvarum genere, in cauſa eſt ſola anguli, quem recta AH ad expoſitam curvam ejuſve tangentem facit, inæqualitas, quæ omnia turbat. Hic enim, cum in ſola noſtra

Sſſ 2 ſpira

Digitized by Google

N. XLIX. Spira conſtans maneat, videtur quaſi natura hoc eſſentiali caractere illi ſoli id privilegii vindicare voluiſſe.

Cum autem ob proprietatem tam ſingularem tamque admirabilem mire mihi placeat Spira hæc mirabilis, ſic ut ejus contemplatione ſatiari vix queam; cogitavi, illam ad varias res ſymbolice repræſentandas non inconcinne adhiberi poſſe. Quoniam enim ſemper ſibi ſimilem & eandem Spiram gignit, utcunque volvatur, evolvatur, radiet; hinc poterit eſſe vel ſobolis parentibus per omnia ſimilis Emblema; *Simillima Filia Matri.* Vel, [ſi rem æternæ Veritatis Fidei myſteriis accommodare non eſt prohibitum] ipſius æternæ generationis Filii, qui Patris veluti imago, & ab illo ut Lumen a Lumine emanans, eidem ὁμοιόσιος exiſtit, qualiſcunque adumbratio. Aut, ſi mavis, quia curva noſtra mirabilis in ipſa mutatione ſemper ſibi conſtantiſſime manet ſimilis & numero eadem, poterit eſſe, vel fortitudinis & conſtantiæ in adverſitatibus; vel etiam carnis noſtræ poſt varias alterationes, & tandem ipſam quoque mortem, ejuſdem numero reſurrecturæ ſymbolum; adeo quidem, ut ſi ARCHIMEDEM imitandi hodienum conſuetudo obtineret, libenter Spiram hanc tumulo meo juberem incidi cum Epigraphe: *Eadem numero mutata reſurget.*

N°. L.

ADDITIO
AD SCHEDAM
DE
LINEIS CYCLOIDALIBUS &c.
Proximo Maii Actorum horum menſe exhibitam.

VIxdum ſubmiſeram Editoribus *Actorum*, nuperam ſpeculationem de Cycloidalibus cæteriſque curvis, cum poſtridie a *Fratre* Pariſiis litteras acciperem, in quibus nonnulla egregia huc ſpectantia communicavit; ſignificans, quod præter cauſticam *Tſchirnhauſianam*, aliam repererit, quæ quoque ſit Cyclois; quod deprehenderit Cycloidem vulgarem *Hugenianam* ſui ipſius, ut Evolutam, ſic Cauſticam exiſtere; & quod obſervaverit eandem proprietatem Spirali logarithmicæ [quod partem conſtituit inventi Curvæ mirabilis] communem eſſe: quæ omnia non ſine ſtupore perlegere potui; cum conſiderarem, neutri de alterius ſpeculationibus has curvas concernentibus quicquam conſtitiſſe. Anſam vero dederunt iſta materiam hanc jam ſepoſitam denuo reaſſumendi, ac obſervandi ſequentia: 1°. Quod omnes Cycloides ex circuli ſuper circulo revolutione per punctum in ejus peripheria acceptum genitæ, evolutione ſui ſimiles, ſeu eaſdem ſpecie, Cycloidas deſcribunt. 2°. Quod Cauſtica vulgaris Cycloidis ex radiis axis parallelis eſt alia Cyclois vulgaris, cujus

Acta Erud. Lipſ. 1692. Jun. p. 291.

No. L. baſis prioris eſt dimidia. 3°. Quod Cauſtica circuli ex puncto in ejus peripheria ſumpto, Cyclois eſt genita ex revolutione circuli ſuper æquali circulo, & quod ſui quoque evolutione ſeipſam deſcribit. 4°. Quod Cauſtica hujus Cauſticæ, ſive Cycloidis, & ipſa Cyclois eſt, ſed *Tſchirnhauſiana*, & cujus circulus genitor radii eſt ſubdupli ejus ſuper quo revolvitur. Quæ omnia, ut Lectoribus iſthæc examinaturis laboris compendium faciam, breviter hic demonſtrata ſiſto.

L E M M A.

Si circulus *dcl* [*Fig.* 1.] ſuper convexa aut cava peripheria alterius cujuſvis circuli *bdg* rotetur, & in prioris peripheria acceptum punctum *c* ſit punctum lineans alicujus Cycloidis & *m* punctum reſpondens in evoluta ejus, adeoque recta ducta *cm* Cycloidi perpendicularis, & propterea tranſitura per contactum circulorum *d*. Dico, fore *cd* ad *dm*, ut *al* ad *ad*, aggregatum puta, vel differentia radii expoſiti & diametri genitoris circuli ad radium expoſiti.

DEMONSTR. (*) Sit *df* particula infinite parva peripheriæ *bdg*,

(*) Demonſtrationem, quæ ſubobſcura viſa eſt, nonnihil immutatam exhibemus. Dum circulus genitor *dcl* [Tab. XVIII. *b*. N°. L.] tranſit in *feh*, percurritque particulam *df* circuli expoſiti *bdfg*, deſcribat punctum lineans *c* particulam *ce* Cycloidis *bce*. Et quia *cd*, *ef* ad curvam normales concurrunt in *m*, ſpectari poteſt *ce*, tanquam arcus circuli centro *m* deſcripti. Eodem centro, radio *mf*, deſcribatur arcus *fi*; & centro *f*, radio $fn = dc$ arcus *no*. Quoniam $me = mc$, & $mf = mi$, eſt $ef = ci$, & $eo\ [= ef - fo = ef - fn = ef - dc = ci - dc] = di$. Præterea, ex natura & generatione Cycloidis, arc. $bd = dc = fn$, & arc. $bdf = fne$, ideoque $df = ne$. Igitur triangula rectangula *dfi*, *eno*, cum habeant æqualia latera *df*, *ne*, & *di*, *eo*, æqualia ſunt, conſequenter $fi = no$. Jam vero notum eſt angulos, quos arcus æquales metiuntur, eſſe in radiorum ratione reciproca. Ergo, cum æquales ſint *fi*, *no*, erit ang. *fmi* : ang. $nfe = ef : fm$ ſed $nfe = \frac{1}{2}nke$, & *fmi* [in Cycl. exteriore] $= mua - mfa = daf + mda - mfa = daf + cdl\ [nfh] - efh = daf + nfe =$ *daf*

Digitized by Google

bdg, quam tangant rectæ *ds* in *d*, & *ft* in *f*, ſumptæque intelligantur *ch*, *hi*, ſigillatim æquales ipſi *df*, *ip* vero quarta proportionalis ad *ad*, *dl* & *df*; ducantur *hf*, *if*, *pf*, ſecantes rectam *cq* parallelam ipſi *ft* in *n*, *o*, *q*; ut & *ir*, *pr* diameter: quo facto angul. $pfs = hfs\ [cds] + ifh \pm pfi = cld + ifh \pm pfi = cld + dlf \pm pfi = clf \pm pfi = clf \pm pri =$ [ob $ad : dl$ vel $pr = df : pi$] $clf \pm daf = clf \pm tfs$: hinc $pft = pfs \mp tfs = clf =$ [poſtquam continuata rotatione circulus circulum tetigerit in *f*] angulo tangentis *ft* & ſecantis *cf*: quare tum *cf* eadet ſuper *pf*, eoque ſitu Cycloidi perpendicularis erit, ac productam alteram perpendicularem productam *cd* ſecabit in puncto evolutæ *m*: unde porro ſic arguere licet; $ad : al\ [ad \pm dl] = ad \times df : ad \times df \pm dl \times df = df : df \pm (dl \times df : ad) = ch : hi \pm ip\ [hp] =$ [ob arcum *cp* habendum pro recta, & rectas *hn*, *pq*, pro parallelis] $cn : nq = df : nq =$ [ob ſimilia Triangula *dmf*, *nfq*] $dm : nf\ [cd]$. Q. E. D.

Corollaria. I. Si *ad* ſit radius infinite magni, hoc eſt, *bdg* linea recta, erit $cd = dm$.

II. Si circulus genitor ſit infinite magnus, hoc eſt, *cdr* linea recta, fiet $dm = 0$, ipſaque Cyclois coincidet cum illa quæ ex evolutione circuli expoſiti deſcribitur.

III. Si circulus expoſitus ſit infinite parvus, hoc eſt, punctum, degenerabit Cyclois in circulum.

IV. Si $ad = dl$, erit $cd = 2dm$.

V. Si $2ad = dl$, erit $cd = 3dm$.

VI. Si $ad = dl$, & circulus rotetur ſuper peripheria concava,

$daf + \frac{1}{2} nke$. At *fmi* [in Cycl. interiore] $= mfa - mua = mfa - mda - daf = mfa - nfa - daf = mfn\ [nfe] - daf = \frac{1}{2} nke - daf$. Ergo $ef : fm\ [= fmi : nfe] = \frac{1}{2} nke \pm daf : \frac{1}{2} nke = nke \pm 2daf : nke$. Atqui propter æquales arcus *ne*, *df*, qui metiuntur angulos *nke*, *daf*, ſunt hi anguli reciproce ut radii *nk*, *da*. Igitur $ef : fm\ [= nke \pm 2dfe : nke] = ad \pm 2nk\ [ab \text{ vel } al] : ad$. Q. E. D.

Digitized by Google

No. L. cava, erit dm infinite magna, adeoque punctum lineans c loco Cycloidis rectam, videlicet, diametrum circuli expoſiti deſcribet.

Patet ergo, quo pacto linea recta & circulus pro ſpeciebus quoque Cycloidum haberi poſſunt.

PROPOSITIO I.

Sit BEF [*Figura* 2.] Cyclois genita ex revolutione circuli CDL ſuper convexa, ut in ſuperiore, aut ſuper concava peripheria circuli BKF, ut in inferiore figuræ parte: & ſumantur AH tertia proportionalis ad AL & AD, cæteraque fiant, ut figura monſtrat; quo pacto $AL : AD = AD : AH = \pm AL \mp AD : \pm AD \mp AH = LD : DH = CD : DM$: quare punctum M eſt in evoluta Cycloidis BEF per *Lemma* præcedens. Item, quia $DK : HG = AD : AH = LD : DH = CL\ [DK] : HM$, erit $HG = HM$; & propterea etiam punctum M in Cycloide a circulo MDH ſuper GH revoluto deſcripta. Cyclois vero hæc *eadem ſpecie* ſeu ſimilis alteri BEF, quia diameter genitoris circuli ad radium expoſiti utrobique eandem habet rationem, ut oſtenſum. Ergo Cycloides omnes, evolutione ſui, *eaſdem ſpecie* Cycloidas deſcribunt. Q. E. D.

Coroll. Si BKF ſit circulus infinite magnus, ſive linea recta, Evoluta Cycloidis erit *eadem numero* cyclois; ratione AL ad AD, ſeu LD ad DH, in rationem æqualis abeunte.

PROPOSITIO II.

Sit vulgaris Cyclois ACK [*Figura* 3.] & ſimilis alia ALH, cujus baſis AH prioris AK ſit dimidia; eſtoque BF majori Cycloidi perpendicularis, BG radius illi incidens parallelus axi HC, BE radius reflexus, qui ſumatur æquali incidenti BG, cæteraque fiant, ut figura docet: quo facto, ang. $BFD = FBG = FBD$; proinde $BD = DF$ & D centrum genitoris circuli FBI: & quoniam Triang. BFG, BFE, per hypotheſin & conſtructionem ſe habent

habent juxta 4. I. Eucl. erit angulus BEF $=$ BGF recto, & conſequenter jacebit in peripheria circuli diametro DF deſcripti; cumque angulus FDE $=$ DBF $+$ DFB $=$ 2DFB, & contra diameter DF diametri FI ſubdupla, erunt arcus ſubtenſi angulis æquales, nempe arcus FE $=$ arcui BI $=$ rectæ FH: unde punctum E eſt in Cycloide deſcripta a genitore circulo FED, cujus diameter DF alterius FI eſt dimidia, hoc eſt, in Cycloide ALH. Itemque quia BF eſt ſemiradius circuli Cycloidem ACK in B oſculantis, per *Corollarium* 1. *Lemmatis præcedentis*, atque recta FE radio reflexo perpendicularis; idem quoque punctum E eſt in Cauſtica Cycloidis ABC ex radiis axi HC parallelis, per nuperum meum *Theorema* (b), quod relationem inter Cauſticas & Evolutas exhibet. Cauſtica ergo Cycloidis hujus, ſimilis & eadem ſpecie Cyclois eſt. Q. E. D. No. L.

PROPOSITIO III.

Anti-Cauſtica curvæ cujusvis eadem eſt cum ejus Cycloidali, quoties punctum radians reſpectu expoſitæ, & punctum lineans reſpectu genitricis curvæ ſimiliter poſita ſunt, ut nuper innui (c). Ergo & Anti-Cauſtica circuli ex puncto in ejus peripheria ſumpto coincidit cum Cycloide, quam deſcribit punctum ſimiliter ſumptum in peripheria circuli ſuper eodem circulo rotantis. Sed ejuſmodi curva, qua eſt Cyclois, per *Prop.* 1. ex evolutione ſimilis Cycloidis; & per ea quæ nuper, qua eſt Anti-Cauſtica, ex Cauſticæ evolutione deſcribitur. Quare & Cauſtica ex puncto in peripheria circuli accepto Cyclois eſt ex circuli ſuper æquali circulo revolutione genita. Q. E. D.

Patet hinc, *Fraternum* hoc inventum Theorematum iſtorum generalium duntaxat conſectarium eſſe. Conſtat etiam, quod *Frater* inobſervatum præteriit, Cauſticam hanc non ſecus ac *Tſchirnhauſianam*, ex ſui evolutione ſeipſam deſcribere.

(b) N°. præced. pag. 493. ſub finem. Vide etiam Notam (*b*).

(c) *Ibid.* pag. 492 ſub finem & pag. 493. Vide Notam (*a*).

No. L.

PROPOSITIO IV.

Sit BGC [*Figura* 4.] Cauſtica ſemicirculi DEC ex puncto C, eademque Cyclois genita ex revolutione GEFH ſuper æquali ipſique DEC concentrico circulo BHR. Eſto autem H circulorum contactus, G punctum lineans Cycloidem, Q centrum genitoris, & ducantur rectæ AHQ, BG, QG, BH, GH, perpendicularis futura Cycloidi, quæ producatur in N, junctaque BN & demiſſa in BG perpendiculari HO, diametro HQ deſcribatur circulus HPQ ſecans rectam QG in P, &c. Quo pacto QG = QH = AH = AB, ut & arcus & ſubtenſa HG = arcui & ſubtenſæ HB, per defin. Cycloidis; unde Triang. Iſoſcelia ABH, QGH, ſimilia & æqualia, & tum anguli HGB = HBG, tum QHG = AHB; cumque ambo illi ſint æquales his ambobus [quandoquidem additus utriſque communis BHG duos rectos complet] erit unus HGB = uni QHG = QGH; ideoque GQ reflexus radius incidentis BG. Deinde quoniam GPH = QPH = recto [utpote in ſemicirculo] = GOH, erunt quoque Triangula GPH & GOH ſimilia & æqualia, & GP = GO = $\frac{1}{2}$GB: Præterea etiam HB = HG = [ob æqualitatem circulorum GHF, BHN] ipſi HN; quare circulus centro H radio HG deſcriptus, per B & N tranſibit, angulumque GBN rectum oſtendet. Denique, ſi ſupponatur punctum I in evoluta Cycloidis BGC, erit HI tertia pars ipſius HG vel HN, per 5. *Coroll. Lemm.* Quibus præmiſſis, ex nupero Theoremate evincitur, punctum P in hujus Cycloidis Cauſtica ex puncto B verſari: Nam juxta Theorema (a) debebit eſſe GP = GB × GI : (2GN — GI) = 4GB : (12 — 4) = $\frac{4}{8}$GB = $\frac{1}{2}$GB; ut repertum eſt. At idem punctum P verſatur quoque in Cycloide *Tſchirnhauſiana* BKR, ea ſcilicet quæ gignitur ex revolutione circuli radii ſubdupli HPQ ſuper circulo dupli radii BHR. Cum enim idem angulus PQH, vel GQH, exiſtat tum in peripheria circuli HPQ, tum in centro circuli duplæ diametri

(a) No. præced. pag. 493.

metri HGE, erit arcus ſubtenſus HP = arcui HG = arcui HB; No. L.
unde conſtat &c.

Nota, ABGQ eſt Trapezium regulare, in quo BG parallela AQ, AB = GQ, & ABG = BGQ.

Coroll. Hinc caſu in ſolutionem incidimus Problematis, quod alias ſatis perplexum videri poſſet ei, qui illud de induſtria vellet aggredi: Nempe Punctum ex infinita & aliud ex finita diſtantia radiare debent in diverſas curvas expoſitas, ſic ut reflexi utrobique radii ſuis interſectionibus eandem numero & poſitionem Cauſticam forment. Quæruntur Expoſitæ, cum communi Cauſtica? Reſp. Quæſito ſatisfaciunt expoſitæ Cycloïs BGC, & radio AQ deſcriptus MKT circulus; in illa enim ſi radiet punctum B, in hunc punctum infinite diſtans per radios rectæ BT parallelos, radii reflexi utrobique eandem cauſticam *Tſchirnhauſianam* BPKR formabunt. (*)

Tres ergo Curvas deteximus, *Spiralem Logarithmicam*, *Cycloidem vulgarem*, & *Cycloidem noſtram* ex circuli ſuper æquali circulo revolutione ortam, quæ eximia inter ſe affinitate gaudent, duaſque proprietates notabiles communes habent: una eſt quod ſingularum evolutione eædem curvæ deſcribantur, [qua quidem etiam reliquæ Cycloides conſpicuæ ſunt;] altera, quod ſingularum Cauſticæ quoque eædem curvæ ſint: quanquam & hic non leve diſcrimen animadvertimus, quod facit, ut ea, quæ communia habent, ſingularitati *Spiræ mirabilis* nihil derogent. Nam primo non tantum Evoluta & Cauſtica Spiræ mirabilis, ſed & Ant-Evoluta, Anti-Cauſtica, Peri-Cauſtica, &c. eadem curva ſunt, quæ in cæteris fere diverſæ exiſtunt. Deinde, in evolutione Spiræ mirabilis, partes curvæ eodem ordine deſcribuntur, quo evolvuntur, in evolutione Cycloidum omnium inverſo. Tertio, Spira mirabilis eandem *numero* & Evolutam habet & Cauſticam; Cycloïs vulgaris eandem quidem *numero* Evolutam, ſed Cauſticam ſimilem tantum, ſeu *ſpecie* eandem: noſtra vero Cycloïs ſimilem,

(*) N°. præc. pag. 495. Art. 4. Vide etiam Notam (*f*)

No. L. milem, ſeu eandem *ſpecie* Evolutam; at diſſimilem ac *genere* duntaxat eandem Cauſticam. Colligitur hinc, ſi vulgaris Cycloidis Cauſticæ, ſimul ac naſcuntur, ſpeculi conſiſtentiam acquirere poſſent, ad excipiendum ac reflectendum eos ipſos radios ex infinita diſtantia profectos, e quibus enatæ fuerant; fore ut aliæ novæ orirentur Cycloides prioribus continuo minores minoreſque, eo modo quem *Figura* 3, parte dextra refert: cum contra Spiræ mirabilis Cauſtica, in ſpeculum mutata, & radios ex communi umbilico emanantes repercutiens, aliam, non minorem, ſed identicam prorſus Spiram producat. Quemadmodum itaque per productionem Spiræ mirabilis communicationem eſſentiæ divinæ *ad intra*, [ut in ſcholis loqui amant,] qua Deus Filius Patre non minor, ſed æqualis, ex intima Patris eſſentia, & Deitatis quaſi umbilico naſcitur, & ab utroque exit Spiritus Sanctus utrique par, non inconcinne adumbrari nuper partim diximus: ita nunc continuata analogia communicationem imaginis divinæ *ad extra*, qua Creator ex infinito quaſi intervallo, [quo a Creaturis ſuis diſtat] ipſis radios Divinitatis impertit; eo vero imperfectiores, minoreſque, quo minus immediate ad nos emanarint, per Cycloidis productionem non minus apte repræſentari poſſe arbitramur.

N°. LI.

Digitized by Google

N°. LI.

ÆNIGMA GEOMETRICUM

DE MIRO OPIFICIO TESTUDINIS QUADRABILIS HEMISPHÆRICÆ:

A D. PIO LISCI POSILLO *Geometra*

Propoſitum die 4. April. A. 1692.

Cujus divinatio a ſecretis artibus illuſtrium Analyſtarum vigentis ævi expectatur, quod in Geometriæ pura Hiſtoria tantummodo verſatus ad tam recondita videatur invalidus.

INter venerabilia eruditæ olim Græciæ monumenta extat adhuc, perpetuo equidem duraturum, Templum auguſtiſſimum ichnographia circulari, ALMÆ GEOMETRIÆ dicatum, quod Teſtudine intus perfecte hemiſphærica, operitur: Sed in hac feneſtrarum quatuor æquales areæ [circum ac ſupra baſim hemiſphæræ ipſius diſpoſitarum] tali configuratione, amplitudine, tantaque induſtria, ac ingenii acumine ſunt extructæ, ut his detractis ſuperſtes curva Teſtudinis ſuperficies, pretioſo opere muſivo ornata, tetragoniſmi vere geometrici ſit capax. Quæritur modo, quæ ſit; qua methodo, quave arte pars iſta hemiſphæricæ ſuperficiei curvæ quadrabilis, tenſæ ad inſtar carbaſi, vel turgidi veli nautici, ab Architecto illo Geometra fuerit obtenta? & cui demum plano geometrice quadrabilis ſit æqualis? Vid. *Acta Erud.* 1692. Jun. p. 274.

No. LI. Præſentis Ænigmatis enodatio [quod ſpectat ad hujus admirabilis Fornicis tum conſtructionem expeditiſſimam, tum quadraturam] *Sereniſſimo* FERDINANDO *Magno Principi Etruriæ* ſcientiarum & nobilium artium Cultori ac Patrono Generoſiſſimo, ab eodem Ænigmatiſta oblata jam eſt; qui quidem ſimul non dubitat, quin hoc ipſum Ænigma a ſingulis litterario in Orbe degentibus hodie præclariſſimis Analyſtis ſit ſtatim divinandum, proprias quadrationes impertiendo ſingularis Teſtudinis hujus tetragoniſmicæ ab hemiſphæra diſſectæ, & ipſorum peracutas indagines, multiplicesque induſtrias ad hoc unum idemque geometricum collimantes impatienter expectat, ut hinc, qui temere contumelias in Geometriam jacere audent, ſilere diſcant, vel potius maxima cum voce exclament, *Oh unica verorum ſciſcitabilium ſcientia a Divina in hominum mentes infuſa*; ut hæc imperviis, mutabilibus, fallacibuſque contemptis, æterna iſta, quæ ſemper & unicuique ſunt eadem, tantum appetat, nilque aliud unquam magis innocuum ſcire perquirat.

N°. LII.

ÆNIGMATIS FLORENTINI SOLUTIONES VARIE INFINITÆ.

Per JAC. BERNOULLI.

Act. Erud. Lipſ. 1692. Aug. p. 370.

ESto [*Figura* I.] ABC quarta pars ſuperficiei hemiſphæricæ, terminata quadrantibus verticalibus AB, AC, & horizontali BC; quo poſito,

Primo, ſumatur ubivis in quadrante punctum F, per quod tranſeat circulus major FC, e quo abſcindatur arcus FE = arcui BF; eritque punctum E in quæſito margine feneſtræ BEC: hoc eſt, ſi concipiatur Teſtudo ad inſtar ſuperficiei Globi Terreſtris,

reſtris, in qua C Polus, BA Æquator, BC primus Meridianus, ac jungantur omnia loca, quorum eadem longitudo eſt & latitudo, curva BEC; præſentabit hæc curva feneſtræ deſideratæ marginem: quippe Teſtudinis ſuperficies ABECA, quæ relinquitur detracta feneſtræ area BECDB, æqualis quadrato radii, ac proinde tota Teſtudo quadrato diametri ſphæræ. (a) No. LII.

Secundo: Etiamſi arcus FH abſcindatur minor arcu BF, dummodo ſinus horum arcuum proportionales ſint, naſcetur ſemper ſuperficies ABHIA quadrabilis, ut pote eandem rationem obtinens ad quadratum radii ſphæræ, quam ſinus arcus FH habet ad ſinum BF (b).

Tertio: Quin etiam, ſi ipſi arcus FH, FB, proportionales fuerint, evadet ſuperficies ABHIA quadrabilis, quippe quæ ad rectangulum ſub radio ſphæræ & ſinu verſo illius arcus, qui ad quadrantem eſt, ut arcus FH ad FB, viciſſim eam rationem habet, quam FB ad FH. (c)

Quarto:

(a) Sit K [*Fig.* 3] centrum ſphæræ, cujus ſuperficiei octavam partem exhibeat ABC, literis idem in Fig. 3. ac in 1a. denotantibus. Sitque Cef circulus circulo CEF infinite vicinus, & per hujuſmodi circulos dividatur ſuperficies ABECA, in innumeras areolas quales FfeE. Hæc æqualis eſt [Vid. Not. (*d*) N. XLII pag. 447] rectangulo ſub Ff, & ſub ſinu arcus FE, vel arcus æqualis FB, qui ſinus eſt FG. Verum Triang. ſimilia FGK, FfL, dant FK ad FG ut Ff ad fL aut Gg. Igitur rectang. ſub Ff & FG, hoc eſt areola FfeE æquatur rectang. ſub FK radio & ſub Gg elemento ſinus verſi BG arcus BF. Eſt igitur Tr. BFH æquale rectang. ſub radio & ſub ſinu verſo arcus BF, atque ideo, cum arcus BF deſinit in quadrantem BA, eſt tota ſuperf. BFACEB æqualis rect. ſub utroque radio FK & BK, hoc eſt, quadrato radii.

(b) Si arcus FH ſinus ſit ſinui arcus BF proportionalis; quoniam eſt ſemper FfhH [elementum Tr. BFH] ad FfeE [elem. Tr. BFE] ut rect. ſub Ff & ſinu arcus FH ad rect. ſub Ff & ſinu arcus FE, vel ut ſinus arcus FH ad ſinum arcus FE, hoc eſt, in data ratione, erit quoque Tr. BFH ad Tr. BFE, & tota ſuperf. BFAIHB ad totam ſuperf. BFACEB, in eadem data ratione ſinus FH ad ſinum FE vel BF.

(c) Quod ſi ratio arcus BF ad arcum FH data fuerit, & æqualis rationi quadrantis BA ad arcum AI, in quem deſinit arcus FH, quando BF deſinit in quadrantem BA, ſumantur AM, Am, æquales ipſis FH, fh,

No. LII. *Quarto:* Sit punctum D, ſumptum ubivis in quadrante horizontali BC, per quod tranſeat quadrans verticalis AD, ac intelligatur diametro baſis hemiſphærii BCM ſeorſim poſitæ [*Figura* 2.] inſiſtere figura quævis rectilinea, aut curvilinea, quadrabilis BQM; tum ſumatur arcus BP duplus arcus BD, inque centrum N agatur recta PN, ſecans perimetrum inſiſtentis figuræ in Q. Dico, ſi facta CS tertia proportionali ad PN, & QN; ductaque SR parallela ipſi BM, abſcindatur, [*Figura* 1.] arcus AL = arcui intercepto CR, fore punctum L in curva quadam BLC, quæ terminet ſuperficiem ABLCA æqualem figuræ quadrabili BQM. (4)

Quinto:

fh, & quia eſt BA ad AI ut BF ad FH vel AM, & ut Bf ad fh vel Am, erit quoque BA ad AI ut Ff ad Mm, aut ut rect. ſub Ff & MN, ad rect. ſub Mm & MN, quod æquale eſt rect. ſub AK radio & Nn. Nam, ob ſimilia Triang. MKN & MmO, eſt MK vel AK ad MN ut Mm ad mO vel Nn, & ideo rectang. ſub extremis æquale rectangulo ſub mediis. Igitur BA ad AI ut rect. ſub Ff & MN, ad rect. ſub radio & Nn. Sed rect. ſub Ff & MN ſinu arcus AM, æquale eſt rect. ſub Ff & ſinu arcus FH, cui æqualis AM, hoc eſt æquale areolæ FfhH, elemento Triang. BFH. Pariter rect. ſub radio & Nn, eſt elementum rectang. ſub radio & AN ſinu verſo arcus AM vel FH. Igitur BA ad AI, ut elem. Triang. BFH, ad elem. rectang. ſub radio & ſinu verſo arcus FH, & ideo BA ad AI ut ipſum Tr. BFH ad rect. ſub radio & ſinu verſo arcus FH; conſequenter BA ad AI, vel BF ad FH, ut ſuperf. BFAIHB ad rectang. ſub radio & ſinu verſo arcus AI.

(4) Sit [*Fig.* 4] ABM ſphæræ quadrans, cujus baſis ſemicirculus BCM, centro N deſcriptus, & ſi omnia juxta conſtr. Auctoris fiant, dico Triang. ABL æquale eſſe Tr. BNQ. Nam ſit Ad quam proximus ipſi AD, & Bp duplus Bd, ut eſt BP duplus BD, ideoque Pp duplus ipſius Dd. Trianguli ABL elem. eſt ALl, cujus area [Not. (*d*) N. XLII.] æqualis eſt rect. ſub Dd & AT, ſinu verſo arcus AL, vel rect. ſub Dd & CS, ſinu verſo arcus CR. [Sunt enim arcuum æqualium AL, CR, ſinus verſi AT, CS æquales] Igitur, ob Pp duplum ipſius Dd, eſt ALl ſemiſſis rectang. ſub Pp & CS. Centro N radio NQ deſcribatur arcus Qt, & erit Pp ad Qt ut PN ad QN, id eſt per conſtr. ut QN ad CS. Ergo rect. ſub Pp & CS, quod duplum eſt Tr. ALl, æquatur rect. ſub Qt & QN, quod pariter duplum eſt Tr. QNq. Æqualia ſunt igitur Triang. ALl, & QNq; conſeq. Triang. ABL, NBQ, quorum

Quinto : Cæteris poſitis, ut prius; ſi BCMQB, fingatur lunula Hippocratis, non ſuperficies quidem ABLCA, ſed ipſa feneſtræ area BLCDB tetragoniſmi capax erit, ut pote æqualis dictæ lunulæ. (*)

(*) Eſt enim, per Theor. Archimedeum, [No. XLII. pag. 447.] rum illa ſunt elementa, æqualia ſunt, atque ubi BD in BC, & BQ in BQM deſinit, æquales ſunt ſuperf. ABLCA, BQMB. quadrans ABC hemiſphærii æqualis ſemicirculo BCMB. Sed, per conſt. ABLC ſuperf. æqualis eſt ſuperf. BQM. Ergo feneſtra BLC æqualis lunulæ BCMQB.

Videatur Num. LXXIII.

No. LIII.

SOLUTIO PROBLEMATIS DE MINIMO CREPUSCULO,

Per JAC. BERNOULLIUM.

Communicata in litteris, Baſileæ, die 20. Julii, 1692, *datis.*

NOtum, Crepuſcula maxime diuturna quidem in ſolſtitio æſtivo contingere; breviſſima vero, non in hyberno, ſed medio quodam inter hoc ſolſtitium & æquinoctium tempore, de quo definiendo nunc agitur. Problema autem ex eorum numero eſt,

Digitized by Google

No.LIII. eſt, in quibus utilitas cum inveniendi difficultate conjungitur; unde multis magni nominis Geometris ſubinde quidem, at fruſtra, * tentatum fuit: nec mirum; obſtat enim inſuperabilis calculi moleſtia, devoranda iis qui illud communi more aggrediuntur: ſed nec etiam per methodum indiviſibilium, promiſcue & ſine delectu adhibitam, quæſitum facile quis conſequetur: peculiaris via eſt, qua dextre & commode ſolvatur, quam ſi quis init, totam difficultatem in unica & ſimplici proportione trigonometrica terminari comperiet, quæ talis: *Ut Sinus totus ad Tangent. 9 grad. Sic Sinus Elevationis Poli ad Sinum quæſitæ Declinationis Auſtralis, quam Sol tempore minimi Crepuſculi obtinet.*

Eo itaque Problema impeditiſſimum redactum videmus, ut poſthac in vulgaria ſyſtemata Aſtronomica referri, & ſimpliciſſimis quibuſque Problematibus connumerari valeat.

* Imo, niſi fallor, jam anno 1542 id Problema fuit a P. NONNIO legitime ſolutum, in Tractatu de *Crepuſculis*. Librum quidem reperire non potui; Sed exſtat ad calcem *Commentarii in Sphæram J. DE SACRO-BOSCO* per *Chr.* CLAVIUM [utor Edit. A. 1608] Digreſſio de *Crepuſculis*, cujus Auctor in Proœmio profitetur, ſe NONNII librum in compendium duntaxat redegiſſe. Hujus autem Digreſſionis Prop. XXII. docet reperire Punctum Eclipticæ in quo Sol breviſſimum efficit Crepuſculum, ejuſque Crepuſculi magnitudinem definire. Etſi vero non incidit in Analogiam tam ſimplicem, quam ea eſt quæ hic proponitur, legitimam tamen ſolutionem eſſe negari nequit, quæque facile ad iſtam reducitur.

N°. LIV.

N°. LIV.

POSITIONUM ARITHMETICARUM DE SERIEBUS INFINITIS, Earumque SUMMA FINITA:

Quas,

Præſide

JACOBO BERNOULLI,
Math. P. P. & Facult. Art. p. t. Dec.

defendit

HIERONYMUS BECKIUS, Baſil.

Ad diem 18. *Novemb. M. DC. XCII.*

Editæ primum
BASILEÆ,
1692.

Digitized by Google

Digitized by Google

POSITIONUM DE SERIEBUS INFINITIS

Pars altera.

C*UM ea, quæ de* Seriebus infinitis, *ante hoc triennium & quod excurrit, ſpeculati fuimus, uni etiamnum alterive paginæ commaculandæ ſufficerent; placuit* Primæ *de illis* Diſputationi * Secundam *hanc attexere, quam ex abrupto ordior, continuatis Propoſitionum numeris, ut eo commodius earum citatio peragatur.* No. LIV.

* N°. XXXV.

No. LIV.

XVIII.

Invenire ſummam ſeriei infinitæ reciprocæ numerorum Trigonalium, Pyramidalium, Trianguli-Pyramidalium, Pyramidi-Pyramidalium, & figuratorum altioris cujuſvis gradus in infinitum: atque infinitarum ſummarum ſummam (a).

1. Quemadmodum ſi a ſerie fractionum harmonice progreſſionalium, hoc eſt, ſerie reciproca numerorum naturalium A, eadem multata primo termino ſubtrahatur, naſcitur ſeries fractionum, quarum numeratores ſunt *unitates*, denominatores *Trigonalium dupli*; ut patet ex demonſtr. XV. * Ita ſi a ſerie reciproca Trigonalium B, eadem truncata primo termino ſubducatur, exoritur ſeries fractionum, quarum numeratores progrediuntur juxta numeros naturales 2, 3, 4, 5, &c. ſed quæ reducuntur ad fractiones, quarum omnium numeratores ſunt *binarii*, denominatores vero *Pyramidalium tripli*; unde ipſa ſeries ad ſeriem reciprocam Pyramidalium C, ut $\frac{2}{3}$ ad 1. Pariter ſi a ſerie hac reciproca Pyramidalium, ipſamet mutilata primo termino ſubducatur, relinquitur ſeries fractionum, quarum numeratores progrediuntur juxta numeros Trigonales 3, 6, 10, 15, &c. ſed quæ reduci poſſunt ad alias, quarum numeratores omnes ſunt *ternarii*, denominatores vero *Trianguli-pyramidalium quadrupli*, unde ipſa ſeries ad ſeriem reciprocam Trianguli-pyramidalium D, ut $\frac{3}{4}$ ad 1: Et ſic deinceps in infinitum. Quocirca cum ſingulæ hæ per ſubductionem genitæ ſeries, quarum numeratores ſunt unitatum, denominatores figuratorum multipli, per Ax. 3. æquipolleant unitati, ipſæ figuratorum ſeries reciprocæ ordine dabunt ſummas, ut ſequitur:

A. Natur. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ &c. $=\frac{1}{0}=1\frac{1}{0}$, per XVI.

B, Tri-

(*) Vid. Not. (*c*) Prop. ſeq. * pag. 388.

Digitized by Google

B. Trigon. $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}$ &c. $=\frac{2}{1}=1\frac{1}{1}$, per XV. No.LIV.

C. Pyramid. $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}$ &c. $=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.

D. Triang.Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}$ &c. $=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$.

E. Pyr. Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}+\frac{1}{126}+\frac{1}{252}$ &c. $=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$.

2. Summæ hæ a ſecunda ſerie B ordine collectæ ſunt $1\frac{1}{1}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, &c. unde ſumma ſummarum eſt $1\frac{1}{1}+1\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}+1\frac{1}{4}+$ &c. quæ infinita eſt: quin & demtis ſingularum ſerierum primis terminis ſeu unitatibus, ſumma fit $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ &c. quæ itidem infinita exiſtit, per XVI: at demtis inſuper ſecundis terminis $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+$ &c. ſumma evadit finita & æqualis $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, per Axiom. 3.

XIX.

Invenire ſummam ſeriei finitæ reciprocæ Trigonalium, Pyramidalium, Trianguli-Pyramidalium, Pyram. Pyramidalium, & figuratorum altioris cujuſvis gradus in infinitum.

Poſito in qualibet ſerie numero terminorum n, poſtremi termini in ſeriebus directis numerorum Naturalium, Trigonalium, Pyramidalium, &c. per ea quæ demonſtrabuntur alibi (b), ſunt ordine

(b) Seriei Naturalium differentia prima eſt 1, reliquæ evaneſcunt. Ergo, per ea quæ demonſtrata ſunt N°. XXXV. Not. (*b*). pag. 389. Terminus generalis Seriei Naturalium ab unitate incipientis eſt $1+(x-1).1 = x$.

Seriei Trigonalium terminus primus ſit $=1$, prima different. primarum erit 2, prima tertiarum $=1$, reliquæ nullæ ſunt. Ergo terminus generalis $1+(x-1).2+(x-1).(x-2):2=(xx+x):2=x.(x+1):2$

Seriei Pyramidalium terminus primus $=1$, prima diff. primarum $=3$, prima ſecundarum $=3$, prima tertiarum $=1$, ulteriores nulleſcunt. Ergo Terminus generalis eſt $1+(x-1).3+\frac{x-1.x-2}{1.\ 2}.3+\frac{x-1.x-2.x-3}{1.\ 2.\ 3}.1=\frac{x.x+1.x+2}{1.\ 2.\ 3}$;

Eodem modo Seriei Trigono-Pyrami-

No.LIV. ordine hi, qui ſequuntur: (denotantibus hic & ubique punctulis continuam multiplicationem quantitatum, quibus interſeruntur.)

$$n,\ \frac{n.\overline{n+1}}{1.\ 2},\ \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.\ 2.\ 3},\ \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4},\ \&c.$$

& qui hos immediate excipiunt, ſunt iſti:

$$n+1,\ \frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.\ 2},\ \frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1.\ 2.\ 3},\ \frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}.\overline{n+4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4},\ \&c.$$

ac propterea erunt ultimi termini in eorundem ſeriebus reciprocis iſti:

$$\frac{1}{n},\ \frac{1.\ 2}{n.\overline{n+1}},\ \frac{1.\ 2.\ 3}{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}},\ \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}},\ \&c.$$

& qui hos immediate ſequuntur,

$$\frac{1}{n+1},\ \frac{1.\ 2}{\overline{n+1}.\overline{n+2}},\ \frac{1.\ 2.\ 3}{\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}},\ \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}.\overline{n+4}},\ \&c.$$

Jam ſi a qualibet ſerie reciproca eadem ipſa truncata ab initio & aucta in fine uno termino, methodo Prop. XV, ſubtrahatur; ſubducto ſigillatim ſecundo termino a primo, tertio a ſecundo, ſequente ultimum ab ultimo; naſcitur ſeries terminorum totidem, quæ, per ea quæ in præced. Propoſ. dicta ſunt, ſeriei reciprocæ figuratorum gradus ſequentis aut ſubdupla eſt, aut ſubſeſquialtera, aut ſubſeſquitertia, &c. atque inſuper, per obſervata Propoſ. XV, æqualis primo termino minus ſequente ultimum ejus ſeriei, per cujus ſubductionem nata fuit: unde ipſa ſumma ſeriei finitæ reci-

ramidalium terminus primus & primæ differentiarum ad quartas uſque (ulteriores enim nullæ ſunt) ordinatim poſitæ conſtituunt uncias binomii ad quartam poteſtatem elevati, 1, 4, 6, 4, 1. Terminus igitur generalis eſt $1+\frac{x-1}{1}.4+\frac{x-1.x-2}{1.\ 2}.6+\frac{x-1.x-2.x-3}{1.\ 2.\ 3}.4+\frac{x-1.x-2.x-3.x-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4}=\frac{x.x+1.x+2.x+3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$. Et ratio procedendi manifeſta eſt. Hic x nobis eſt, quod Auctori noſtro n.

reciprocæ figuratorum quorumcunque obtinetur facile, ut ſequitur: (c) No. LIV.

B. Trigon. $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ &c. . . . . . . uſque ad $\frac{1.2.}{n.n+1}$

$=\frac{2}{1}-2\times\frac{1}{n+1}=\frac{2}{1}-\frac{2}{n+1}$

C. Pyram. $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}$ &c. . . . . $-\frac{1.2.3}{n.n+1.n+2}$

$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\times\frac{1.2}{n+1.n+2}=\frac{3}{2}-\frac{1.3}{n+1.n+2}$

D. Triang. Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}$ &c. . . . . . . $\frac{1.2.3.4}{n.n+1.n+2.n+3}$

$=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\times\frac{1.2.3}{n+1.n+2.n+3}=\frac{4}{3}-\frac{1.2.4}{n+1.n+2.n+3}$

E. Pyr. Pyr. $\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}$ &c. . . . . $\frac{1.2.3.4.5}{n.n+1.---n+4}$

$=\frac{5}{4}-\frac{5}{4}\times\frac{1.2.3.4}{n+1.---n+4}=\frac{5}{4}-\frac{1.2.3.5}{n+1.---n+4}$

XX. *In-*

(c) Methodo pag. 390 expoſita, invenietur Seriei reciprocæ Trigon. terminum generalem $\frac{1.2}{x.x+1}$ reduci ad $\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}=2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$, unde ſumma ſit $2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{x+1}\right)$;

Seriei recipr. Pyram. terminum generalem $\frac{1.\ 2.\ 3}{x.\ x+1.\ x+2}$ reduci ad $3\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)$, ideoque ſummam eſſe $3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)$ $=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1.x+2}\right)$;

Seriei recipr. Trigono-Pyram. terminum gener. $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.}{x.x+1.x+2.x+3}$ reduci ad $4\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x+1}+\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)$ ſummamque eſſe $4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)=4\left(\frac{1}{3}-\frac{1.\ 2}{x+1.x+2.x+3}\right)$; quæ cum *Bernoullianis* conveniunt, & proceſſum ſatis indicant.

No. LIV. XX.

Invenire ſummam ſeriei infinitæ reciprocæ Trigonalium, Pyramidalium, Triang. Pyramidalium, &c. multatæ terminis initialibus quotlibet: & infinitarum ſummarum ſummam.

1. Summa ſeriei infinitæ integræ Trigonalium, Pyramidalium, Triang. Pyramidalium, &c. eſt $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, &c. per XVIII. Si ex unaquaque ſerie ab initio abſcindantur n termini, ſumma abciſſorum eſt $\frac{2}{1} - \frac{1}{n+1}$, $\frac{3}{2} - \frac{1.\ 3}{n+1.\ n+2}$, $\frac{4}{3} - \frac{1.\ 2.\ 4}{n+1.\ n+2.\ n+3}$, $\frac{5}{4} - \frac{1.\ 2.\ 3.\ 5}{n+1.\ n+2.\ n+3.\ n+4}$, &c. per XIX. Subtracta ergo hac a ſumma omnium, erit ſumma reliquorum $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1.\ 3}{n+1.\ n+2}$, $\frac{1.\ 2.\ 4}{n+1.\ n+2.\ n+3}$, $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 5}{n+1.\ n+2\ n+3.\ n+4}$, &c.

2. Summa ſerierum omnium mutilatarum ſeu nullo, ſeu uno termino eſt infinita; duobus terminis eſt $\frac{3}{2}$, per XVIII. Hinc ſi demas tertios terminos (qui conſtituunt ſeriem trigonalium B truncatam duobus terminis, cujus ſumma per eandem eſt $\frac{2}{3}$) erit reliquorum omnium ſumma $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} = \frac{5}{2.\ 3}$. Hinc denuo ſi quartos terminos auferas (qui formant ſeriem pyramidalium C itidem truncatam duobus terminis, ſummamque proin per præced. efficiunt $\frac{1}{4}$) relinquetur cæterorum omnium ſumma $\frac{5}{6} - \frac{2}{8} = \frac{7}{12} = \frac{7}{3.\ 4}$. Hinc iterum ſi quintos terminos reſeces, exibit cæterorum ſumma $\frac{9}{4.\ 5}$; ſi ſextos, $\frac{11}{5.\ 6}$; ſeptimos, $\frac{13}{6.\ 7}$; &c. adeoque univerſaliter, ſi ex unaquaque ſerie tollantur n termini, erit mutilatarum ita ſerierum omnium ſumma reliqua $\frac{2n-1}{n-1.\ n}$.

Coroll. Series $\frac{2}{n+1} + \frac{1.\ 3}{n+1.\ n+2} + \frac{1.\ 2.\ 4}{n+1.\ n+2.\ n+3} +$

1. 2.

Digitized by Google

$\frac{1.2.3.5}{n+1.n+2.n+3.n+4}$ + &c. ſive, $\frac{2}{1}\times\frac{1}{n+1}+\frac{3}{2}\times\frac{1.2}{n+1.n+2}+$ No. LIV.
$\frac{4}{3}\times\frac{1.2.3}{n+1.n+2.n+3}+\frac{5}{4}\times\frac{1.2.3.4}{n+1\ldots n+4}$ + &c. $=\frac{2n-1}{n-1.n}$; ſingula enim ſeriei hujus membra ſingulas figuratam ſerierum mutilatarum ſummas exprimunt, per 1. part. hujus; adeoque & omnia omnium.

XXI.

Seriei hujus, $\frac{1a}{1.2}+\frac{2a}{1.2.3}+\frac{3a}{1.2.3.4}+\frac{4a}{1.2.3.4.5}+$ &c. *hoc eſt*, $\frac{a}{2}+\frac{a}{1.3}+\frac{a}{1.2.4}+\frac{a}{1.2.3.5}+$ &c. *ſummam invenire.*

Series hæc naſcitur ſubductione ſequentis ſeriei, $\frac{a}{1}+\frac{a}{1.2}+\frac{a}{1.2.3}+\frac{a}{1.2.3.4}+$ &c: multatæ primo termino a ſeipſa integra, methodo Prop. XV, quare ejus ſumma $= a$, primo ſc. termino hujus, per Axioma 5.

COROLL. Hinc $\frac{1}{1.2}+\frac{4}{1.2.3}+\frac{9}{1.2.3.4}+\frac{16}{1.2.3.4.5}+$ &c. ($=$ F $+$ G $+$ H $+$ I $+$ &c.) $=\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+$ &c.

Nam F. $\frac{1}{1.2}+\frac{2}{1.2.3}+\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{4}{1.2.3.4.5}+$ &c. $=\frac{1}{1}$, per XXI.

G. - - $+\frac{2}{1.2.3}+\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{4}{1.2.3.4.5}+$ &c. $=$ F $-\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1.2}$

H. - - - - - - - $+\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{4}{1.2.3.4.5}+$ &c. $=$ G $-\frac{2}{1.2.3}=\frac{1}{1.2.3}$

I. - - - - - - - - - - - $+\frac{4}{1.2.3.4.5}+$ &c. $=$ H $-\frac{3}{1.2.3.4}=\frac{1}{1.2.3.4}$

XXII.

Invenire ſummas ſerierum K, L, M, N, quarum numeratores

X x x 2 ſunt

Digitized by Google

No. LIV. *ſunt arithmetice progreſſionales, denominatores Trigonalium integrorum, aut Quadratorum unitate minutorum quadrata.* (d)

K =

(d) Extendit hæc Propoſ. Methodum pag. 390 ad Series quæ formantur per ſubductionem ſeriei reciprocæ quadratorum, vel cujusvis poteſtatis $[\frac{1}{x^n}]$ a ſe ipſa truncata terminis uno, vel pluribus initialibus.

Reducatur enim fractio, quæ terminum Seriei generalem exprimit, in tot, quot fieri poteſt, fractiones hujus formæ, $A:(x+a)^n + B:(x+b)^n + C:(x+c)^n$. &c. ubi x repræſentat ſucceſſivos terminos progreſſionis arithmeticæ. Et ſi creſcat x per differentiam quæ ſit communis diviſor quantitatum $b-a$, $c-a$, &c., ſitque inſuper $A+B+C$ &c. $=0$, Series erit ſummabilis.

Ex. gr. Seriei K terminus generalis $4(2x+1):xx(x+1)^2$, reducitur ad $A:xx+B:(x+1)^2$; ubi $A=4$, & $B=-4$ dant $A+B=0$, & x creſcendo per unitates alteram conditionem obſervat. Igitur Series K reducitur ad duas ſequentes

$$4\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+----\frac{1}{xx}\right)$$

$$-4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+----\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

quarum ſumma $= 4\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right) =$ quæ, ſi ſit x infinita, reducitur ad 4.

Pariter Seriei L terminus generalis $(x+1):xx(x+2)^2$ reducitur ad $\frac{1}{4}:xx-\frac{1}{4}:(x+2)^2$. Ergo cum binæ conditiones requiſitæ obſerventur, ea ſummari poterit. Reducitur enim Series L ad duas ſequentes

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\&c----\frac{1}{xx}\right)$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}+\&c+\frac{1}{xx}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+2)^2}\right);$$

quæ, ubi x infinita eſt, abit in $\frac{1}{4}\times\frac{5}{4}=\frac{5}{16}$.

Seriei M terminus generalis eſt $x:(4xx-1)^2$. Is reducitur ad $\frac{1}{8}:(2x-1)^2-\frac{1}{8}:(2x+1)^2$. Ergo Series ipſa componitur ex hiſce duabus

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}----+\frac{1}{(2x-1)^2}\right)$$

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{25}------+\frac{1}{(2x+1)^2}\right)$$

quarum ſumma $=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{(2x+1)^2}\right)$ $=(xx+x):2(2x+1)^2$, quæ, poſita x infinita, eſt $=xx:8xx=\frac{1}{8}$.

Denique Seriei N terminus generalis $\frac{1}{16}(2x+1):xx(x+1)^2$, reducitur ad $\frac{1}{16}:xx-\frac{1}{16}:(x+1)^2$. Hujus itaque ſumma $=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)$, quæ, cum x infinita eſt, reducitur ad $\frac{1}{16}$.

Poſſet ulterius extendi hæc Methodus & ad caſus magis compoſitos applicari: ſed Commentatorem oportet brevitatis eſſe memorem.

Digitized by Google

No. LIV.

$$K = \frac{3}{1^2} + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{6^2} + \frac{9}{10^2} + \frac{11}{15^2} + \frac{13}{21^2} + \&c.$$

$$L = \frac{2}{3^2} + \frac{3}{8^2} + \frac{4}{15^2} + \frac{5}{24^2} + \frac{6}{35^2} + \frac{7}{48^2} + \&c.$$

$$M = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{15^2} + \frac{3}{35^2} + \frac{4}{63^2} + \frac{5}{99^2} + \frac{6}{143^2} + \&c.$$

$$N = \frac{3}{8^2} + \frac{5}{24^2} + \frac{7}{48^2} + \frac{9}{80^2} + \frac{11}{120^2} + \frac{13}{168^2} + \&c.$$

Per ſubductionem ſeriei $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \&c.$ mutilatæ primo termino a ſeipſa integra, naſcitur ſeries aliqua; cujus termini ſunt ſubquadrupli terminorum reſpondentium ſeriei K; unde, per Ax. 3, ſeries $K = 4 \times \frac{1}{1^2} = 4$.

Per ſubductionem vero ejuſdem ſeriei mutilatæ duobus primis terminis a ſeipſa integra, oritur ſeries, quæ quadrupla eſt ſeriei L; unde per idem Ax. Series $L = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}\right) = \frac{5}{16}$.

Denique per ſubductionem ſeriei $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c.$ multatæ primo termino a ſeipſa integra, emergit alia, quæ octupla eſt ſeriei M; quare per 3. Ax. ſeries $M = \frac{1}{8} \times \frac{1}{1^2} = \frac{1}{8}$: & propterea duplum ſeriei M, hoc eſt, omnes termini locorum imparium ſeriei $L = \frac{1}{4}$; adeoque reliqui termini ejuſdem ſeriei, hoc eſt, ipſa ſeries $N = \frac{5}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

XXIII.

Invenire ſummas ſerierum Q & R, item V & X, &c. quarum denominatores ſunt termini integri progreſſionis quadruplæ, noncuplæ, &c. numeratores vero termini progreſſionis duplæ, triplæ, &c. unitate tum minuti, tum aucti.

No. LIV. Operatio talis:

$$\left.\begin{aligned} O &= \tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\&c. = 2 \\ P &= \tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{64}+\tfrac{1}{256}+\&c. = \tfrac{4}{3} \end{aligned}\right\} \text{per Cor. VIII.}$$

$$\left.\begin{aligned} Q &= \tfrac{1-1}{1}+\tfrac{2-1}{4}+\tfrac{4-1}{16}+\tfrac{8-1}{64}+\tfrac{16-1}{256}+\&c. \\ \text{ſeu } & \tfrac{0}{1}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{16}+\tfrac{7}{64}+\tfrac{15}{256}+\&c. \end{aligned}\right\} = O-P = 2-\tfrac{4}{3} = \tfrac{2}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} R &= \tfrac{1+1}{1}+\tfrac{2+1}{4}+\tfrac{4+1}{16}+\tfrac{8+1}{64}+\tfrac{16+1}{256}+\&c. \\ \text{ſeu } & \tfrac{2}{1}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{5}{16}+\tfrac{9}{64}+\tfrac{17}{256}+\&c. \end{aligned}\right\} = O+P = 2+\tfrac{4}{3} = 3\tfrac{1}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{27}+\tfrac{1}{81}+\&c. = \tfrac{3}{2} \\ T &= \tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{81}+\tfrac{1}{729}+\tfrac{1}{6561}+\&c. = \tfrac{9}{8} \end{aligned}\right\} \text{per Corol. VIII.}$$

$$\left.\begin{aligned} V &= \tfrac{1-1}{1}+\tfrac{3-1}{9}+\tfrac{9-1}{81}+\tfrac{27-1}{729}+\tfrac{81-1}{6561}+\&c. \\ \text{ſeu } & \tfrac{0}{1}+\tfrac{2}{9}+\tfrac{8}{81}+\tfrac{26}{729}+\tfrac{80}{6561}+\&c. \end{aligned}\right\} = S-T = \tfrac{3}{2}-\tfrac{9}{8} = \tfrac{3}{8}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= \tfrac{1+1}{1}+\tfrac{3+1}{9}+\tfrac{9+1}{81}+\tfrac{27+1}{729}+\tfrac{81+1}{6561}+\&c. \\ \text{ſeu } & \tfrac{2}{1}+\tfrac{4}{9}+\tfrac{10}{81}+\tfrac{28}{729}+\tfrac{82}{6561}+\&c. \end{aligned}\right\} = S+T = \tfrac{3}{2}+\tfrac{9}{8} = 2\tfrac{5}{8}$$

Idem inveniri poteſt, reſolvendo ſeries propoſitas Q, R; V & X, methodo Prop. XIV. Exempli loco eſto ſeries

Q=

Digitized by Google

No. LIV.

$$Q = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{7}{64} + \frac{15}{256} + \&c. = Y + Z + \Pi + \Sigma + \&c.$$

$$\left.\begin{array}{l} Y = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \&c. = \text{per Coroll. VIII. } \frac{1}{3} \\ Z = \cdot + \frac{2}{16} + \frac{2}{64} + \frac{2}{256} + \&c. = 2\,Y - \frac{2}{4} = \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{1}{6} \\ \Pi = \cdots\cdots \frac{4}{64} + \frac{4}{256} + \&c. = 2Z - \frac{4}{16} = \frac{2}{6} - \frac{4}{16} = \frac{1}{12} \\ \Sigma = \cdots\cdots\cdots + \frac{8}{256} + \&c. = 2\Pi - \frac{8}{64} = \frac{2}{12} - \frac{8}{64} = \frac{1}{24} \\ \&c. = \cdots\cdots\cdots \&c. \cdots\cdots\cdots\cdots = \&c. \end{array}\right\} \frac{2}{3} \text{ per Coroll. VIII.}$$

XXIV.

In ſerie quavis infinita, cujus numeratores omnes ſunt æquales; denominatores, vel numeri naturales, vel eorundem quadrata, cubi, aut alia quæcunque poteſtas: ſumma terminorum omnium in locis imparibus eſt ad ſummam omnium in paribus, ut ſimilis poteſtas binarii unitate multata ad unitatem.

Puta in numeris naturalibus, ut 1 ad 1; in quadratis ut 3 ad 1; in cubis ut 7 ad 1; in biquadratis ut 15 ad 1; &c.

Modus inveſtigandi talis:

In Numeris Naturalibus:

Series iſta $\frac{1}{1} \mp \frac{1}{2} \mp \frac{1}{3} \mp \frac{1}{4} \mp \frac{1}{5} \mp \frac{1}{6} \mp \frac{1}{7} \mp \frac{1}{8} \mp$ &c. æquatur ſuis partibus; videl. ſeriebus $A \mp B \mp C \mp D \mp$ &c.

$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \&c. = \frac{2}{1} \\ B = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \&c. = \frac{2}{3} \\ C = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \&c. = \frac{2}{5} \\ D = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} + \&c. = \frac{2}{7} \end{array}\right\} \text{per Coroll. VIII.}$$

Eſt ergo $\frac{2}{1} \mp \frac{2}{3} \mp \frac{2}{5} \mp \frac{2}{7} \mp$ &c. æqualis, ideoque $\frac{1}{1} \mp \frac{1}{3} \mp \frac{1}{5} \mp \frac{1}{7}$ &c. dimidia ſeriei propoſitæ $\frac{1}{1} \mp \frac{1}{2} \mp \frac{1}{3} \mp \frac{1}{4} \mp$ &c. hoc eſt, ſumma termino-

N°.LIV. minorum in locis imparibus dimidia ſeriei totius; & proinde æqualis ſummæ reliquorum $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+$ &c.

Patet hinc rurſum veritas Prop. XVI. cum enim $\frac{1}{1}>\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}>\frac{1}{6}$, &c. erit $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+$ &c. $>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+$ &c. cui tamen æqualis modo oſtenſa eſt; quæ utique conciliari nequeunt, niſi ſumma utriuſque ſeriei ſtatuatur infinita, hoc eſt, tanta ut quæ inter illas intercedit differentia rationem æqualitatis deſtruere non poſſit.

In Numeris Quadratis.

Series $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+$ &c. $=E+F+G+$ &c.

$$\left.\begin{aligned}E&=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\text{\&c.}=\frac{4}{3.1}\\F&=\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{144}+\frac{1}{576}+\text{\&c.}=\frac{4}{3.9}\\G&=\frac{1}{25}+\frac{1}{100}+\frac{1}{400}+\frac{1}{1600}+\text{\&c.}=\frac{4}{3.25}\\H&=\frac{1}{49}+\frac{1}{196}+\frac{1}{784}+\frac{1}{3136}+\text{\&c.}=\frac{4}{3.49}\end{aligned}\right\}\text{per Cor. VIII.}$$

Eſt ergo $\frac{4}{3.1}+\frac{4}{3.9}+\frac{4}{3.25}+\frac{4}{3.49}+$ &c. $=\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ &c. adeoque prioris ſubſeſquitertia, hoc eſt, $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+$ &c. æqualis $\frac{3}{4}$ poſterioris, hoc eſt, termini omnes locorum imparium in ſerie propoſita conſtituunt tres quartas partes totius ſeriei, & reliqui unam: quare ſumma terminorum illorum ad ſummam horum, ut 3 ad 1. Eadem inveſtigandi methodus obſervetur in reliquis poteſtatibus.

Aliter

Aliter & univerſaliter ita:

$$x = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} \text{ \&c.}$$

$$y = \frac{1}{1^m} \quad + \frac{1}{3^m} \quad + \frac{1}{5^m} \quad \text{\&c.}$$

$$x - y = + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} \text{ \&c.}$$

$$= \frac{1}{2^m 1^m} + \frac{1}{2^m 2^m} + \frac{1}{2^m 3^m} \text{ \&c.}$$

$$2^m x - 2^m y = + \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} \text{ \&c.} = x$$

unde $2^m x - x = 2^m y$, & $y = x - x : 2^m$, & $x - y = x : 2^m$,

ergo $y : x - y = x - \frac{x}{2^m} : \frac{x}{2^m} = 1 - \frac{1}{2^m} : \frac{1}{2^m} = 2^m - 1 : 1$. (e)

Schol.

(e) Manca, ut verum fatear, mihi videtur hæc Demonſtratio, & quæ Auctorem, in Scholio ſequenti, in errorem induxit. Ubi ponit $2^m(x-y) = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} +$ &c. $= x$, non animadvertit Seriei x terminos eſſe duplo plures terminis ſeriei $2^m(x-y)$. Scilicet, ſi Series x terminatur ad $\frac{1}{\infty^m}$, Series $2^m(x-y)$ terminatur ad $\frac{1}{(\frac{1}{2}\infty)^m}$. Non ergo poni debent æquales hæ Series, niſi conſtet totam Seriem x primæ ſuæ medietati æqualem eſſe, hoc eſt, poſteriorem medietatem prioris reſpectu evaneſcere. Nam ſi prior medietas ad totam Seriem ſit ut r ad s, erit $2^m(x-y) : x = r : s$; unde eſt $y : x - y = 2^m s - r : r$, quæ ratio redit ad $2^m - 1 : 1$ (ut vult Auctor noſter) tunc tantum quando $r = s$. Ut abſolvatur itaque Demonſtratio, neceſſe ut oſtendamus quænam eſt ratio $r : s$. Ea vero ratio eſt æqualitatis, quotieſcunque m numerus eſt unitate major. Nam ſi concipiatur, ut in Cor. 4. Prop. XVI. pag. 394, hyperboloides DEF [*Tab.*XX. *fig.*1.] inter aſymptotos AC, AG, ejus naturæ, ut ſit ubique $CD = 1 : AC^m$, & $BE = 1 : AB^m$, & fingatur AC diviſa in par-

No. LIV. SCHOL. Liquet hinc, quod ſummæ duarum ſerierum (etiamſi incognitæ) poſſint ad ſe invicem habere rationem cognitam. Vid. Prop. XVII. ſub fin. Extendit ſe autem demonſtratio ad poteſtatum radices, ſive ad poteſtates fractas, non minus ac integras: ſic ex. gr. colligimus, in ſerie $\frac{1}{\surd 1}+\frac{1}{\surd 8}+\frac{1}{\surd 27}+\frac{1}{\surd 64}+\frac{1}{\surd 125}+$ &c. (ubi denominatores ſunt cuborum radices quadratæ) omnes terminos locorum imparium ad omnes parium eſſe, ut $\surd 8 - 1$ ad 1. Mirabile vero eſt, quod in ſerie $\frac{1}{\surd 1}+\frac{1}{\surd 2}+\frac{1}{\surd 3}+\frac{1}{\surd 4}+$&c. (cujus ſumma infinita eſt, ceu major ſerie $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ &c. ob denominatores minores) termini locorum imparium ad terminos parium juxta regulam inveniuntur habere rationem $\surd 2 - 1$ ad 1, minoris ſc. ad majus; cum tamen illi cum his ſigillatim collati

tes innumeras æquales; quæ ſumantur pro unitatibus, repræſentabit ſpatium ACDFG Seriem integram $x = \frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}$ &c. Capiatur $AB = \frac{1}{2}AC$, & repræſentabit ſpatium ABEFG hujus ſeriei medietatem primam, ſpatium vero BEDC medietatem poſtremam. Ratio igitur $r : s$ eadem eſt, quæ ſpatii ABEFG ad ſpatium ACDFG. Sed quælibet methodus quadraturarum, aut ipſa calculi integralis principia docent ſpatium ABEFG eſſe infinitum, quando $m > 1$. Spatium vero BEDC finitum eſt. Igitur, quando $m > 1$, ſpatii ABEFG ad ſpatium ACDFG ratio, vel ratio $r : s$, eadem quæ infiniti ad ſe ipſum finito auctum, hoc eſt, ratio $r : s$ eſt æqualitatis ratio. Quare, in eo caſu, verum eſt eſſe y ad $x - y$ ut $2^m - 1$ ad 1.

Sed, quando $m < 1$, ſpatium $ABEFG = \frac{1}{1-m} AB^{1-m}$, & ſpatium $ACDFG = \frac{1}{1-m} AC^{1-m}$. Quare hæc ſpatia ſunt inter ſe ut AB^{1-m} ad AC^{1-m}, vel ut 1 ad 2^{1-m}. Igitur $r : s = 1 : 2^{1-m}$, & $y : x - y \,[2^m s - r : r] = 2^m . 2^{1-m} - 1 : 1 = 2 - 1 : 1 = 1 : 1$. Quotieſcunque igitur $m < 1$, hoc eſt, quando loco poteſtatum, Series eſt radicum reciproca, toties ſumma terminorum parium æqualis eſt ſummæ imparium. Non ſatis caute venditavit Auctor, in Scholio quod mox ſequitur, Regulam ſuam pro univerſali, nec locus eſt Paradoxo, quod ibidem tanquam verum, in medium affert.

collati iiſdem manifeſto ſint majores : cujus ἰνασθροφαιείας ratio- No. LIV.
nem, etſi ex infiniti natura finito intellectui comprehendi non poſſe videatur, nos tamen ſatis perſpectam habemus. Idem vero de ſimilibus ſeriebus aliis, quæ infinitam ſummam habent, intelligendum.

XXV.

Series Theſis X, $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}+\frac{a+2c}{b+2d}-\frac{a+3c}{b+3d}$; *& alia harmonica terminorum totidem & denominatorum eorundem,* $\frac{f}{b}-\frac{f}{b+d}+\frac{f}{b+2d}-\frac{f}{b+3d}$; *ſignis + & — alternatim ſe excipientibus, ſumtoque* $f=a-\frac{bc}{d}$; *æquales ſummas habent.*

Etenim ſubtrahendo terminos locorum parium a terminis imparium, provenit eadem utrobique ſeries, $\frac{ad-bc}{bb+bd}+\frac{ad-bc}{bb+5bd+6dd}$, ſive $\frac{df}{bb+bd}+\frac{df}{bb+5bd+6dd}$, &c.

Eſto ex.gr.ſeries Th.X. $\frac{3}{1}-\frac{5}{2}+\frac{7}{3}-\frac{9}{4}+\frac{11}{5}-\frac{13}{6}$, poſitoq; $f=3-2=1$,

ſeries harmonica, $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$, erit

ſumma utriuſque $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}$, per ſaltum excerpta ex ſerie Q, Th. XV.

XXVI.

Seriei infinitæ fractionum K (quarum denominatores creſcunt progreſſione geometrica, hoc eſt, ſequentes præcedentium ſunt æque-multiplices exacte, numeratores vero præcedentium æque-multiplices aucti vel minuti communi quodam numero,) ſummam ultimumve terminum reperire.

No.LIV. ($\pm$ denotat vel ubique + vel ubique —)

$$K = \frac{a}{c} + \frac{ab \pm d}{cm} + \frac{abb \pm bd \pm d}{cmm} + \frac{ab^3 \pm bbd \pm bd \pm d}{cm^3} + \frac{ab^4 \pm b^3d \pm bbd \pm bd \pm d}{cm^4} + \&c.$$

1. Summa ſeriei invenitur, reſolvendo illam, methodo Prop. XIV, in ſeries fractionum pure proportionalium L + M + N + O + P + &c.

$$\left.\begin{array}{lll}
L = \frac{a}{c} + \frac{ab}{cm} + \frac{abb}{cmm} + \frac{ab^3}{cm^3} + \frac{ab^4}{cm^4} + & \&c. = + \frac{am}{(m-b)c} \\
M = \cdot \pm \frac{d}{cm} \pm \frac{bd}{cmm} \pm \frac{bbd}{cm^3} \pm \frac{b^3d}{cm^4} & \&c. = \pm \frac{d}{(m-b)c} \\
N = \cdot\cdot\cdot\cdot \pm \frac{d}{cmm} \pm \frac{bd}{cm^3} \pm \frac{bbd}{cm^4} & \&c. = \pm \frac{d}{(m-b)mc} \\
O = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \pm \frac{d}{cm^3} \pm \frac{bd}{cm^4} & \&c. = \pm \frac{d}{(m-b)mmc} \\
P = \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \pm \frac{d}{cm^4} & \&c. = \pm \frac{d}{(m-b)m^3c} \\
\&c. & \&c.
\end{array}\right\} \text{per Cor. VIII.}$$

Summæ ſerierum M, N, O, P, &c. novam progreſſionem geometricam conſtituunt, cujus ſumma, per Coroll. VIII, eſt $md : (m-1)(m-b)c$, quæ ſummæ ſeriei I. $am : (m-b)c$ addita vel ſubtracta efficit $(amm - am \pm md) : (m-1)(m-b)c$ ſummam omnium ſerierum L, M, N, &c. hoc eſt, ipſius ſeriei propoſitæ K.

2. Obſervandum, ſi $m > b$, ſummam eſſe finitam, adeoque ultimum ſeriei terminum evaneſcere, vid. Cor. XIV.

Sin $m < b$. & ſumma infinita eſt, ultimus quoque terminus eſt infinitus; tum enim ſingulæ progreſſiones geometricæ L, M, N, &c. ſunt creſcentes: confer Prop. V.

At exiſtente $m = b$, ſumma quidem infinita eſt, ſed poſtremus terminus finitus: tum enim ſurrogato m in locum b, ſecundus

Digitized by Google

dus terminus fit $(am \pm d) : cm$, hoc eſt, $a : c \pm d : cm$: tertius No.LIV.
$(amm \pm md \pm d) : cmm$, hoc eſt, $a : c \pm d : cm \pm d : cmm$: quartus $(am^3 \pm mmd \pm md \pm d) : cm^3$, hoc eſt, $a : c \pm d : cm \pm d : cmm \pm d : cm^3$: atque ita poſtremus $a : c \pm d : cm \pm d : cmm \pm d : cm^3 \pm d : cm^4$, &c. in infinitum: unde patet, terminum infiniteſimum reſolvi in $a : c \pm$ ſerie infinitorum geometrice progreſſionalium in ratione m ad 1, quorum ſumma per Cor. VIII. eſt $d : (m-1)c$, quæ ipſi $a : c$ addita vel ſubtracta efficit terminum infiniteſimum $(am - a \pm d) : (m - 1)c$, cujus numerator differentiam numeratorum primi & ſecundi termini, uti & denominator denominatorum eorundem differentiam exprimit: quare cum ex Prop. X manifeſtum ſit, terminum ultimum hujus progreſſionis

$$Q = \frac{a}{c},\ \frac{am \pm d}{cm},\ \frac{2am - a \pm d}{2cm - c},\ \frac{3am - 2a \pm 3d}{3cm - 2c},\ \frac{4am - 3a \pm 4d}{4cm - 3c},\ \&c.$$

$$\text{ſive}\quad \frac{a}{c},\ \frac{a}{c} \pm \frac{d}{cm},\ \frac{a}{c} \pm \frac{2d}{2cm - c},\ \frac{a}{c} \pm \frac{3d}{3mc - 2c},\ \frac{a}{c} \pm \frac{4d}{4cm - 3c},\ \&c.$$

itidem eſſe $(am - a \pm d) : (m - 1)c$ ſive $a : c \pm d : (m - 1)c$; ſequitur in utraque progreſſione K & Q, primis duobus terminis exiſtentibus iiſdem, ultimos quoque eſſe pares, quamvis incrementa vel decrementa prioris magis ſubitanea ſint, quandoquidem ejus termini non niſi per ſaltum ex poſteriore ſunt excerpti: Invenio enim, quod memorabile eſt, tertium terminum ſeriei K convenire cum termino $m + 2$, quartum cum $mm + m + 2$, quintum cum $m^3 + mm + m + 2$, ſextum cum $m^4 + m^3 + mm + m + 2$ ſeriei Q, & ſic deinceps (f); uti patere poterit ex ſubjunctis ſeriebus, ubi a valet 2, c 3, b vel m 3, & d 1.

(f) Seriei K terminus generalis eſt $\frac{a}{c}\left(\frac{b}{m}\right)^z \pm \frac{d}{c} \times \frac{b^{z-1} + b^{z-2} + b^{z-3} \cdots 1}{m^z}$ [pono z eſſe numerum terminorum qui quæſitum præcedunt] $= \frac{a}{c}\left(\frac{b}{m}\right)^z \pm \frac{d}{c} \times \frac{(b^z - 1) : (b - 1)}{m^z} =$ [quando $m = b$] $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{c} \times \frac{(m^z - 1) : (m - 1)}{m^z}$.

Seriei Q terminus, quem x termini

No. LIV. $K = \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{22}{27}, \frac{67}{81}, \frac{202}{243}$, &c. ultimus $\frac{5}{6}$.

$Q = \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{12}{15}, \frac{17}{21}, \frac{22}{27}, \frac{27}{33}, \frac{32}{39}, \frac{37}{45}, \frac{42}{51}, \frac{47}{57}, \frac{52}{63}, \frac{57}{69}, \frac{62}{75}, \frac{67}{81}$, &c. ultimus $\frac{5}{6}$.

Intellige vero, quæ dicta ſunt de ſumma ultimoque termino ſeriei K, ſi numeratores præcedentium ſunt æque-multiplices aucti communi numero d, vel diminuti quidem eodem numero, at inſuper $ab > a + d$. Nam ſi ſit $ab = a + d$, æquivalebunt ſinguli numeratores ipſi a, ſummaque ſeriei fiet finita, nempe $am : (m - 1)c$, & ultimus terminus evaneſcet, ſive m exiſtat $<$ vel $=$ ipſi b.

XXVII.

Si dati cujuslibet numeri radix quadrata ducatur in ipſum numerum, & producti radix quadrata denuo ducatur in eundem, & producti hujus radix iterum iterumque; idque fiat continuo in infinitum: erit radix producti ultimi æqualis ipſi dato numero: [puta, ſi datus numerus vocetur a, erit $\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a \text{ \&c.})})})})})}$ $= a$].

Ponatur enim $x = \sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a \text{ \&c.})})})})}$ erit $xx = a\sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a \text{ \&c.})})})}$ & $xx : a = \sqrt{(a\sqrt{(a\sqrt{(a \text{ \&c.})})})} = x$; proinde $xx = ax$, & $x = a$. Q. E. D.

XXVIII.

Si dati numeri cujuslibet radix quadrata addatur ipſi dato numero, & aggregati radix quadrata denuo addatur eidem, & aggregati hujus radix iterum iterumque; idque fiat continuo in infinitum: radix

mini præcedunt eſt $\frac{a}{c} \pm \frac{d}{c} \times \frac{x}{(m-1)x+1}$.

Fiat terminus $z + 1$ Seriei K æqualis termino $x + 1$ Seriei Q, & demtis utrinque æqualibus $a : c$, ac dividendo per $d : c$, relinquetur $(m^z - 1) : m^z (m - 1) = x : (m - 1)x + 1$; unde habetur $x = (m^z - 1) : (m - 1) = m^{z-1} + m^{z-2} + m^{z-3} \ldots\ldots + 1$ adeoque $x + 1 = m^{z-1} + m^{z-2} + m^{z-3} \ldots\ldots + 2$.

radix aggregati ultimi radicem dati numeri quarta parte unitatis No.LIV.
aucti dimidia unitate ſuperabit. [puta $\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\&c.)})})})} = \frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+a)}$.]

Poſito enim $x = \sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\&c.)})})}$ erit $xx = a + \sqrt{(a+\sqrt{(a+\&c.)})}$ & $xx - a = \sqrt{(a+\sqrt{(a+\sqrt{(a+\&c.)})})} = x$: proinde $xx = x + a$, & $x = \frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+a.)}$ Q. E. D.

XXIX.

Datis duobus numeris quibuſvis, ſi radix quadrata unius ducatur in alterum, & producti radix quadrata in primum, & hujus producti radix in alterum; atque ita ſemper productorum radices ducantur alternatim in datorum alterum; idque continuetur in infinitum: erit radix producti ultimi æqualis alterutri duorum mediorum proportionalium inter duos datos numeros [puta ſi dati numeri dicantur a & b, erit $\sqrt{(a\sqrt{(b\sqrt{(a\sqrt{(b\sqrt{(a\sqrt{(b\ \&c.)})})})})})} = \sqrt[3]{aab.}$]

Fſto namque $x = \sqrt{(a\sqrt{(b\sqrt{(a\sqrt{(b.\ \&c.)})})})}$, erit $xx = a\sqrt{(b\sqrt{(a\sqrt{(b\ \&c.)})})}$ & $xx : a = \sqrt{(b\sqrt{(a\sqrt{(b\ \&c.)})})}$ & $x^4 : aa = b\sqrt{(a\sqrt{(b\ \&c.)})}$ & $x^4 : aab = \sqrt{(a\sqrt{(b\ \&c.)})} = x$; proinde $x^4 = aabx$, & $x^3 = aab$, & $x = \sqrt[3]{aab}$. Q. E. D.

XXX.

Datis duobus numeris quibuſvis, ſi radix cubica producti ex utroque ducatur in eorum primum, & producti radix quadrata ducatur in productum ex utroque. & hujus producti radix cubica denuo in eorum primum; & ſic alternatim radices cubicæ & quadratæ ducantur in eorum primum & productum ex utroque: erit radix producti ultimi æqualis primo vel ſecundo quatuor mediorum proportionalium inter duos datos [puta $\sqrt{(a\sqrt[3]{(ab\sqrt{(a\sqrt[3]{(ab,\ \&c.)})})})} = \sqrt[5]{a^4b}$, & $\sqrt[3]{(ab\sqrt{(a\sqrt[3]{(ab\sqrt{(a\ \&c.)})})})} = \sqrt[5]{a^3bb}$.]

XXXI.

Datis duobus numeris quibuſvis, ſi radix quadrata ſecundi ducatur in primum, & producti radix quadrata iterum in primum, producti vero hujus radix in ſecundum, & hujus producti radix denuo in primum, & ſic alternatim productorum radices multiplicen-

tur.

Digitized by Google

No.LIV. *tur, bis in primum, ſemel in ſecundum, erit radix producti ultimi* $=$ *primo, ſecundo, vel quarto ſex proportionalium inter duos datos* [puta $\sqrt{}(a\sqrt{}(a\sqrt{}(b\sqrt{}(a\sqrt{}(a\sqrt{}(b$ &c.$)))))) = \sqrt[7]{a^6 b}$, & $\sqrt{}(a\sqrt{}(b\sqrt{}(a\sqrt{}(a\sqrt{}(b\sqrt{}(a\sqrt{}(a$ &c.$))))))) = \sqrt[7]{a^5 bb}$, & $\sqrt{}(b\sqrt{}(a\sqrt{}(a\sqrt{}(b\sqrt{}(a\sqrt{}(a$ &c.$)))))) = \sqrt[7]{a^3 b^4}$.]

XXXII.

Datis duobus numeris quibuſvis p *&* q, *ſi tertius quicunque ductus in* q, *addatur ipſi* pp, *& ex radice ſummæ ſubtrahatur* p, *& reſidui radix in* q *ducta addatur ipſi* pp, *& ex radice ſummæ denuo ſubtrahatur* p, *& ſic deinceps in infinitum, erit radix ultimi reſidui, puta* $\sqrt{}(-p+\sqrt{}(pp+q\sqrt{}(-p+\sqrt{}(pp+q\sqrt{}(-p+$&c.$)))))$ *radix æquationis cubicæ* $x^3 = -2px+q$.

XXXIII.

Iiſdem poſitis, quæ in præcedente, ſi ſubtractio ipſius p *vertatur in additionem, erit radix aggregati ultimi, puta* $\sqrt{}(+p+\sqrt{}(pp+q\sqrt{}(+p+\sqrt{}(pp+q\sqrt{}($&c.$)))))$ *radix æquationis* $x^3 = +2px+q$.

XXXIV.

Datis duobus numeris p *&* q, *ſi tertius in* q *ductus ſubtrahatur a* pp, *& radix reliqui ad* p *addatur dematurve, & ſumma reliquique radix in* q *ducta ſubducatur a* pp, *& radix reliqui*, &c. *erunt radices ſummæ reſiduique ultimi*, puta $\sqrt{}(p\pm\sqrt{}(pp-q\sqrt{}(p\pm\sqrt{}(pp-q\sqrt{}($&c.$)))))$ *radices æquationis* $x^3 = +2px - q$.

XXXV.

Non ſecus datis tribus numeris p, q, r, *erit* $\sqrt{}(-p+\sqrt{}(pp+r+q\sqrt{}(-p+\sqrt{}(pp+r+q$ &c.$))))$ *radix æquationis biquadraticæ* $x^4 = -2pxx+qx+r$.

Omnes hæ Prop. ad eundem modum demonſtrantur, quo Prop. XXVII, XXVIII, & XXIX; quorſum itaque *κοκκύζειν*!

Sᴄʜᴏʟ. Patet hinc aditus ad inventionem duarum med. proport. & in genere radicum Problematum ſolidorum & hyperſolidorum per ſolas rectas lineas & circulos, quam præſtantiſſimi omnium

Digitized by Google

omnium ſeculorum Geometræ a bis mille retro annis anxie, ſed fruſtra quæſivere. Hanc ego, quoad fieri potuit, per ſeriem conſtructionis in infinitum continuandæ, primus omnium exhibui in *Actis Lipſ.* menſ. Septemb. 1689. * cum nemo ſimile quicquam ſcripto publicaſſet, forte nec animo concepiſſet uſpiam. No. LIV.

Atque hic ſpeculationis de Seriebus infinitis fructus feliciſſimus & nunquam pœnitendus nobis extitit; quem, ut infiniti Numinis benignitati unice acceptum ferimus; ſic eundem, cum qualicunque hoc noſtro exantlato labore, ad majorem ejus gloriam directum & impenſum volumus.

* Supra N°. XXXVII. pag. 411.

ΕΠΙΜΕΤΡΑ.

I.

Datur linea curva infinitis circa centrum gyris convoluta, & tamen finita alicui rectæ æqualis (g).

II.

Poteſt fieri ut curva quædam in ſe redeat inſtar Ellipſis, & tamen in infinitum excurrat inſtar Parabolæ. Talis eſt illa, cujus natura exprimitur per æquationem $ayy = bxx + x^3$ (h).

III. *Nec*

(g) Talem eſſe Spiralem Logarithmicam, demonſtravit Auctor. N°. XLII. p. 443.

(h) Hæc eſt Curva 3ᵗ. ordinis, Newtono ſpecies 68, quam expreſſit figura ſua 73. Ruditer delineatam vide Tab. XX. fig. 2. Ex æquatione curvæ, habente formam hanc $y = \pm x \sqrt{\frac{b+x}{a}}$, manifeſtum eſt, quo magis creſcunt abſciſſæ x poſitivæ, eo magis creſcere ordinatas y, tam poſit. quam negat. Excurrit igitur curva in infinitum ad hanc partem, ſed, ſumendo abſciſſas negativas, æquatio abit in hanc $y = \mp x \sqrt{\frac{b-x}{a}}$. Igitur ſi x excedat b, quantitatis negativæ $b - x$ radix extrahenda, eſſet imaginaria. Quamobrem ordinatæ fiunt imaginariæ ultra abſciſſam $AB = b$, hoc eſt, curva non ulterius extenditur, ſed in ſe ipſam redit.

No. LIV.

III.

Nec abſurdum eſt, unam eandemque numero magnitudinem in pluribus locis diſcretis & ſeparatis ſimul exiſtere. Sic duæ curvæ non obſtante intervallo quo dirimuntur, nonnunquam conſtituunt unam eandemque numero curvam; qualis eſt, quæ exprimitur per $aax - x^3 = ayy$ ([i]).

IV.

Datur aliquod planum interminatum, quod tamen ſit finitum ([k]).

V.

Item aliud quod quidem habeat infinitam aream, ſed rotatum circa axem gignat corpus finitæ magnitudinis ([l]).

VI. *Oſcu-*

([i]) Hæc eſt ſpecies Newtoni 67ª. fig. 70. 71. Vid. Tab. XX. fig. 3. Æquatio curvæ, ſi hanc accipiat formam $y = \pm\sqrt{(ax - x^3 : a)}$, docet, ad partem poſitivam, curvæ ordinatas eſſe reales, quamdiu $x < a$. Poſitiva enim quantitas eſt ſub ſigno radicali. Sed ubi $x > a$, tunc negativa evadit quantitas $ax - x^3 : a$, & ejus radix y imaginaria. Conſtat igitur curva, ex parte poſitiva, ovali ACBD, cujus diameter $AB = a$. Ad partem vero negativam, imaginariæ ſunt ordinatæ $y = \pm\sqrt{(x^3 : a - ax)}$, quamdiu $x < a$, reales ſimul ac $x > a$, & inde creſcentibus x, creſcunt y. Habet igitur Curva, ex parte negativa, formam Parabolæ campaniformis FEG, quæ diſtat ab ovali ACBD, intervallo $AE = a$. Nollem tamen inde concludere unam eandemque numero magnitudinem in pluribus locis diſcretis exiſtere poſſe. Nam qui curvas ACBD, FEG, unam eandemque numero curvam pronunciat, quoniam una eademque æquatio utriuſque naturam exprimit, mihi videtur ſignum cum re ſignificata confundere.

([k]) Tale eſt in hyperbolis, quorum æquatio $x^m y^n = 1$, ſpatium inter ordinatam primariam aſymptoton, & ordinatam quamvis comprehenſum, quoties $m < n$, aut ſpatium inter ordinatam quamvis, axem aſymptoton, & curvam contentum, quoties $m > n$.

([l]) Spatium ABEDC, [Tab. XX. fig. 4] inter hyperbolam *Apollonianam* BE, ordinatam AB, & aſymptotos AC, CD, comprehenſum, magnitudinis licet infinitæ, rotando tamen circa aſymptoton CD, tanquam axem, gignit ſolidum finitæ magnitudinis, quod eſt, nempe, ad ſolidum finitum genitum ex rotatione rectanguli ABFC circa axem CF, ut 2AC ad AB.

Digitized by Google

VI.

Oſculum Curvarum ſimplex duobus contactibus æquipollere, repetito examine per abſurdum deprehendi (*).

VII.

Hic Syllogiſmus, Quoddam animal mente præditum uſu rationis caret: Solus homo eſt animal mente præditum: Ergo, quidam homo uſu rationis caret; *recte concludit*, *quamvis arietare videtur in utramque legem Syllogiſmorum primæ figuræ.*

VIII.

Eſt enim in modo Diſamis *figuræ tertiæ*; *unde liquet*, *enunciationem excluſivam non ſemper æquipollere neganti*, *ſed quandoque converſa univerſali affirmanti.*

IX.

Prima corporum principia, ſtamina, *ſeu* elementa, *ſunt neceſſario ſolida*, *non fluida.*

X.

Si Aer Recipientis ope Antliæ Pneumaticæ ad datum raritatis gradum perducendus ſit, *& quæratur quot hauſtibus*, *ſeu emboli agitationibus integris id conſequi liceat*; *hæc obſervetur Regula*: Logarithmum rationis, quam habet raritas aeris deſiderata ad raritatem aeris naturalis, divide per Logarithmum rationis, quam habet cavitas Recipientis & Antliæ ſimul ad cavitatem ſolius Recipientis; *Indicabit enim quotiens quæſitum agitationum numerum. Intellige*, *ſi Recipiens & Antlia nullibi perfluant.* (*).

XI. *Terra*

(*) Vid. Num. XLVII. pag. 480, & Nos. LV. LVI. LXIV. LXVI.

(*) Singulis emboli agitationibus, aer, qui recipiente ſolum continebatur, diffunditur in recipiens ſimul & antliam. Rareſcit igitur ſingulis hauſtibus in ratione quam habet cavitas antliæ & recipientis ſimul ad cavitatem ſolius recipientis. Sit $a : 1$, vel a, hæc ratio. Ergo raritas, quæ ante primum hauſtum erat 1, poſt primum hauſtum erit a, poſt 2dum, a^2, poſt 3um, a^3, &c., poſt hauſtus x, a^x. Sit $r : 1$, vel r, ratio quam habet raritas deſiderata ad

No. LIV.

XI.

Terræ ſemidiameter facili & exquiſita methodo ſic exploratur. Per libellam accuratiſſimam Tubo optico inſtructam & in puncto A [Fig. 5.] *lineæ alicujus ad perpendiculum erectæ conſtitutam, obſervetur eminus punctum* B *nota diſtantiæ: hinc tranſlata libella in punctum* B, *dirigatur verſus dictam perpendicularem, & obſervetur in hac punctum* C *ſuperius futurum ipſo* A: *quo facto, erit* CA *ad* AB, *ut* AB *ad ſemidiametrum Terræ quæſitam.* (°)

ad raritatem aeris naturalis. Igitur $a^x = r$, vel quoniam numerorum æqualium æquales ſunt logarithmi, x log. $a =$ log. r, aut denique $x =$ log. r : log. a.

(°) Nam, quia lineæ AB, BC, ſunt ad libellam, id eſt, horizontales, rectos angulos comprehendunt cum verticalibus AD, BD. Similia ſunt igitur Triangula CAB, BAD, & CA : AB = AB : AD, quæ pro Telluris ſemidiametro poteſt haberi. Sed vitiat hujus methodi ἀκρίβειαν, refractio aeris inæqualiter denſi, qua fit ut lineæ AB, BC; quæ rectæ eſſe deberent, incurventur.

Videatur N°. LXXI.

N°. LV.

N°. LV.

G. G. L. *

GENERALIA

DE

NATURA LINEARUM,

Anguloque contactus & oſculi, provolutionibus, aliiſque cognatis, & eorum uſibus nonnullis.

CUM nihil mihi ſit gratius, quam qualiacunque tentamina mea Viris egregiis digna videri quæ perficiantur; perplacuere, quæ Clariſſimus Baſileenſium Profeſſor BERNOULLIUS, de linearum oſculis menſe *Martio* 1692 † in *Actis Eruditorum* publicavit. Cumque animadverterem, cogitationes quidem noſtras in ſumma ipſi probari, nonnulla tamen aliter conſtituenda judicari, quod adeo non ægre fero, ut quoties doceor, in lucro ponam; meum eſſe putavi, rem denuo examinare, paratiſſimo ad retractandum animo, ſi monitis contrariis Doctiſſimi Viri locum dari poſſe deprehendiſſem.

Acta Erud. Lipſ. 1692. Sept. p. 440.

Statueram ego, *Contactum* continere duas interſectiones coincidentes; *oſculum* continere plures contactus coincidentes, oſculum quidem primi gradus eſſe, quando coincidunt duo contactus, ſeu interſectiones quatuor; oſculum ſecundi gradus, quando coincidunt interſectiones ſex, aut contactus tres &c. & circulum oſculantem, ſive maximum, aut minimum tangentium, intra, vel extra, in propoſito puncto circulorum [qui ſcilicet omnium tangentium proxime ad curvam accedit] eſſe curvedinis menſuram, & definire quantitatem anguli contactus; ita ut angulus contactus

* *Gothofredi Gulielmi* LEIBNITII. † Supra N°. XLVII. pag. 473.

No. LV. duarum linearum ſe tangentium ſit idem qui circulorum ibi eas oſculantium. Et in lineis, quas circulus in pluribus punctis poteſt ſecare, altiora etiam oſcula poſſe oriri; cum omnes interſectiones in unum coaleſcunt; atque ita aliquando, in caſu maximæ vel minimæ curvedinis, ſeu tranſitus a curvedine creſcente ad decreſcentem, vel contra, coincidere oſcula duo, ſeu contactus quatuor, interſectiones octo. Obſervavi etiam poſtea, centrum circuli curvam propoſitam oſculantis ſemper cadere in lineam, quæ evolutione fili propoſitam generare poteſt, & unicam [ſuæ feriei] eſſe perpendicularem illam, quæ ex centro oſculantis circuli ad lineam duci poſſit; ſive unicam eſſe *unicam*, hoc eſt unicam eſſe maximam, vel minimam, ex eodem puncto ad curvam educibilem; cum ex aliis punctis intra curvam plures, vel duæ ſaltem perpendiculares, id eſt, in ſua ſerie maximæ vel minimæ, ſeu *duæ ſuæ ſeriei unicæ* ad curvam duci poſſint. Et cum conſtet aliam atque aliam lineam evolutione deſcribi, prout filum producitur longius; animadverteram olim [ut hoc obiter dicam] eas, quas D. Bernoullius nuper vocavit *condeſcriptas*, eſſe *parallelas* inter ſe; ita ut una ſit ab alia ubique æquidiſtans, [ſeu æqualis ubique minimi intervalli, quod eſt recta minima ab una ad aliam ducenda] vel, ut recta perpendicularis ad unam, ſit alteri quoque perpendicularis, quæ dudum mihi fuit definitio *parallelíſmi* in genere ſumpti. Hanc noſtram curvedinis menſuram uſumque Evolutarum, etiam primo evolutionum Inventori Celeberrimo Hugenio placuiſſe, ex ſolutione catenariæ lineæ animadverti. Porro cum tres interſectiones circuli & curvæ coincidant, notavi *flexum* oriri *contrarium*, id eſt, contactum ſumptum cum interſectione. Quemadmodum & coincidentes interſectiones quinque dant contactum cum flexu contrario coaleſcentem, ſeu interſectionem cum oſculo primi gradus; & interſectiones ſeptem coincidentes dant flexum contrarium cum ſimplici oſculo, ſeu oſculum ſecundi gradus, cum interſectione coaleſcens. Unde intelligitur, quotcunque interſectiones coincidentes in contactus, oſcula, aut flexus contrarios reſolvi poſſe. Et quidem in contactu vero atque oſculo, recta, vel circulus, lineam ab utraque parte tangit extrorſum, vel ab utraque parte introrſum; ſed in flexu contrario, unam partem tangit extrorſum, alteram introrſum, & ita compoſitum non tangit, ſed ſecat.

Cauſam quoque, cur linea evolutione generans locus ſit centrorum omnium circulorum lineam propoſitam oſculantium, ita explicare mihi videbar. Sumantur duo puncta curvæ A & B, & ducantur rectæ ad curvam perpendiculares in A & in B; earum interſectio communis in C dabit centrum circuli, qui radio CA deſcriptus, tanget curvam in A; radio vero CB deſcriptus, tanget eam in B: ſed ſi coincidant A & B, ſive inaſſignabiliter diſtent, hoc eſt, ubi duæ perpendiculares concurrunt; coincidunt duo contactus, duoque circuli tangentes abeunt in unum, qui curvam

curvam oſculabitur. Sed per hunc ipſum concurſum perpendicularium inaſſignabiliter differentium inveniuntur & lineæ evolutione generantes, ut ex *Hugeniano* de Pendulis Opere patet. Porro circulus, cujus centrum eſt in recta arcui ad eaſdem partes cavo perpendiculariter occurrente, per punctum occurſus deſcriptus, arcum non ſecat, ſed tangit. Itaque ſicubi ſecat, neceſſe eſt ibi punctum adeſſe flexus contrarii, ſeu non eſſe lineam ad eaſdem partes cavam. Recte autem animadvertit D. Bernoullius interſectione ſimplici ad contactum ſimplicem, vel ad oſculum, ſeu contactum multiplicem accedente, contactum mutari in ſectionem; ſed hinc manifeſtum eſt, cum circulus curvam oſculatur, regulariter [id eſt excepto flexus contrarii puncto] coincidere quatuor interſectiones, ſeu duos contactus: adeoque hanc ipſam eſſe naturam oſculi primi gradus; quandoquidem id oſculum definimus ordinaria oſculatione circulorum, quæ in quocunque curvæ puncto regulariter locum habere poteſt, ſeu circulo curvedinem menſurante, qui ſcilicet proxime ad curvam accedit. No. LV.

Et in univerſum dici poteſt, interſectionum circuli cum alia linea numerum regulariter eſſe parem. Itaque non video quomodo primi gradus oſculum tribus interſectionibus explicari queat; ita ſcilicet, ut tale oſculum trium radicum ſit regulare & tota curva diffuſum; at oſculum quatuor radicum, ſeu quatuor coaleſcentium interſectionum pro ſecundo & ſingulari habeatur, nec niſi in punctis curvæ determinatis contingat. Contra enim ſe res habet, & quatuor interſectiones, ſeu duo contactus, oſculo cuique regulariter inſunt; & in ſolo caſu extremo, qui eſt flexus contrarii, naſcens, ut ita dicam, vel moriens, oſculario tribus interſectionibus contenta eſt. Unde nolui ex caſu trium interſectionum peculiarem oſculi gradum facere, cum præſertim ex contactu [cujus perfectior ſpecies oſculum eſt] in interſectionem degeneraret. Eademque ratione, & in altioribus, oſculatio ſua natura paris eſt numeri radicum; nec niſi in flexus contrarii puncto in numerum imparem abit. Et ſane, cum circulus poſt contactum in puncto propoſito curvam adhuc in duobus punctis ſecat, neceſſe eſt has interſectiones, promoto circuli centro, continuo ad dictum contactum appropinquantes, tamen ambas ſimul contactui coaleſcere; nam cum quamlibet in eum pervenire neceſſe ſit, ideo, ſi alterutra ſola ad contactum perveniente circulus fiat proximus curvæ, ſeu oſcularis, ſequitur ambabus interſectionibus ſeparatim pervenientibus ad coalitionem cum contactu propoſito, duos dari circulos lineæ proximos, ſeu oſculantes, per idem ejus punctum propoſitum tranſeuntes, quod eſt impoſſibile. Niſi ſcilicet linea ibi ſecet ſemet ipſam; quo caſu duarum vice fungitur, adeoque circuli illi duo revera lineas duas oſculantur, licet unius partes; de quo hic non agitur. Facile etiam hinc intelligitur, ſi circulus poſt contactum internum ſecare curvam rurſus [utrinque] poſſit, tunc in caſu oſculi, [ubi duæ ſectiones contactui coaleſcunt] circulum oſculantem eſſe extra curvam;

&c

No.LV. & contra ex contactu externo mox in caſu coaleſcendi cum duabus reliquis ſectionibus, fieri oſculum internum, & ita tranſitum circuli, a contactu ſectionem adjunctam habente ad oſculum, eſſe tranſitum in oppoſitam curvæ partem.

Sed & hoc notandum eſt, *minimam curvedinem & maximam obtuſitatem* eſſe in puncto flexus contrarii, & recte dixit D. Bernoullius, circulum oſculantem eo caſu degenerare in rectam, radius enim eſt infinitus, ſeu centrum cadit in lineæ evolutæ concurſum cum ſua aſymptoto *. Quoniam antequam duæ proximæ ad curvam perpendiculares hactenus, ſibi occurrentes ad plagam propoſitam, fiant ſibi concurrentes ad plagam oppoſitam, ſeu ex convergentibus divergentes, debent fieri parallelæ: quo caſu eorum concurſus infinite abeſſe debet. Fieri tamen & aliunde poteſt, ut lineæ generatæ curvedo ſit minima, ſeu maxima obtuſitas; non quidem abſolute, ſed in toto aliquo arcu ad eaſdem partes cavo, ſeu in certa progreſſione. Cum ſcilicet talis eſt natura curvæ per ſui evolutionem generantis, ut evolutio continuari ultra certum punctum, & filum generans ulterius extendi nequeat; ut contingit cum curva evolvenda ex duabus convexitates ſibi obvertentibus ac ſeſe tangentibus compoſita eſt. Eodem modo prodibit maxima curvedo, ſeu minima obtuſitas, ut lineæ curvedo ex creſcente rurſus incipiat fieri decreſcens; veluti ſi curva generanda non intra duos arcus generantes convexitate obverſa ſe tangentes, ſed extra earum angulum cadat. Neutro tamen modo generata linea per continuam fili evolutionem producitur.

Hæc autem ut notarem, eo facilius adductus ſum, quod linearum naturam in univerſum illuſtrant, mihique proferunt non tantum ad finiendam illam celebrem de angulo contactus controverſiam, ſed & a vaga logomachia ad uſus ſolidos ac profuturos transferendam. Et video nuper Dominum Eisenschmid diſſertationem ſuam contra D. Lagnium defendentem, ac de diametro umbræ in eclipſi Lunæ loquentem, ex hypotheſi Terræ ovalis, adhibuiſſe diametrum circuli, qui ovalem oſculatur, ſeu cum ea angulum oſculi [angulorum contactus minimum] facit, atque ita quam proxime ad illam accedit; eo conſilio, ut ex diverſis proportionibus diametri umbræ ad diametrum Lunæ definiatur vera figura globi Terræ. Quod quantum præſtare poſſit, obſervationibus committo.

Cum hæc ſcripſiſſem, venere in manus meas *Acta Menſis Maii* 1692, in quibus nova quædam *Bernoulliana* † legi, & lineæ illius, cum qua rectæ convergentes ad rectum punctum, eundem conſtantem angulum [ſed obliquum] faciunt, proprietatem elegantiſſimam ibi detectam, non ſine voluptate obſervavi, aliaque video notata, quæ generalem curvarum naturam

turam

* Vide tamen Num, LXXVI. † N°. XLIX. pag. 491.

turam illuſtrant. Plurimum igitur linearum doctrinam hodie promotam habemus, tum explicata flexus natura, tum adhibitis ad earum generationem *provolutionibus*, pariter atque *evolutionibus*. Interiorem naturam *flexus*, ſeu curvitatis, aperuiſſe nonnihil viſus ſum detecta *menſura anguli contactus*, ope ſcilicet circuli curvam *oſculantis*, ſeu maxime ad eam accedentis, eundemque cum ea in puncto oſculi flexum habentis, de quo tum antea, tum etiam hoc loco dictum eſt. No.LV.

Quod ad *provolutionem* attinet, GALILÆUS, ut arbitror, primus de lineis per eam generatis cogitavit, & ſimpliciſſimam ex iis *Cycloeidem*, quam clavus rotæ in plano incedentis deſcribet in aere, conſiderare cœpit, de qua multa a Viris doctis ſunt demonſtrata. ROMERUS *Danus*, Aſtrorum inprimis ſcientia clarus, cum in Obſervatorio Regio Pariſino verſaretur, elegantes, ut audivi, proprietates detexit Cycloeidis altioris, cum rota, ſcilicet, ſive circulus incedit ſuper circulo. De quo tamen ad me nihil pervenit. NEWTONUS nuper de Cycloeidibus iiſdem egregia & univerſalia dedit *.

Evolutionem curvarum generatricem primus illuſtravit HUGENIUS. Eam cogitationem promovit TSCHIRNHUSIUS, adhibitis [ut ego appellare ſoleo] *coevolutionibus*, animadverſoque quomodo tales lineæ coevolutæ, ut *foci* ſpectari poſſint, & radiorum quoque concurſu generentur; conſiderata inprimis cauſtica, quæ formatur radiis parallelis a ſpeculo reflexis. Ego inde longius progreſſus ſum, uſumque reperi ad ſolvenda Problemata [quorum in gratiam potiſſimum ſuſcipitur ſpeculatio] *lineaſque opticas* inveniendas, quarum ope radii redderentur ad datum punctum convergentes, vel divergentes, aut etiam inter ſe paralleli. Quod alia etiam ratione præſtitere NEWTONUS in *Principiis* †, HUGENIUS in libro *de Lumine* **. Obſervavi quoque eadem opera dari figuras *Acamptas*, quæ etſi opticæ & politæ ſint, radios tamen non reflectunt, & *Aclaſtas*, quæ licet ſint tranſparentes, ſeu ex materia radios refringente, vi formæ tamen ſuæ & poſitionis ad Solem, radios ſine refractione tranſmittunt. His nunc obſervationes ſingulares BERNOULLIUS adjecit. Cæterum ab HUGENIO in tractatu *de Lumine*, & TSCHIRNHUSIO in *Actis*, notatum eſt, cauſticam illam, a ſpeculo concavo ſphærico radios ſolares reflectente formatam, ſimul eſſe cycloeidalem, provolutione circuli ſuper circulo generatam. Poſtremo a me nuper propoſita eſt *nova linearum formatio per concurſum curvarum ordinatim datarum*, cum antea tantum radiorum ſeu rectarum concurſus adhiberentur; cujus formationis ad Problemata ſolvenda egregium uſum comperi.

* *Princ. Math. Phil. Nat.* Lib. I. Sect. X. Prop. 48. & 49.

† Lib. I. Sect. XIV. Prop. 97. & 98.

** Cap. VI. pag. 101. *ſeq.*

No.LV. Eximia quædam ineſſe videntur illis, quæ de figura Veli a vento tenſi Clariſſimus Bernoullius nuper diſſeruit *; tametſi de tota re [in qua non deſunt ſcrupuli,] ob molem aliorum negotiorum non expenſa, pronunciare non auſim. Ex reperta a me menſuratione *Loxodromiarum* per logarithmos, equidem non parum practici fructus duci poteſt; difficilem tamen arbitror curſus æſtimationem, quæ longitudinibus definiendis ſufficiat. Cum de deviatione navis geometrica acribia agitur; non velorum tantum, ſed & navis expectanda eſſet figura. Denique quod innuit, ſe *Fratrem*que in calculo meo plurimum profeciſſe; id agnoſco, congratulorque non illis magis, quam mihi. Valde autem noſſe velim, an ultra metas illas ſunt provecti, ad quas ego perveni; id ſi ab ullis, certe ab eorum ingenio aliquando expecto, & gaudebo plurimum, ſi intellexero; præſertim cum mihi vix amplius in talibus, ea qua prius intentione animi, verſari liceat. Cæterum quoque a me non difficulter ſolvitur illud Problema: Invenire lineam, cujus arcu æquabiliter creſcente, elementa elementorum quæ habent abſciſſæ ſint proportionalia cubis incrementorum, vel elementorum, quæ habent ordinatæ; quod in catenaria ſeu funiculari ſuccedere veriſſimum eſt.

Sed quoniam id jam a Bernoulliis eſt notatum; adjiciam, ſi, pro cubis elementorum ordinatarum, adhibeantur quadrata; quæſitam lineam fore logarithmicam. Si vero ipſa ſimplicia ordinatarum elementa ſint proportionalia elementis elementorum, ſeu differentiis ſecundis abſciſſarum; inveni lineam quæſitam eſſe circulum ipſum.

* N°. XLVIII. pag. 481.

Digitized by Google

N°. LVI.

CURVÆ DIA-CAUSTICÆ.

Earum relatio ad Evolutas, aliaque his affinia. Item Natura oſculorum uberius explicata. Celeritates Navium definitæ. Regulæ pro reſiſtentiis, quas Figuræ in fluido motæ patiuntur, &c.

I. PRomiſſam Elateris curvaturam jam aliquoties daturus eram, ni ſupervenientes novæ ſpeculationes alio me rapuiſſent; feciſſentque, ut iis potius calamo committendis inhærerem, quorum idea recentior vividius mentem feriebat, quam quæ obliterata ex animo novum quaſi inveniendi laborem depoſcebant. Atque hoc ipſum in cauſa eſt, cur fidem etiamnum fallere cogar, poſtquam nuperæ de Cauſticis obſervatiunculæ aliis affinibus inventis anſam præbuere. Cum enim relationem illam ſimpliciſſimam inter Evolutas & Cauſticas per reflexionem nuper detexiſſem, mox attentandum duxi, num ſimilis forte relatio inter Evolutas & *Dia-Cauſticas* deprehendi poſſit. Sic autem voco *Cauſticas per refractionem* natas, reliquis ad diſtinctionem *Cata-Cauſticis* dictis, vel etiam *Cauſticis* ſimpliciter, ut ætatis honor aliquis habeatur, præ novis in Geometria hoſpitibus. Nam Cata-Cauſticorum Inventor Nobilis TSCHIRNHAUSIUS alterarum mentionem quidem injecit, tangere vero eas noluit. *Acta Erud. Lipſ. 1693. Jun. p. 244.*

No.LVI. Solus Hugenius in tractatu *De lumine* * ſchema nobis ſiſtit integræ Dia-Cauſticæ; ſed circularis tantum, & per radios incidentes parallelos genitæ. Generalem vero Dia-Cauſticarum conſiderationem, earumque ad Evolutas relationem, primus, ni fallor, ego aggreſſus ſum, nec irrito ſpero ſucceſſu, ut ex ſequenti conſtructione liquebit.

Sit punctum radians A, Curva quævis Expoſita DHM, ſeu convexa verſus A [ut in 1ª *figura*] ſeu concava [ut in 2ª,] recta HB curvæ perpendicularis, B punctum in Evoluta ejus, AH radius incidens, HI refractus accedens ad perpendicularem in 1ª, & recedens ab eadem in 2ª figura. Quo poſito, ducantur ex puncto Evolutæ B in radium incidentem & refractum perpendiculares rectæ refractionem metientes BC, BE & angulo quem comprehendunt EBC, æqualis ſtatuatur HBF, ad partes quas ſchema monſtrat, ſumptaque HG tertia proportionali ad AH & HC; fiat, ut FG ad FC, ſic HE ad HI. Dico punctum repertum I fore in Dia-Cauſtica ex A: unde haud difficulter patet regreſſus a data Dia-Cauſtica ad punctum radians, vel ab utroque dato ad Evolutæ puncta invenienda (a).

Caſuum

* Cap. VI. pag. 119. *ſeq.*

(a) Conſtructionis hujus analyſin, qualem dedit Auctor, Vide N°. CIII. Art. 17. Vide etiam Hospitalium *An. des inf. pet.* §. 133. En ſyntheſin. Sit A punctum radians [*Fig.* 1. & 2.], AH, A*b* radii incidentes, HI, *b*I refracti, viciniſſimi, HB radius oſculi. Demiſſæ normales BC in radium incidentem AHC, & BE in refractum HEI, ſunt ſinus ang. incidentiæ AHK vel BHC, & refractionis BHI: ideoque ſunt in ratione data, ut & B*c*, B*e* [quæ cenſeri poſſunt normales radiis, A*b* incidenti, *b*I refracto] nec non earum differentiæ C*c*, E*e*. Hæcque ratio rectarum BC, BE, eadem eſt cum ratione rectarum FC, HE, propter ſimilitudinem Triang. BFC, BHE, deductam ex æqualitate angul. EBC, HBF, aut potius EBH, CBF. Igitur C*c* : E*e* = FC : HE. Centris A & I deſcribantur per *b* arcus *ba*, *bi* qui conſtituunt Triang. H*ba*, H*bi* ſimilia Triang. HBC, HBE, unde eſt *bi* : *ba* = HE : HC. Quæro rationem $\frac{HI}{EI}$; hæc $= \frac{bi}{Ee} = \frac{bi}{ba}\left[\frac{HE}{HC}\right] \times \frac{ba}{Cc}\left[\frac{AH}{AC}\right] \times \frac{Cc}{Ee}\left[\frac{FC}{HE}\right] = \frac{FC}{HC} \times AH$

Caſuum vero particularium determinationes ſequentes hinc eli- No. LVI.
cimus.

1. Si curva verſus punctum radians ſit convexa & refractio fiat a perpendiculari, aut ſi illa ſit concava & hæc fiat ad perpendicularem; radii refracti contigui perpetuo divergunt (b).

2. Si curva verſus punctum radians ſit convexa, & refractio fiat ad perpendicularem; aut ſi illa ſit concava & refracta fiat a perpendiculari, radii refracti modo convergunt, modo divergunt, modo paralleli ſunt: Convergunt, cum $HG < HF$: divergunt ubi $>$: & paralleli ſunt cum $=$.. Sed conſtructio etiam in caſu divergentium locum habet, niſi quod tunc recta HI in radio refracto retrorſum producto abſcindenda (c).

3. Si punctum A radiet ex infinita diſtantia, evaneſcente HG, fiet $FH : FC = HE : HI$ (d).

4. Si radius curvæ perpendicularis manet ex infinito interval-

lo,

$\times \frac{AH}{AC}$ ſive $\frac{HC}{GC}$ [nam, cum ſit HG tertia proportionalis ad AH, HC, erit componendo $AH : AC = HC : GC$]. Igitur $\frac{HI}{EI}$ $[\frac{bi}{Ee}] = \frac{FC}{GC}$; vel, convertendo $HI : HE = FC : FG$, quemadmodum habet Auctor.

(b) Nam in *Fig.* 1. ſi refractio fieret a perpendiculari, eſſet $BE > BC$, & $Be > Bc$, ideoque $Ee > Cc > ba$. Sed $ba > bi$, [nam $ba : bi = HC : HE$, &, ubi refractio ſit a perpendiculo, $HC > HE$]. Ergo $Ee > bi$. Radii igitur divergerent.

In *Fig.* 2. ſi refractio fieret ad perpend. eſſet $BE < BC$, & $Be < Bc$, ideoque $Ee < Cc < ba < bi$ [ob $HC < HE$]. Igitur radii divergerent.

(c). In *Fig.* 1. Si $HG < HF$, eſt $CG < CF$. Ergo $Ee < bi$ [propter $bi : Ee = CF : CG$. Vide Not. *a*]. Ergo radii convergunt. Si $HG > HF$, eſt quoque $CG > CF$, & $Ee > bi$. Divergunt igitur radii. Si $HG = HF$ eſt etiam $CG = CF$, & $Ee = bi$, ac radii ſunt paralleli.

In 2. *Fig.* Si $HG < HF$, eſt $CG > CF$; atque ideo $Ee > bi$, unde ſequitur radios eſſe convergentes. Si $HG > HF$, eſt $CG < CF$ & $Ee < bi$, ac radii divergunt. Sed $HG = HF$ dat $CG = CF$, $Ee = bi$, & radios parallelos.

(d) Nam, poſita AH infinities majore quam HC, erit HG eadem HC infinities minor, adeoque nulla. FG igitur abit in FH, & analogia $FG : FC = HE : HI$, mutatur in $FH : FC = HE : HI$.

No. LVI. lo, erunt diſtantiæ puncti quæſiti a punctis H & B, ut rectæ refractionem metientes BC, BE. Sin procedat ex intervallo finito, erunt dictæ diſtantiæ ut recta BC, & quarta proportionalis ad diſtantiam puncti radiantis A a punctis H & B ac rectam BE. (e)

5. Si radius, ſeu ex finita, ſeu infinita diſtantia procedens, tangat curvam, & refringatur ad perpendicularem, evaneſcentibus HC & HG, coincidet CB cum HB, fietque HI = EH.

6. Si radius, ſeu ex finito, ſeu infinito intervallo profectus, ea obliquitate curvæ incidat, ut ejus refractus a perpendiculari recedens curvam tangat, coincidet punctum Dia-Cauſticæ I cum puncto incidentiæ H. (f)

Conſectaria & Scholia principaliora his adnectimus.

α. Si Curva expoſita DHM eſt geometrica, ejus Dia-Cauſtica ex quovis dato puncto, quoque talis erit.

β. Quia Evoluta tota circuli in unum punctum concentratur, hinc Dia-Cauſtica *Hugeniana*, & eadem opera omnes aliæ, quæ ex puncto diſtantiæ finitæ generantur, quam facillime determinantur. Schema *Hugenianæ* ex radiis parallelis ad perpendicularem refractis *figuræ* 3æ pars ſiniſtra, ex radiis a perpendiculari refractis, pars dextra refert.

γ. Patet vero etiam, quod omnia, quæ Barowius tam operoſe

(e) Sint AH, A*h* [Fig. A] radii manantes ex A, quorum ille perpendicularis ad Curvam, irrefractus tranſeat in HI, iſte refrangatur in *h*I. Erit HI : BI = H*h* : BE = H*h*×BC : BC×BE = AH×BC : AB×BE = BC : $\frac{AB\times BE}{AH}$.

Quod ſi A infinite diſtet, AH & AB cenſentur æquales, & eſt HI : BI = BC : BE.

(f) Tunc enim coincidunt BE, & BH, evaneſcitque angulus EBH, nec non ipſi æqualis CBF; coincidunt ergo puncta E & H, nec non C & F. Evaneſcunt igitur CF, & HE. Quamobrem evaneſcit HI quæ eſt ad evaneſcentem HE, ut evaneſcens FC, ad finitam aut infinitam FG.

Digitized by Google

operoſe ſtruxit ad determinandum locum Imaginis puncti radiantis, e peracta ad ſuperficiem circularem refractione vel reflexione, ſpecialiſſima duntaxat Corollaria ſint generalis noſtræ relationis Cauſticarum & Dia-Cauſticarum ad Evolutas: Quandoquidem ipſi *Imaginis* nomine nihil aliud venit quam radiorum reflexorum aut refractorum concurſus. Qua occaſione monemus, illa quæ jam de officio trium Linearum *Anti-Cauſticæ, Peri-Cauſticæ* & *Ant-Evolutæ* diximus, * ne ſiniſtræ acceptioni anſam præbeant, ſic explicanda eſſe, ut intelligantur de radiis ad rectam RH [Vide *Tab.* XIX. *Fig.* 1] expoſitam Curvam in puncto incidentiæ H tangentem, non vero ad ipſam expoſitam DHM relatis: Sic enim utique limitandum fuiſſe conſtat; cum alias ſi ad curvam referantur radii, ipſorum punctorum A & I alterum alterius, & punctum B ſui ipſius ſit imago, per hypotheſin: minime vero puncta *a*, *i*, & *b*. No. LVI.

δ. Quoniam Ellipſeos Dia-Cauſtica ex radiis axi AC parallelis [*Fig.* 4.] tota cogitur in unum punctum, focorum nempe alterum, ſicubi refractiones fiunt ſecundum rationem axis AC, ad focorum diſtantiam DE (g), hinc expedita conſtat ratio inveniendi puncta quotlibet Evolutæ ejus hoc pacto: Sumpto quovis in Ellipſi puncto B, & biſecto angulo DBE per rectam BI, quæ axem ſecet in L, demittatur in axem perpendicularis BF, fiatque ut DE ad AC, ſic BL ad BG; ac tum denique, ut GF ad GL, ſic BI [quam videlicet abſcindit recta EI ipſi BE perpendicularis] ad quartam BH, erit punctum H in Evoluta Ellipſeos (h). At idem elegantius obtinetur per relationem Cata-Cauſticæ

* Supra N°. XLIX. pag. 492. ſub finem.

(g) Ex demonſtr. CARTESII *Dioptr.* Cap. 8. Art. 3. Sit enim KB radius incidens axi AC parallelus, BE refractus, LB*l* ad Ellipſim perpendicularis, angulum DBE, ut notum eſt, biſecans: & erit KB*l* [BLD] ang. incidentiæ, & LBE ang. refractionis. Ergo ratio refractionis eſt ea quæ ſinus ang. BLD ad ſinum ang. LBE = BE : LE = BD : DL [EUCL. VI. 3.] = EBD ſeu AC : DE.

(h) Demitte ex H in radios KBM incidentem, & BNE refractum, normales HM, HN, quæ rationem refractionis metientur, eruntque

No. LVI. Cauſticæ ad Evolutam, quandoquidem utervis Ellipſeos focus reſpectu radiorum ex altero egreſſorum etiam Cata-Cauſticæ munere fungitur: hunc enim in finem quærenda tantum quarta proportionalis ad $\frac{1}{2}$ AC, BD & BI, ad obtinendam ſtatim optatam BH (i): quas conſtructiones Illuſtris HUGENIUS cum ſua quam dedit *Propoſitione* X. *parte* 3. *Horol. Oſcillat.* conferre poterit.

ε. *Spira mirabilis*, ſingulari privilegio non competenti Cycloidibus, ſui ipſius quoque Dia-Cauſtica eſt ex umbilico, productis videlicet retrorſum radiis, ſeu a perpendiculari, ſeu ad perpendicularem refractis, utpote qui antrorſum divergunt. Inveniuntur autem ejus puncta, demiſſa perpendiculari ex puncto Evolutæ B [vide dictam *Fig.* 1. *Tab.* XIX.] in radium refractum incidentis AH: interſectionis enim locus erit Dia-Cauſtica expoſitæ ſpiralis DHM, eademque numero cum illa (1).

ζ. *Rectifi-*

que ideo inter ſe, ut AC, DE. Age HK, quæ cum HB capiat ang. BHK = NHM, aut cum MH, ang. MHK = NHB, ſic ut ſimilia fiant Tr. MHK, NHB, atque ideo HK: HB = HM: HN. Et quoniam eſt [ex conſtr.] BG: BC = AC: DE = HM: HN = HK: HB, ſimilia erunt Tri. BLG, HBK, atque BG parallela eſt HK, quo ipſo ſimilia quoque ſunt Tr. rectangula BFG, HMK. Ergo KM in B, & GF in L, ſimiliter dividuntur, eſtque KB: KM = GL: GF = [ex conſtr.] BH: BI = BN: BE. Ergo KB: KM = BN: BE, prorſus ut requirit Art. 3. ſupra pag. 551.

(i) Sit EB radius incidens, BD reflexum & per Theor. de Cata-Cauſticis demonſtr. N°. XLIX. pag. 493, eſt 2BI — BH: BH = EB: BD, *componendo*, 2BI: BH = EBD: BD, vel $\frac{1}{2}$ EBD [$\frac{1}{2}$ AC]: BD = BI: BH.

(1) Sit [*Fig.* B] KH ſpira mirabilis, AH radius ex umbilico incidens, H*i* refractus retroproductus in HI; HB, radius evolutæ; BC, eadem cum BA, ſinus incid. & BE, ſinus refract. quippe normales ad AH, HI. Quia C & A coincidunt, coincidet quoque G cum illis, ſumta nimirum HG tertia proportionali ad HA, HC. Age BF quæ cum BH capiat ang. HBF = EBC, & erit per Theor. pag. 550. FG: FC = HE: HI. Quoniam igitur, FG = FC, erit quoque HE = HI; hoc eſt, punctum E, in quod cadit BE normalis demiſſa ex umbilico, eſt ad Dia-Cauſticam. Ducatur AE, & quia datur ang. incid. AHB, datur quoque ang. refr. AHE; daturque eorum ſumma BHE. Datur etiam rectus BEH. Quare datur ſpecie Triang.

Digitized by Google

ζ. *Rectificationem* Dia-Cauſticarum quod ſpectat, ea ſic habet: No.LVI. Ducto radio incidenti AH, & alio AD, qui tangat expoſitam, [*Vide partem ſiniſtram Fig.* 3.] vel alio AL, cujus refractus eam tangat, [*vide partem dextram*,] Si ſuper puncto radiante A radio AH deſcribatur arcus circuli HM [qui in caſu infinitæ diſtantiæ puncti A in rectam abit perpendicularem radiis,] erit [*in parte ſiniſtra*] curva LI, una cum adſumpta recta DL, quæ, per caſum articuli quinti determinatur, æqualis differentiæ radii refracti HI, & alicujus rectæ, ad quam DM eſt in ratione quæ refractiones metitur; [*in parte* vero *dextra*] curva LI ſola, æquatur aggregato radii HI, & ejus rectæ, ad quam LM dictam rationem habet. (m).

η. Hinc vero novæ oriuntur conſtructiones curvarum per Dia-Cauſticas, quales Dominus de *Tſchirnaus* mediantibus Cauſticis formandas exhibet: Exempli gratia, Si deſcribenda ſit [*Fig.* 3.] Ellipſis PRS ad datos ſemi-axes PQ, QS, producatur SQ ad B, donec fiat BS = PQ, tum centro B radio BS deſcribatur quadrans DHS, cujus Dia-Cauſtica ex radiis ipſi BS parallelis ſit LIN, poſita refractionis menſura ea quæ per rectas BS, BQ, expri-

Triang. BHE; daturque ratio BH : HE. Sed datur etiam ratio AH : BH. Data eſt igitur ratio AH : HE. Quamobrem radio AH, ſub dato angulo AHE, adjungitur recta HE, cum ipſo datam rationem habens. Ergo, per Cor. I. Prop. III. pag. 498, Dia-Cauſtica *Ee* eſt Spira eadem cum expoſita *b*H.

(m) Eſt enim [Vid. *Fig.* 1. 2. & Not. (*a*)] propter ſimilia Triang. H*ba*, HBC, & H*bi*, HBE; H*a* : H*i* = BC : BE = *i* : *r*, id eſt in ea ratione quæ metitur refractionem. Ergo ſumma omnium H*a*, ad ſummam omnium H*i*, in eadem ratione *i* : *r*. Eſt autem, *Fig.* 3 *parte ſiniſtra*, ſumma omnium H*a* = AD — AH = DM, ſumma autem omnium H*i* = HI — DLI. Quare DM : HI — DLI = *i* : *r*. Ergo HI — DLI = $\frac{r}{i}$ DM, & DLI = HI — $\frac{r}{i}$ DM. At, *in ejuſdem fig. parte dextra*, ſumma omn. H*a* = AH — AL = LM; & ſumma omn. H*i* = LI — HI : unde eſt LM : LI — HI = *i* : *r*, ac LI — HI = $\frac{r}{i}$ LM, ac LI = HI + $\frac{r}{i}$ LM.

No. LVI. exprimitur; dico, ſi curvæ NIL, ope ſtyli ambulantis ſuper quadrante SHD, ita circumvolvatur filum $NIHR = NS$, ut pars ejus extra quadrantem prominens HR parallela ſtatuatur radio BS, deſcriptum iri extremitate R optatam Ellipſin PRS (n).

θ. Patet ex hactenus dictis, quod data curva Expoſita, & una harum, vel Evoluta, vel Cauſtica, vel Dia-Cauſtica, cæteræ quoque ex iis inveniri poſſint: ſed & quod mirabilius nonnullis fortaſſe videbitur, data Expoſita & una reliquarum trium, poſſunt exponi aliæ quarum hæc ſit altera quævis ex illis tribus omnifariam acceptis, eæque ſemper infinitæ; ut enim Curva quælibet infinitarum curvarum Evoluta, & ſic infinitarum Cauſtica, vel Dia-Cauſtica eſſe poteſt: Nempe

α. Data *Curva* AB, [*Fig.* 5.] ejuſque *Evoluta* CD, reperienda eſt alia, cujus iſta CD ſit *Cauſtica* ex dato puncto E, quod ſic peragitur: Sumpto quovis Curvæ puncto B, junctaque EB, excitentur duæ perpendiculares, una FG ad rectam EB ex puncto ejus medio, altera BD ad ipſam curvam AB, erit punctum interſectionis harum G in curva, cujus Cauſtica ex puncto E eſt curva CD (o). Liquet autem, ſi loco Expoſitæ AB ſumatur quævis ejus *Condeſcripta*, totidem inde diverſas Curvas proditura

(n) Nam quia ſemper $DLI = HI - rDM : i$ aut [cum ſit $BQ : BS = r : i$] $DLI = HI - BQ \times DM : BS$, erit etiam $DLIN = SN - BQ \times BS : BS = SN - BQ$, ideoque $IN = DLIN - DLI = SN - BQ - HI + BQ \times DM : BS$. Præterea [ex conſtr.] $NIHR = NS$. Ergo $HR = NIHR - NI - IH = NS - NS + BQ + HI - BQ \times DM : BS - HI = BQ - BQ \times DM : BS$ & $RK = RH + HE - EK = HR + DM - BQ = BQ - BQ \times DM : BS + DM - BQ = DM - BQ \times DM : BS = QS \times DM : BS = QS \times HE : BS$. Igitur ordinatæ RK curvæ SRP ad ordinatas HE circuli DHS datam habent rationem $BS : QS$. Eſt ideo SRP ellipſis.

(o) Cauſticarum proprietas eſt, [vid. N°. XLIX. pag. 493. lin. 2. ſeq.] quod aggregatum radii incidentis & reflexi ſit cauſticæ æqualis, vel eadem minus majuſve conſtante longitudine. Atqui, ducta EG, quæ eſt $= BG$, patet eſſe $EG + GD = BG + GD = BD$, radio evolutæ curvæ $AD =$ cauſticæ CD, vel eadem majus minuſve data longitudine. Quare punctum G eſt ad curvam optatam.

Digitized by Google

turas eſſe, quarum omnium communis cauſtica ex puncto E eſt curva CD, ſicut eadem omnium *Condeſcriptarum* communis Evoluta exiſtit. Sin punctum E radiet ex infinita diſtantia per rectas EB parallelas [quo caſu præcedens conſtructio non habet locum] ducatur GH illis utcunque perpendicularis [*Fig.* 6] & in protracta DB capiatur BF = BL, junctæque FL agatur parallela BH, ut & HI ipſi LB, erit punctum I in curva, cujus Cauſtica eſt CD (p). No. LVI.

b. Data deinde *Curva* AB [*Fig*. 7.] ejuſque *Evoluta* CD, exponi debeat alia FG, cujus illa CD ſit *Dia-Cauſtica* ex dato puncto E, cujusque vertex ſit datum punctum F; hoc ita fit: Deſcriptis, centro E, radio EF ſeu EH, & alio utcunque majori EG circulis FH, GI; fiat, ut ſinus anguli incidentis ad ſinum anguli refracti, ſic HG ad quartam FL, tum convoluto filo FD circa curvam DC, deſcribat punctum ejus L lineam LG ſecantem circulum IG in G, erit hoc unum ex punctis curvæ, cujus Dia-Cauſtica ex E eſt illa CD (q). Si vero cuipiam conſtructio hæc non ſatis geometrica videatur; ſciat in promptu mihi eſſe aliam, qua idem conſequor, utendo tantum circulis & lineis rectis: ſic ut nec convolutione fili, nec ipſa curva CD indigeam; dummodo concedatur, ex quovis puncto curvæ AB perpendicularem ei duci poſſe; quod utique hic & ubique ſupponendum (r).

Bbbb 2 Nota,

(p) Nam, ob BF = BL, & BH parallelam ipſi FL, eſt BI = HI. Quare HID = BID = cauſticæ CD, vel ea majus minuſve data longitudine. Ergo punctum I eſt ad Curvam quæſitam.

(q) Debet enim eſſe, ſi ſit G punctum curvæ optatæ [per Art. ζ. pag. 555] $FLD = GCD + \frac{r}{i} HG$. Sed eſt $FL = \frac{r}{i} HG$, & LD = GCD. Quare $FLD = GCD + \frac{r}{i} HG$.

(r) Conſtructio, quam celat Auctor, non multum forte differt ab iſta. Producatur CZ, ad curvam AB normalis, donec ſit $ZK = AF + \frac{r}{i} EF$, & agatur recta EK, quam [ſi neceſſe eſt productam] ſecabit in M circulus, centro Z, radio ZM, qui ſit ad ZK ut *i* ad *r*, deſcriptus: Den

No. LVI. Nota, ſi AB ſit Circulus, & CD punctum, prodibunt Ovales illæ *Carteſianæ* tantopere celebratæ Geometris; quarum proinde inventio generalioris hujus conſtructionis tantum caſus ſimplicior exiſtit.

c. Expoſita porro BC [*Fig.* 8.] ejuſque *Cauſtica* DE ex puncto A, invenire lubeat aliam, cujus *Evoluta* ſit DE. Ad hoc efficiendum quæratur tantum ejus Anti-Cauſtica, abſcindendo ex protracta EC ipſam CF = CA, vel ſaltem eadem majorem minoremve conſtante longitudine (f). Quod ſi vero quærenda ſit alia, cujus DE ſit *Dia-Cauſtica*, quæratur primum aliqua, cujus illa DE ſit Evoluta & tum per §. *b.* &c.

d. Data denique *Expoſita* FG [*Fig.* 7.] ejuſque *Dia-Cauſtica* CD ex puncto E, præſtitutum ſit invenire aliam AB, cujus ipſa

Denique rectæ ZM parallela EG deſignabit in EZ punctum G, quod eſt ad curvam optatam.

Nam $i : r = ZM : ZK = GE : GK$ [ob GE, ZM parallelas]. Ergo $GK = \frac{r}{i} GE$. Et $GZ\,[= ZK - GK] = AF + \frac{r}{i} EF - \frac{r}{i} EG = AF - \frac{r}{i} HG$. Ergo GCD $[= GZ + ZCD = GZ + AD$; eſt enim $ZCD = AD$, cum ſit AZ evoluta ipſius CD$] = AF - \frac{r}{i} HG + AD = FD - \frac{r}{i} HG$: ac denique $FD = GCD + \frac{r}{i} HG$. Eſt igitur punctum G ad curvam, cujus CD Dia-cauſtica eſt ex puncto E, cujuſque vertex in F.

Quod ſi punctum radians infinite diſtet, paululum varianda conſtructio. Ducta utcunque HL [*Fig.* 6] ad radios incidentes perpendiculari, producatur DB ad AB normalis donec BF ſit $= \frac{r}{i} BL$; agatur LF & ipſi parallela BH, atque HI parallela ipſi BL, deſignabit in recta BD punctum I ad curvam optatam.

Nam, ob ſimilia triangula BLF, IBH, & quoniam eſt $BF = \frac{r}{i} BL$ erit etiam $BI = \frac{r}{i} HI$. Sed BID = curvæ CD. Ergo curva CD æqualis aggregato radii ID, & rectæ BI, vel $\frac{r}{i} HI$. Ergo, per Art. ζ, punctum I eſt ad curvam, cujus CD Dia-cauſtica eſt radiorum incidentium qui ſunt ipſi HI paralleli.

(f) Vide Num. XLIX. pag. 492.

ipſa CD ſit *Evoluta*: Ducta ex E ad Expoſitam quavis recta EG N°. LVI.
& abſciſſa EH = EF diſtantiæ puncti E a vertice Expoſitæ, fiat, ut ſinus anguli incidentis ad ſinum anguli refracti, ſic GH ad FL, ipſique AL [ſumpto A vertice optatæ ubivis in recta EF] in radio refracto æqualis abſcindatur GZ, erit Z punctum in optata (t). Sin alia deſideretur, cujus *Cauſtica* ſit ipſa CD quæratur primum illa cujus eſt *Evoluta*, & tunc per §. *a*. &c.

Habet itaque Lector, in hac & illa Anni 1692 * lucubratiuncula, in compendio fere quicquid de *Evolutis*, *Cauſticis*, & *Dia-Cauſticis*, per mutuam ipſarum comparationem & relationem ad ſe invicem cognoſci poteſt. Cui ſi artificium [nobis Fratribus, ut credo, peculiare hactenus] adjungere voluiſſem, quo *Centra circulorum oſculantium*, ſeu *Evoluta puncta*, ex natura *Expoſitæ* unica & ſimplici proportione inveniri poſſunt (u), agnoſceret puto, colophonem quodammodo huic materiæ impoſitum eſſe, nihilque in ea jure amplius deſiderari poſſe. Spero autem, & in his quæ publicavi, nonnulla tam nova tamque ſingularia contineri, ut ſi fontem, unde manant, ſtudioſius tegere voluiſſem, merito omnibus Geometris admirationi eſſe potuiſſent.

II. Cum hæc ſcriberem, incidebant in manus *Acta* menſis Septembris anni 1692 eaque quæ Celeberrimus Dominus LEIBNITIUS his præſertim, quæ de *Curvarum oſculis*, menſe Martio publicaveram, erudite oppoſuit †. Quibus ſane perlectis non poteram non & gaudere, quod mea qualiacunque examine ſuo digna æſtimarit, & meam ſimul dolere incuriam, quæ verba ita

Bbbb 3 obſcu-

(t) Nam $AD = FD - FL - LA$. Sed FD [ex natura Dia-Cauſticæ FG] $= \frac{r}{i} HG + GCD$ & FL [per conſtr.] $= \frac{r}{i} HG$, ac $LA = GZ$. Ergo $AD = \frac{r}{i} HG + GCD - \frac{r}{i} HG - GZ = ZCD$. Igitur filo AD convoluto circa curvam DC, deſcribet punctum ejus A curvam AZ.

* N°. XLIX. pag. 491.

(u) Vid. Num. LVIII.

† N°. præced.

No. LVI. obſcure concepta reliquit, ut Viro perſpicaciſſimo non omnem ſerupulum eximere valuerint: quapropter ut quod ibi neglectum reſarciam, ac rem in majore luce conſtituam, neceſſum duco paucas hic lineas annectere, quas Benevolus Lector *Schediaſmati* menſis Martii per modum *Addendorum* haud gravate ſubjungat.

Exemplum communis Parabolæ & ejus Curvæ, cujus Evolutione deſcribitur, totum negotium explanabit: Conceditur mihi, quod ſi ſuper quovis puncto intermedio poſterioris tanquam centro, longitudine fili evolventis ceu radio, circulus deſcribatur, is ipſe futurus ſit, qui curvam parabolicam oſculari dicitur; ſed & pro conceſſo aſſumo [quis enim poſt leviſſimam attentionem hoc inficiabitur?] circulum huncce Parabolam præter punctum oſculi neceſſario in alio aliquo puncto ſecaturum, imo vero in duobus, ſicubi illam in puncto oſculi tangere, non ſecare cenſendus eſſet; [utut id veritati adverſum jam ſupra pagina 115 lin. 11 * exerte demonſtravi:] unde ſi oſculum illud per duos contactus, ſeu quatuor interſectiones coincidentes interpretandum ſit, quid obſecro manifeſtius, quam ſecuturum hinc fore, ut unus idemque circulus Parabolam in 5, imo 6 punctis ſecare poſſit? Quæ in Conicis omni ævo inaudita res fuit. At inquis, annon centrum circuli oſculatoris conſiderari ſolet ceu concurſus duarum rectarum Parabolæ perpendicularium, ſuper quo deſcripti his radiis circuli curvam tangant, adeo ut in caſu indiſtantiæ perpendicularium efficiatur *concurſus duorum contactuum*? Utique; ſed & hoc præoccupavi pagina 116. † Oſculum ſimplex ſpectari revera poteſt, ut concurſus duorum contactuum; at contactuum factorum non ab *uno eodemque circulo*, ſed *duobus circulis diverſis & inæqualibus* concentricis: quo quidem ſenſu illud eodem jure conſiderare poſſemus ceu concurſum decem, centum, pluriumve contactuum factorum a totidem circulis excentricis, prout videli-

* Supra pag. 478. lin. quinque ultimis.
† Supra pag. 480.

Digitized by Google

delicet plures, pluresve conciperentur perpendiculares, quarum quælibet foret radius alicujus circuli tangentis, quæque omnes ad indiſtantiam uſque ſibi approximari intelligerentur. Verum enim vero ejuſmodi conſideratio ad propoſitum noſtrum, ubi agitur de numero concurrentium interſectionum unius ejuſdemque circuli, prorſus inutilis. Inſtas porro, ſi circulus præter contactum curvam adhuc in duobus hinc inde punctis ſecet, neceſſe erit, ut hæ interſectiones promoto circuli centro tandem ambæ ſimul contactui coaleſcant, aut ſi ſeparatim id fiat, ut duo dentur circuli curvam in eodem puncto oſculantes, quod impoſſibile. Reſp. ſi ambæ interſectiones ſimul contactui coaleſcunt, oritur oſculum, non primi, ſed ſecundi gradus; & ſi una ſeorſim, cogitandum [ut monui pagina 112 *] illam ſubinde ex contactu emerſuram, & oppoſitas curvæ partes perambulaturam, donec alteri in alio aliquo curvæ puncto obviam facta, cum illa novum ibi contactum celebret, poſt quem alteri huic interſectioni ad priorem contactum non propius accedere, nedum ipſi uniri licet. Tandem vero nec hoc prætereundum: ſi ſuppoſitio trium tantum radicum æqualium, ſeu trium interſectionum coincidentium, pro oſculo ſimplici inveniendo ſit erronea dicenda; quæro cur calculus pagina 114 ** in illa fundatus nihilominus ad legitimam ſolutionem perducat? Oſtendendum itaque eſſet, hoc vel caſu tantum accidiſſe, vel idem ſaltem quoque ſuccedere, ſupponendo quatuor radices æquales; quod neſcio an quiſquam præſtabit. No. LVI.

Cæterum Celeberrimus LEIBNITIUS peregregie obſervavit Circulum, nempe oſculatorem, curvedinis menſuram eſſe, & mihi quoque innotuerat, poſtquam animadvertiſſem curvedines radiis horum circulorum reciproce proportionales exiſtere.

III. Pergit poſt hæc Acutiſſimus Geometra ad ea, quæ menſe Maio

* Supra pag. 475. ** pag. 477. 478.

No. LVI. Maio * de *Curvatura Veli* diſſerueram ; & nonnulla haud vulgaria in iis quidem latere ſuſpicatur ; de tota tamen re [in qua ſibi non deeſſe ſcrupulos affirmat] nil definit. Optaſſem vero ego quam maxime, ut dubitandi rationes nobis expoſuiſſet. Quippe nec *Frater* meus, qui dum adhuc Pariſiis verſaretur Problema plene abſolvit, detecto quod me ad æquationem $adsddx = dy^3$, [ſuppoſitis elementis curvæ ds æqualibus] perduxerat artificio; nec ipſe Illuſtris HOSPITALIUS, quicum ille inventum communicaverat, quicquam in eo fallaciæ deprehenderunt. Ego ſane, præter anomaliam illam quam cauſatur fluidi ſupra veli ſinum exundantis portio, quamque articulo 25 tetigi **, nihil in toto negotio reperio difficultatis ; adeo quidem, ut nihil præter hoc deeſſe nobis videatur, quin naturam preſſionis fluidorum plene perſpectam habeamus, indeque mechanicam horum non minus, ac ſolidorum, abſolutam & perfectam aliquando expectare poſſimus. Fateor in meis poſitionibus nonnulla reperiri, [ſed fundamentum calculi non concernentia,] quæ paulo enucleatius, vel etiam emendatius dici potuiſſent. Sic, cum §. 5 † celeritates navium, eodem ſecundo vento velitantium, ſtatuuntur ut *Velorum ſubtenſæ* ; intelligendæ ſunt celeritates navium initiales, ſeu primi celeritatum gradus impreſſi, non ſubſequentes celeritates actuales [quarum ultima, ſeu maxima eſt illa, quæ *ad quam non* vocatur ;] ut pote ad quas ſupputandas habenda quoque præcipue eſt ratio reſiſtentiæ ſeu gravitatis fluidi, cui naves innatant. Reperio autem, quod ſi illa reſpectu reſiſtentiæ, ſeu gravitatis aeris, quo naves impelluntur, valde magna ſtatuatur, qualis reapſe eſt, celeritates navium *ad quas non*, cæteris paribus, propemodum futuræ ſunt, ut *radices ſubtenſarum veli*, non ut ipſæ ſubtenſæ (u). Notanter adjeci in dicto §. *cæteris*

* Supra N°. XLVIII. pag. 481. *ſeq.*

** Pag. 489.

† Pag. 484.

(u) Vid. N¹. CIII. Art. XVIII. Interim hæc habe. Sit proræ ſuperficies aquis immerſa, ad ſubtenſam veli, ut P ad p; aquæ & aeris denſitas ut D & d; C Venti, c Navis celeritas, atque ideo $C - c$, celeritas qua

teris paribus; ut intelligatur, hæc non *abſolute* dicî, quaſi celeritas navis cujuſpiam, ſepoſita conſideratione figuræ ejus, ullatenus definiri poſſit, ſed *relative*; ita quidem, ut ſi de navis unius celeritate ſemel experientia conſtiterit, de aliarum omnium ejuſdem figuræ, ſtructuræ, & ponderis, ſed velorum tantum amplitudine differentium celeritatibus pariter judicium ferri queat. Nunc vero dico amplius, & poſtquam totum hoc negotium a phyſica incertitudine ad geometricam *ἀκρίβειαν* traduxi, ipſam quoque *celeritatem abſolutam navium* determinare poſſe me profiteor. No.LVI.

Primo enim, ſi pars ſuperficiei proræ immerſa aquis plana ſtatuatur & æqualis ſubtenſæ veli, ſeu baſi ſegmenti circularis quod velum refert, & inſuper ratio gravitatis aeris ad gravitatem aquæ, ut 1 ad 841, illi, qui in natura obtinet, quam proxime conformis, deprehendo, velocitatem navis maximam, cujuſcunque molis ſit, præciſe fore ſubtrigecuplam velocitatis ipſius venti (x); niſi quod ponderoſior navis tardius hanc velocitatem aſſequatur.

Deinde quamvis proræ ſuperficies, qua aquis immerſa eſt, non plana ſtatuatur, ſed, ut communiter ad aquas facilius ſulcandas fieri ſolet, acuminata, vel roſtrata, ſatis tamen conſtat difficultatem aliam hinc non naſci, præter eam, quæ in hoc conſiſtit, ut definiatur, quanto plus minuſve huic illive figuræ in fluido motæ reſiſtatur; id quod ſequentes poſitiones determinabunt.

1. Si

qua ventus in velum impingit; & erit actio venti in velum, ad reſiſtentiam aquæ in proram, ut $pd \times (C - c)^2$ ad $PDcc$. Navis autem celeritate exiſtente maxima, æqualis eſt actio venti reſiſtentiæ aquæ. Quare, in eo caſu $pd\,(C - c)^2 = PDcc$, vel $(C - c)\sqrt{pd} = c\sqrt{PD}$, atque ideo c [celeritas Navis maxima] $= C\sqrt{pd} : (\sqrt{PD} + \sqrt{pd}) =$ [ſi ponas D multo majorem quam d,] quam proxime $C\sqrt{pd} : \sqrt{PD}$. Ergo, cæteris paribus, c eſt propemodum ut $(\sqrt{p})$ radix ſubtenſæ veli.

(x) Sit enim $P = p$, & $D : d = 841 : 1$ erit $c =$, [$C\sqrt{pd} : (\sqrt{PD} + \sqrt{pd}) =$] $C : (\sqrt{841} + \sqrt{1}) = C : 30$, quam proxime.

No.LIV. 1. Si *Triangulum Iſoſceles* DCE [*Figura* 9.] & *Rectangulum* AB, æque gravia & baſium æqualium, DE, AF, ferantur eadem celeritate in fluido quopiam juxta directiones HQ perpendiculares baſibus: Vel etiam [quod eodem redit] ſi idem *Triangulum* juxta dictam directionem moveatur, ſed præcedente nunc vertice C, nunc baſi DE; erunt reſiſtentiæ, quas a fluido patiuntur figuræ, vel quas idem patitur *Triangulum* diverſo ſenſu latum, in ratione duplicata baſis DE, vel AF, & aggregati crurum DC+CE (y).

2. Reſiſtentia quam patitur *Quadratum* in fluido motum juxta directionem lateris, ad reſiſtentiam ejuſdem pari celeritate lati juxta directionem diagonalis, viciſſim eſt, ut diagonalis ad latus: facilius ergo hoc quam illo ſenſu in fluido movetur Quadratum (z).

3. Reſiſtentia, quam patitur *ſegmentum minus Circuli*, juxta directionem baſi perpendicularem & præcedente baſi latum, ad reſiſtentiam quam idem patitur, eadem celeritate & directione, ſed præcedente vertice motum, eſt ut quadratum diametri ad idem

(y) Sit QH impreſſio fluidi in particulam H, ſive Rectanguli AB, ſive Trianguli DCE. Hæc, quia ad latus Trianguli obliqua eſt, decomponi debet in duas QK lateri parallelam, ideoque effectu deſtitutam, & QI perpendicularem; quæ iterum in duas QM, QL decomponenda eſt. Prior QM, ad axem CG perpendicularis, eliditur per æqualem & oppoſitam *qm*. Poſterior illa eſt quæ Triangulum retardat. Igitur reſiſtentia quam patitur Triangulum, eſt ad reſiſtentiam quam patitur Rectangulum, ut QL ad QH, hoc eſt, in duplicata ratione QI ad QH [ob QL, QI, QH continue proportionales], vel EG ad EC [propter ſimilia Triangula QIH; CGE] vel denique baſis ED ad ſummam crurum ECD.

(z) Sit enim DCE ſemi-quadratum, & eſt, per Not. præc. reſiſtentia in bina latera DCE, ad reſiſt. in diagonalem DE, ut EG^2 ad EC^2, vel ut EC^2 ad ED^2. Eſt autem reſiſt. in DE, ad reſiſt. in latus CE [ſi utrumque recta in fluidum incurrat] ut ED ad EC. Ergo, *ex æquo*, reſiſtentia in DCE, hoc eſt, in quadratum motum juxta directionem diagonalis, ad reſiſtentiam in CE, hoc eſt, in quadratum motum juxta directionem lateris, ut $EC^2 \times ED$ ad $ED^2 \times EC$, vel ut EC ad ED, ut latus ad diagonalem.

idem quadratum, multatum triente quadrati baſis ſegmenti circuli (*a*). No. LVI.

Coroll. Hinc reſiſtentiæ *ſemi-circuli*, cujus modo baſis præcedit, modo vertex, ſunt ad invicem in ratione ſeſqui-altera (*b*).

4. Parabolæ juxta directionem axis incedenti, præeunte modo baſi, modo vertice, reſiſtitur in ratione tangentis ad arcum circuli alicujus, qui habeat diametrum parametro, & tangentem ſemibaſi Parabolæ æqualem (*c*).

(*a*) Sit DAHE [*Fig.* C] curva quælibet, cujus baſis DE, quæque moveatur in fluido, juxta directionem AC baſi perpendicularem, nunc baſe, nunc vertice præeunte. Et ſi repræſentet PN impreſſionem fluidi in particulam N*n* baſis, iſta præcedente, ſumatur QH = PN, eaque decomponatur in duas, QK parallelam & QI normalem ad curvam: iſtaque rurſus reſolvatur in duas, QM, quæ per æqualem oppoſitam eliditur, & QL quæ ſola retardat motum curvæ; oſtendeturque, ut in Nota (y) factum eſt, reſiſtentiam quam patitur particula N*n*, baſe præeunte, eſſe ad reſiſtentiam quam patitur particula H*b*, curva præeunte, ut QL ad QH, vel ut QI^2 ad QH^2, propter QL, QI, QH continue proportionales. Sed, ob ſim. Triang. QIH, HO*b*, eſt QI : QH = O*b* : H*b* = $dy : ds$, [poſitis, nempe $AB = x$, $BH = y$, AH curva $= s$]. Ergo reſiſtentia partic. N*n* baſis eſt ad reſiſtentiam part. H*b* curvæ, ut dy^2 ad ds^2, vel ut $dy^3 : ds^2$ ad dy. Quamobrem, ſi totius baſis reſiſtentia exponatur per ipſam baſim $2y = 2\int dy$, exponetur totius curvæ DAE reſiſtentia per $2\int(dy^3 : ds^2)$. Vid. infra Art. 6. pag. 568.

Sit nunc DAE ſegmentum circuli, cujus æquatio $yy = 2ax - xx$, vel $x = a - \sqrt{(aa - yy)}$, aut differentiando $dx = ydy : \sqrt{(aa - yy)}$, adeoque $ds^2 [= dx^2 + dy^2] = aady^2 : (aa - yy)$. Unde eſt $\int(dy^3 : ds^2) = \int(aa - yy)\,dy : aa = (aay - \frac{1}{3}y^3) : aa$. Ergo reſiſtentia chordæ ad reſiſtentiam arcus ut $2y$ ad $2y - \frac{2}{3}y^3 : aa$, vel ut $4aa$ ad $4aa - \frac{4}{3}yy$, ut quadratum diametri ad idem quadratum minutum triente quadrati baſis [$4yy$].

(*b*) Si DAE ſit ſemicirculus, erit $y = a$, & reſiſtentia diametri ad reſiſtentiam ſemiperipheriæ eſt ut $4aa$ ad $4aa - \frac{4}{3}aa = \frac{8}{3}aa$, ut 12 ad 8, aut 3 ad 2.

(*c*) Sit DAE parabola, cujus æquatio $yy = ax$. Ergo $x = yy : a$ & $dx = 2ydy : a$ atque $ds^2 = (aa + 4yy)\,dy^2 : aa$. Igitur reſiſtentia baſis ad reſiſtentiam curvæ, ut y ad $\int(dy^3 : ds^2) = \int(aady : (aa + 4yy)) = \int(\frac{1}{4}aady : (\frac{1}{4}aa + yy))$, quæ eſt expreſſio arcus circuli, cujus diameter a = parametro, tangens y = ſemibaſi.

No. LVI. COROLL. Si baſis Parabolæ æquetur parametro, Reſiſtentiæ erunt, ut Quadratum ad Circulum inſcriptum (*d*).

5. *Hyperbolæ* [*Ellipſis*] Reſiſtentias, quas ſubeunt, cum nunc baſis, nunc vertex præcedit, ita comparabis. Fiat, ut Aggregatum [Differentia] transverſi & recti lateris ad latus tranſverſum: ſic quadratum recti lateris ad quadratum diametri circuli alicujus in quo applicetur tangens æqualis ſemibaſi Hyperbolæ [Ellipſis], tumque fiat iterum, ut Aggregatum [Differentia] laterum ad latus rectum, ſic dicta tangens ad aliam rectam: nec non ut idem Aggregatum [Differentia] laterum ad tranſverſum, ita arcus tangenti circuli reſpondens ad arcum alium: quo facto erunt Reſiſtentiæ ut dicta tangens ad Aggregatum [Differentiam] inventæ rectæ, arcusque (*e*).

COROLL. Si Hyperbola ſit æquilatera, fiat diagonius quadrati, ſuper lateribus ejus deſcripti, optati circuli diameter, cui adaptetur tangens æqualis toti baſi Hyperbolæ, eruntque Reſiſtentiæ, ut duplum tangentis ad ipſam tangentem ſuomet arcu auctam. Et ſi inſuper Hyperbolæ baſis ſemiſſi dicti diagonii æquetur, invenientur Reſiſtentiæ, ut duplum quadrati circulo circum-

(*d*) Quod ſi baſis $= a$ parametro, erit $y = \frac{1}{2}a$, tangens æqualis radio, & arcus octans peripheriæ. Igitur reſiſtentiæ ſunt, ut radius ad octantem peripheriæ, vel ut quadratum ad circulum inſcriptum.

(*e*) Dicatur p parameter, vel latus rectum, a latus tranſverſum Hyperbolæ vel Ellipſis, cujus æquatio $ayy = apx \pm pxx$ [ſignum ſuperius ad hyperbolam, inferius ad ellipſim pertinet], vel $xx \pm ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa \pm ayy : p$, aut $x = \mp\frac{1}{2}a \pm \surd(\frac{1}{4}aa \pm ayy : p)$, & $dx^2 = aayydy^2 : (\frac{1}{4}aapp \pm apyy)$, adeoque $ds^2 [= dx^2 + dy^2] = (\frac{1}{4}app + (a \pm p)yy)dy^2 : (\frac{1}{4}app \pm pyy) =$ [poſito $a \pm p = b$] $(byy + \frac{1}{4}app)dy^2 : (\pm pyy + \frac{1}{4}app)$. Ergo reſiſtentia baſis ad reſiſtentiam curvæ, ut y ad $\int(dy^3 : ds^2) = \int(\pm pyy + \frac{1}{4}app)dy : (byy + \frac{1}{4}app) = \pm\int pdy : b + \int(\frac{1}{4}aappdy : b\ (byy + \frac{1}{4}app))$ $= \pm py : b + \frac{a}{b}\int(\frac{app}{4b}dy) : (yy + app : 4b)$, quæ quantitas integralis exprimit arcum circuli, cujus diametri quadratum $= app : b$, tangens y. Dicatur is arcus A; & erit reſiſtentia baſis ad reſiſtentiam curvæ, ut tangens aut ſemibaſis y ad $aA : b \pm py : b$; quæ illa ipſa eſt ratio quam verbis enunciat Auctor.

Digitized by Google

cumſcripti ad quadratum ſimul & circulum. (f). No. LVI.

Quæ dicta ſunt de Reſiſtentia Ellipſis, procedunt tantum, cum illa juxta axem majorem movetur. Nam Reſiſtentia quam patitur, cum juxta minorem movetur, dependet a quadratura Hyperbolæ; quare ope Logarithmicæ, ſeu Funiculariæ, ſic invenitur. Sit Funicularia, cujus Parameter ſit ad ſemilatus rectum Ellipſis in ratione ſubduplicata triplicatæ lateris tranſverſi & differentiæ utriuſque. Deinde fiat, ut latus rectum Ellipſis ad differentiam laterum, ſic tertia proportionalis ad latus rectum & baſin Ellipſis ad quartam. Denique ducta per centrum Funiculariæ recta ad axem perpendiculari, applicetur ei ad curvam recta alia parallela axi, quæ ſit ad parametrum Funiculariæ in ratione ſubduplicata lateris tranſverſi Ellipſis & differentiæ ejus ac inventæ quartæ. Quo facto, alia quædam proportionalis ad differentiam laterum, latus rectum & ſemi-baſin Ellipſis, multata intervallo, quod axem Funiculariæ & parallelam ejus diſcriminat, menſuram reſiſtentiæ optatæ determinabit (g).

 6. Ge-

(f) Si ponatur $p = a$, ellipſis abit in circulum, cujus reſiſtentia Art. 3. data eſt, independenter ab arcus rectificatione; quippe, in eo caſu, $b = a - p$ ſit $= 0$.

Hyperbola vero, ubi $p = a$ æquilatera ſit, & eſt $b = a + p = 2a = 2p$. Reſiſtentiæ ſunt, ut y ad $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} y$, vel ut $4y$ ad $2A + 2y$. Eſt autem A arcus circuli, cujus diametri quadratum $= app : b = \frac{1}{2} pp =$ ſemidiagonio quadrati, ſuper latere p vel a deſcripti, cui aptata tangens $y =$ ſemibaſi. Quod ſi vero ipſa diagonalis pro diametro ſumatur, & aptetur tangens $2y =$ baſi; omnes lineæ duplicantur, & habetur arcus $2A$. Sunt igitur reſiſtentiæ baſis & curvæ, ut $4y$, duplum tangentis $2y$, ad $2y + 2A$ ad tangentem ſimul & arcum.

Quod ſi tangens $2y$, ſeu baſis $= \frac{1}{2} pp$ ſemidiagonio, vel radio circuli, arcus A erit octans peripheriæ, cujus ad tangentem ſuam eadem ratio eſt quæ circuli ad quadratum circumſcriptum. Igitur, eo in caſu, baſis & hyperbolæ reſiſtentiæ ſunt, ut duplum quadrati ad quadratum circulo inſcripto auctum.

(g) Nam ſi ellipſis juxta minorem axem movetur, parameter p minor axe tranſverſo a, adeoque $b = a - p$ quantitas negativa. Igitur terminus $\int(\frac{1}{4}aappdy) : b\,(\frac{1}{4}app + byy))$ dividendo per $-b$, induet hanc formam $-\int(\frac{1}{4}aappdy) : bb(\frac{1}{4}app : b - yy))$ quæ pendet a logarithmis vel quadratura

No. LVI. 6. Generaliter vero in *quacunque Figura*, quæ eadem celeritate, nunc præcedente baſe, nunc vertice, per fluidum quodpiam movetur, Reſiſtentiæ ſe habent, ut Figuræ baſis ad ſummam omnium cuborum factorum ex elementis baſis, & applicatorum ad quadratum elementorum ipſius curvæ (*h*). At quantum unica hæc

dratura hyperbolæ, cujuſque integralis eſt $(pa\sqrt{a} : 4b\sqrt{b}) \times$ Log. $((p\sqrt{\frac{a}{b}} - 2y) : (p\sqrt{\frac{a}{b}} + 2y))$. Notum autem eſt quantitates logarithmicales, per Funiculariam haberi poſſe. Ut demonſtretur Auctoris conſtructio, ponamus rectam æqualem $A : \sqrt{(BB - yy)}$, quæ axi parallela intercipitur inter rectam normalem ad axem, & Funiculariam, cujus parameter eſt $A : B$; hanc rectam, aio, diſtare ab axe, intervallo quod ſit $= \int(Ady : (BB - yy))$. Id autem facillime ex iis ſequitur, quæ de natura Funiculariæ demonſtrata ſunt. Oſtenſum enim eſt, No. XXXIX. pag. 426. ſi ſit P parameter, & x abſciſſa a vertice, eſſe applicatam $y = \int(Pdx : \sqrt{(xx + 2Px)}$; quamobrem, ſi ſit z abſciſſa a centro, hoc eſt ſi $z = x + P$, erit $u = \int(Pdz : \sqrt{(zz - PP)})$. Fiat igitur $P = A : B$; & $z = A : \sqrt{(BB - yy)}$, adeoque $dz = Aydy : (BB - yy)^{\frac{3}{2}}$, & erit $u = \int(Ady : (BB - yy))$. Comparetur hæc formula cum expreſſione integranda $\int(\frac{1}{4}aappdy : bb(\frac{1}{4}app : b - yy))$; & erit $A = \frac{1}{4}aapp : bb$, ac $BB = \frac{1}{4}app : b$. Deſcribatur itaque Funicularia cujus parameter $P = A : B$ $= \frac{\frac{1}{4}aapp : bb}{\frac{1}{2}p\sqrt{a} : \sqrt{b}} = \frac{1}{2}pa\sqrt{a} : b\sqrt{b}$, & ejus axi parallela applicetur recta $= A : \sqrt{(BB - yy)} = \frac{1}{4}aapp : bb\sqrt{(\frac{1}{4}app : b - yy)} = (\frac{1}{2}aap : b\sqrt{b}) \times \sqrt{(a - 4byy : p)} = P\sqrt{a} : \sqrt{(a - 4byy : pp)}$; eritque u diſtantia ejus rectæ ab axe $= \int(\frac{1}{4}aappdy : bb(\frac{1}{4}aapp : b - yy))$. Ergo recta $py : b$, tertia proportionalis ad differentiam laterum, latus rectum, & ſemi-baſim ellipſis, multata intervallo u quod axem Funiculariæ & parallelam ejus diſcriminat, eſt ad y ut reſiſtentia ellipſis juxta minorem axem mota, ad reſiſtentiam baſis, prorſus ut habet Auctor.

(*h*) Vide Notam (*a*) pag. 565. Quod ſi autem figura plana DAE, circa axem AC rotata generet ſolidum, quod in fluido moveatur juxta directionem axi parallelam, nunc baſe, nunc vertice præeunte, erit pariter reſiſtentia, quam patitur corona circularis ex rotatione particulæ N*n* genita, ad reſiſtentiam, quam patitur zona ex rotatione particulæ H*h* genita, ut ds^2 ad dy^2, vel ut $cydy$ ad $cydy^3 : ds^2$ [c denotante peripheriam cujus radius $= 1$]. Quare, ſi reſiſtentia baſis per ipſam baſim ſolidi, $\frac{1}{2}cyy = \int cydy$ deſignetur, reſiſtentia ſuperficiei curvæ erit $= \int(cydy^3 : ds^2)$, adeoque erunt illæ reſiſtentiæ, ut yy & $2\int(ydy^3 : ds^2)$.

Itaque

Digitized by Google

hæc obſervata regula, tum ad conſtructionem navium, tum ad perficiendam nauticam univerſam, tum etiam ad definiendam figuram Penduli alicujus horologii, ut aerem quam liberrime ſulcare, & minima quantumvis vi in motu conſervari poſſit (*i*), plurimaque præſtanda alia, momenti conferat, haud dictu opus eſt; quin potius mirari ſubeat, quod viſa tam manifeſta rei utilitate, No. LVI.

Itaque, ſi proponitur conus iſoſceles, cujus latus ad radium baſis ſit ut l ad r; in quo igitur eſt $ds : dy = l : r$ adeoque $ds^2 = lldy^2 : rr$, adeoque $2\int(ydy^3 : ds^2) = 2\int(r^2ydy : l^2) = r^2yy : l^2$; dicemus reſiſtentiam baſis eſſe ad reſiſtentiam ſuperficiei conicæ, ut yy ad $r^2yy : l^2$ vel ut l^2 ad r^2, in duplicata ratione lateris ad radium baſis.

Segmenti ſphæræ, [ubi $ds^2 = aady^2 : (aa - yy)$ Vide Not. (*a*) pag. 565.] baſis, quando præcedit, patitur reſiſtentiam, quæ eſt ad reſiſtentiam ſuperficiei ſphæricæ, ſi præcedit vertex, ut yy ad $2\int(ydy^3 : ds^2) = 2\int(ydy \times (aa - yy) : aa = yy - \frac{1}{2}y^4 : aa$, vel ut aa ad $aa - \frac{1}{2}yy$, ut quadratum radii ſphæræ, ad idem quadratum minutum ſemiquadrato radii baſis.

Igitur hemiſphærii reſiſtentia eſt ſemiſſis reſiſtentiæ baſis ejus. Nam, in eo caſu, $y = a$. Ergo $aa - \frac{1}{2}yy = \frac{1}{2}aa$. Ut etiam invenit Newtonus *Phil. Printip.* Lib. II. Sect. VII. Prop. 34.

Solidi parabolici [quod habet $ds^2 = (aa + 4yy)dy^2 : aa$. Vid. Not. (*c*). pag. 565.] reſiſtentiæ, modo baſe, modo vertice præeunte, ſunt ut yy, & $2\int(ydy^3 : ds^2) = 2\int(aaydy) : (aa + 4yy) = \frac{1}{4}aa \times \int(8ydy : (aa + 4yy) = \frac{1}{4}aa \times (\text{Log.}(aa + 4yy) - \text{Log.}\,aa)$ [ſubtrahitur Log. aa, quia Log. $(aa + 4yy)$, poſito $y = 0$ fit $=$ Log. aa], vel ut yy ad $\frac{1}{4}aa$ Log. $((aa + yy) : aa)$, quæ ratio vel per logarithmos, vel per Funiculariam facile dabitur.

Solida vero hyperbolicum & ellipticum, baſe præcedente reſiſtentiam patiuntur, quæ eſt ad reſiſtentiam corundem, vertice præcedente, ut yy ad $2\int(ydy^3 : ds^2) =$ [quoniam $ds^2 = (byy + \frac{1}{4}app)dy^2 : (\pm pyy + \frac{1}{4}app)$] $= 2\int(\pm pyy + \frac{1}{4}app)ydy : (byy + \frac{1}{4}app) = \pm 2\int pydy : b + \int(\frac{1}{2}aappydy : b(byy + \frac{1}{4}app) = \pm pyy : b + \frac{aapp}{4bb}$ Log. $((byy + \frac{1}{4}app) : \frac{1}{4}app)$, quæ ratio pariter per logarithmos facile haberi poteſt.

(*i*) Solidum minimæ reſiſtentiæ definierunt Newtonus, *Princ. Phil. Math.* Lib. II. Sect. VII. Prop. 35. *Schol.* Fatio Duillerius, in peculiari Tractatu, *Joh.* Bernoulli in *Actis Lipſ.* 1699 & 1700, Hospitalius *ibid.* & in *Comment. Acad. Reg. Scient. Pariſ.* 1699; Generaliſſime autem Bouguerus in iiſdem *Comment.* ad ann. 1733.

Digitized by Google

 litate; nemo quod ſciam hoc æquor adhucdum arare tentaverit.

IV. Quod ſupereſt in Schediaſmate *Leibnitiano*, ſolutionem concernit æquationis ſupra memoratæ $adsddx = dy^3$, quam Summus Vir, inſtituto examine, Catenariæ competere nobiſcum agnoſcit (*k*); & inſuper peregregie obſervat, quæſitam curvam fore Circulum, ſi habeatur $addx = ds\,dy$ (*l*). His addere liceat, quod ſi ſit $addx = dy^2$, emerſura eſt Curva quæpiam, quæ etſi non ſit ipſa Logarithmica, ejus tamen ope ſic conſtruitur: Eſto logarithmica AF [*Figura* 10.] cujus aſymptotos DG, & applicata AC æqualis ſubtangenti $= a$. Hac, ceu radio, ſuper C deſcribatur Circuli Quadrans AED, ſumptoque ubivis in logarithmica puncto F, ducantur per illud rectæ FE, FH, parallelæ ipſis DG, AC, eaſdemque reciproce ſecantes in B & G. Dico, ſi abſcindatur GH = arcui AE, fore punctum H in curva quæſita CH; cujus a logarithmica diverſitatem, vel ſolus vertex C, quo hæc altera caret, arguit. Quam conſtructionem ſibi nuper communicatam Illuſt. Hospitalius hac demonſtratione ſynthetica munivit (*m*). Ponatur $CA = a$, $CG = x$, $GH = y = AE$, $GF = z = CB$, habebiturque ob logarithmicam $dx = -adz : z$, & propter circulum $dy = adz : \sqrt{(aa - zz)}$. Sed ex hypotheſi [ob ſuppoſita ds æqualia] debebit differentiale ipſius

(*k*) Vid. N^{um}. XLVIII. Nota (e) pag. 485.

(*l*) Integrando enim eſt $adx = yds$ [ds ponitur conſtans] & $a^2dx^2 = y^2ds^2 = yydy^2 + yydx^2$, vel $(a^2 - y)$ $dx^2 = y^2dy^2$, aut denique $dx = ydy : \sqrt{(a^2 - y^2)}$; & integrando rurſus $x = a - \sqrt{(aa - yy)}$, quæ æquatio eſt ad circulum.

(*m*) En Analyſin. Ponatur $ds : a = dy : u = dx : t$, & quoniam eſt $ds^2 = dy^2 + dt^2$, pariter erit $a^2 = t^2 + u^2$, adeoque $tdt + udu = 0$, & $tdt = -udu$. Rurſus erit $dx = tds : a$, & $ddx = dtds : a = dtdy : u$, [cum ſit $ds : a = dy : u$] quo ſubſtituto in æquatione propoſita $addx = dy^2$, ea evadet $adtdy : u = dy^2$, unde fit $dy = adt : u = adt : \sqrt{(aa - tt)}$. Igitur $y =$ arcui circuli AE cujus ſinus $BE = t$. Sed eſt quoque $dx = tdy : u = \frac{t}{u} \times \frac{adt}{u} = atdt : uu = -audu : uu = -adu : u$. Igitur $x =$ logarithmo ipſius $u = \sqrt{(aa - tt)} = CB = FG$.

ipſius $ds^2 = [dx^2 + dy^2 = a^4dz^2 : (aazz - z^4)]$ æquari nihilo: No. LVI.
quare $aazddz - z^3ddz - aadz^2 + 2zzdz^2 = 0$. ſive $zzdz^2 = aadz^2 - zzdz^2 - aazddz + z^3ddz$, hoc eſt, facta multiplicatione per aa, & diviſione tum per zz, tum per $aa - zz$. $aadz^2 : (aa - zz) = (aadz^2 - aazddz) : zz$, hoc eſt $dy^2 = addx$. Q. E. D. Subjungi poteſt & hoc leviuſculum, Curvam, in qua ipſa ddx proportionalia reperiuntur ipſis dy, vel dy^2, vel dy^3, &c. perpetuo fore Parabolam; ſicubi loco ds ipſa dy æqualia ſupponantur. Et generaliter, poſitis dy æqualibus, ſi æquentur quoque ipſa dx, quæſita linea erit Recta: ſi ipſa ddx. Parabola communis: ſi d^3x, Parabola Cubica: ſi d^4x, Biquadratica, &c. (*n*)

Atque hæc poſſunt eſſe ſpecimina qualiumcunque profectuum, quos a paucis retro annis in Geometria interiore fecimus; ſi addantur iis nuperæ meæ Florentini Ænigmatis, & Problematis de minimo Crepuſculo ſolutiones *, quarum prior [quanquam ſupprimenda, ſi de *Leibnitiana* † conſtitiſſet] quædam me judice haud contemnenda continet, dum §. 4 modum generalem ſuppeditat, cuicunque Figuræ planæ, ſeu rectilineæ, ſeu curvilineæ, quadrabili, vel non quadrabili, geometricæ, vel mechanicæ, ſeu libera denique manu formatæ, æqualem ex ſuperficie ſphærica portionem abſcindendi; quo ipſo utique multo plus me præſtitiſſe autumo, quam Auctor Florentinus poſtulaverat. Sciendum

(*n*) Si poſitis dy æqualibus, æquentur quoque dx, iſta illis erunt proportionalia; pone igitur $adx = dy$, & integrando, habebis $ax = y$, æquationem ad rectam.

Si ipſa ddx ſint conſtantia, pone $addx = dy^2$, & integrando bis, fiet $ax = \int\int addx = \int\int dy^2 = \int dy \int dy = \int ydy = \frac{1}{2}yy$, æquatio ad Parabolam.

Si ſit $a^2d^3x = dy^3$, integrando ter, habebis $a^2x = a^2\int\int\int d^3x = \int dy \int dy \int dy = \int dy \int ydy = \int \frac{1}{2}yydy = \frac{1}{6}y^3$, æquationem ad Parabolam cubicam.

Pariter $a^3d^4x = dy^4$, integrando quater, dat $a^3x = a^3\int^4 d^4x = \int^4 dy^4 = \int dy \int dy \int dy \int dy = \int dy \int dy \int ydy = \int dy \int \frac{1}{2}yydy = \int \frac{1}{6}y^3dy = \frac{1}{24}y^4$, æquationem ad Parabolam biquadraticam; &c.

* N[is]. LII. pag. 512, & LIII. pag. 515.

† Quæ extat in *Actis Erud. Lipſ.* 1692. Jun. pag. 275.

No. LVI. dum autem, ambo quoque Problemata a *Fratre* meo Pariſiis ſoluta eſſe, poſterioriſque de Crepuſculo ſolutionem, inſcio me, *Diario Gallico* inſertam, cui cum mea apprime convenit, hoc non obſtante, quod ille ſoliditatem ſphæræ introſpiciendo, ego ſuperficie tenus duntaxat eam contemplando, diverſiſſima uterque via in hac inveſtigatione uſi fuerimus. Habemus vero & alia his plura & majora, quæ etiamnum premimus: at illa quantacunque ſint, num metas has tranſiliant, quas Summus Geometra [tam eximia & invidenda in hoc ſtudiorum genere, tum in *Actis* paſſim, tum in privatis ad me litteris porro pollicitus] attigit, noſtrum judicare non eſt. Id certe de ſe cogitare, ut hominis vaniſſimi; ſic palam profiteri inſanientis prorſus foret. Suſpicimus Virum nunquam ſatis laudatum, ut decet; & ab ejus lumine lumen nobis accenſum grati agnoſcimus: ac quanquam fieri forte poſſit, ut in nonnulla inciderimus, ad quæ ipſi, aliorum negotiorum mole obruto, attendere vel penetrare non licuit, hæc tamen & ipſa ei accepta ferenda putamus; quandoquidem huic, qui glaciem fregit aliis, gratia debetur, non ob ea tantum, quæ invenit ipſemet, ſed & quæ alii jactis ab ipſo fundamentis inædificaverunt. Cæterum exiſtimavi ſemper & exiſtimo etiamnum, promotionem ſcientiarum non unius ætatis, nedum hominis, opus exiſtere, ſed aliquot plurium in diverſis ſeculis viventium, ſtudiaque ſua in communem ſcopum dirigentium; quorumque poſteriores priorum veſtigia legendo, & pergendo ubi illi deſiere, priſtinis inventis nova & majora ſuperaddant: & quemadmodum, nobis maturiorem ſcientiarum ætatem adeptis, nunc ludus jocuſque videntur, quæcunque Veteres, utut ingenio nobis neutiquam inferiores, [at noſtris ſubſidiis, in illa Geometriæ infantia, deſtituti] tam operoſe invenerunt ac demonſtrarunt; ita perſuaſum omnino habeo, venturos poſt nos, qui, licet ingenio noſtris Heroibus non prævaleant, ex eorum tamen inventis anſam captare poterunt pomæria vaſtiſſimæ ſcientiæ proferendi, ultra quam fortaſſe, ne cogitando quidem, nunc aſſequi valeamus. Interim tanta quiſque laude dignus cenſebitur, quantum ad illa latius extendenda de ſuo contulerit; neque po-

ſtremi

ſtremi pluris æſtimabuntur, quod longius progreſſi ſint, & plura detexerint, quam omnium primi, qui illis ad hoc perveniendum viam ſtraverunt. No.LVI.

N°. LVII.

PROBLEMA

Ab Eruditis ſolvendum,

Propoſitum

A *Johanne* BERNOULLI.

QUæritur qualis ſit Curva AC, quæ hanc habet proprietatem, ut, ducta ubicunque tangente CD terminata ab axe AE, portio ejus abſciſſa AD ſit ad tangentem CD in ratione M ad N. *Act. Erud. Lipſ.*1693. Mai.p.235.

Problema hoc ſolutu dignum eſt, & facile Mathematicorum applicationem meretur. In quacunque enim ratione ſit M ad N, curva ABC ſemper eadem facilitate motu quodam continuo deſcribi poteſt; non obſtante, quod curva, pro ratione M ad N, magis vel minus compoſita evadat: in caſu quippe rationis æqualitatis illico patet, curvam ABC eſſe circulum; in reliquis, ſi M ad N eſt ut numerus ad numerum, erit quidem curva geometrica, ſecus autem tranſcendentalis eſt. Quæritur generalis determinatio puncti in curva.

Digitized by Google

No. LVII.

JACOBI BERNOULLI
SOLUTIO
PROBLEMATIS FRATERNI
Ante octiduum Lipſiam tranſmiſſi.

Act. Erud. Lipſ. 1693. Jun. p. 255.

ELegans eſt hoc Problema, in quod incidimus occaſione *Hugenianorum* quorundam, quæ nuperrime in *Actis Roterodamenſibus* comparuere *.. Ei ſe primo applicuit *Frater*, cumque paulo poſt ſignificaret ſe voti ſui factum compotem, operæque pretium eſſe ut ſolvatur, cumque in finem etiam Problema publice proponendum, tecta ſolutione, *Lipſiam* mitteret, Auctor mihi extitit, ut & ipſe tentarem, & quam reperi ſolutionem ſequentem [omiſſa tamen demonſtratione, ne aliis idem inveniendi voluptatem adimerem] cum Publico communicarem; neſcius etiamnum, an & quouſque cum Fraterna conſpiret.

In data poſitione recta AB [*Fig.* 1. & 2] aſſignatum eſt punctum A, & quæritur Curva AC, in qua, ſumpto ubivis puncto C, ductaque per illud recta tangente CD, abſciſſa AD ſit ad tangentem DC in conſtante ratione n ad 1.

SOLUTIO, Abſciſſa quavis AD, centro D, radio DC [qui ſit ad abſciſſam AD, ut 1 ad n] deſcribatur arcus circuli; fiatque ut aggregatum unitatis & dicti radii ad poteſtatem $\pm 2n$ elevati, ad eorundem differentiam; ſic ipſe radius, ad rectam DB auferendam ex poſitione data AB. Dico, ſi ſuper B erigatur recta

* *Hiſtoire des Ouvrages des Sçavans.* Fevr. 1693.

ſta BC perpendicularis ipſi AB, ſecanſque arcum circuli in C, No.LVII.
fore punctum C in curva optata AC (a).

Eximium autem uſum habet hoc Problema. Primo enim hinc conſtat, infinitas eſſe diverſiſſimorum generum Curvas, communi hac proprietate gaudentes, ut recta AD, DC, conſtantem rationem habeant; omnes vero illas eſſe geometricas, [quanquam aliæ aliis magis minuſve ſint compoſitæ,] in quibus hæ lineæ ſe habent, ut numerus ad numerum. Deinde omnes hæ Curvæ deſcribuntur motu continuo fili GDC in alterutra extremitate C pondus annexum habentis hoc pacto: In Triangulo AFE [*Fig.* 2] rectangulo ad A, cujus crus AE æquale ſit longitudini fili GDC, applicetur norma BDH, ea ratione ut dum crus DB ſuper AB verſus A volvitur, alterum HD fili portionem GD ante ſe pellendo, lateri Trianguli AE perpetuo parallelam manere, ejuſque extremitatem G, ſuper hypothenuſa FE incedere cogat: ſic fiet, ut pondus extremitati C annexum & attractum curvam deſcribat AC ita comparatam, ut AD ſit ad portionem fili DC, Tangentem ſcilicet Curvæ, in ratione data crurum Trianguli AF & AE (b). Unde patet, ſi conſtructiones ejuſmodi cenſendæ ſunt geometricæ & accuratæ, æquationes infinitas altiſſimorum graduum, pari cum ſimpliciſſimis omnemque pene fidem excedente facilitate, conſtrui poſſe. Denique nec hoc tacendum, quod

Dddd 3

(a) Conſtructionis hujus analyſim, qualem ipſe inſtituit Auctor, vide N°. CIII. Art. 19.

(b) Filum DC, quod ponduſculum C trahit, tangit perpetuo curvam AC hujus ponderis motu deſcriptam. Sed eſt filum CDG æquale rectæ AE, vel DGH. Igitur DC = GH. Eſt autem GH [ſive tangens DC] ad EH [vel abſciſſam AD], ut AE ad AF, ob ſimilia Triang. EHG, EAF. Verum adnoto non facile eſſe hujuſmodi motu deſcribere alteram partem I*c*K curvæ, ubi reſecta A*d* abſciſſam A*b* longitudine ſuperat. Ibi enim, non ſumma rectarum *cdg*, ſed earumdem differentia, datæ rectæ AE æqualis eſſe deberet. Neque tamen hæc ita accipi velim, quaſi impoſſibile eſſet comminiſci rationem aliquam motus continui, quo & pars curvæ I*c*K deſcribi queat.

Digitized by Google

No. LVII. quod ſolutio hujus Problematis abſtruſæ Methodi Tangentium inverſæ plurimum perficiendæ & promovendæ magnum lumen præbere poſſit.

N°. LVIII.

CURVATURA LAMINÆ ELASTICÆ.

Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere incluſi fluidi expanſi.

Radii Circulorum Oſculantium in terminis ſimpliciſſimis exhibiti;

Una cum novis quibuſdam Theorematis huc pertinentibus, &c.

Acta Erud. Lipſ. 1594. Jun. p. 262.

POſt triennale ſilentium promiſſi tandem fidem libero; ſed ita, ut moram, quam Lector alias inique ferre poſſet, nonnullo fœnore compenſem, dum Elaterum curvaturam non in una ſola, [ut initio fueram pollicitus] ſed generaliter in quacunque extenſionum hypotheſi conſtructam exhibeo; quod primus, ni fallor, exequor, poſtquam a multis inutiliter tentatum Problema fuiſſet. Extitit enim jam inde a GALILÆI quoque temporibus celebre, qui curvam hanc, perinde ut Funiculariam, Parabolam eſſe ſuſpicatus erat. Eandem denique ſententiam tuitus eſt Pater *Gaſto* PARDIES Gallus, in exiguo tractatu de *ſtaticis,*

Digitized by Google

ſtaticis †, ubi tamen in rem præſentem nil niſi paralogiſmos meros cenſuit. Et nuper adeo ejuſdem Societatis Vir *Franciſcus Tertius de Lanis*, in prolixo ſuo opere *Magiſterii naturæ & artis*, *Tom. 2 lib. 7.* [ubi multa huc facientia & lectu digna habet] idem evincere conatur, ſed ratiocinio plane præpoſtero: ut vel hinc non ſine voluptate percipere liceat, quantopere Prædeceſſores noſtri, interioris Geometriæ cognitione deſtituti, ſe torſerint, pro inveſtiganda re, quam in illa caligine abſque ejus adminiculo ſcire non poterant. Dixeram in *Actis Eruditorum* 1691, pagina 289. * Problema hocce plus difficultatis habere *Funiculario*, nec ſine ratione. Ut enim alia taceam, notandum, duas præſto eſſe claves in *Catenarii* inveſtigatione, quæ ad duas differentes æquationes viam ſternunt, quarum una naturam curvæ per relationem ipſiuſmet ad coordinatas ejus, altera per relationem fili evolventis ad eaſdem exprimit; cum ad curvæ Elaſticæ naturam indagandam poſteriore tantum clave aditus pateat. Hinc enim manifeſto ſequitur, fieri bene poſſe, ut quiſpiam prioris Problematis difficultates ſuperet, nec tamen protinus alterius quoque victor evadat; deſtitutus nimirum clavium altera, quæ dictam relationem fili evolventis ſeu radii circuli oſculatoris [non quomodocunque, ut factum in *Actis Lipſienſibus Menſis Januarii* 1691 ** pag. 22,] ſed in terminis ſimpliciſſimis & pure differentialibus exhibeat. Hæc nobis jam eo tempore, quo ſpeculationi funis vacabamus, innotuerat, eamque mox nonnullis inter peregrinandum communicavit *Frater*; præterea dum immenſa inventi utilitas in reſolvenda *Velaria*, & hac, quam præ manibus habemus, *Elaterum Curvatura*, aliiſque ſublimioribus, quotidie magis magiſque ſeſe mihi explicuit, effecitque tandem, ut non poſſim publico aureum Theorema diutius invidere; præſertim cum hoc unum adhuc Geometris defuiſſe videatur, quominus æque feliciter in recenſitis Problematis, atque in altero illo, verſati fuerint. N.LVIII.

Priuſ-

† *Des forces mouvantes.* Art. CIII.
* Supra N°. XLII. pag. 451 & 452.
** N°. XLI. pag. 440. 441.

XLVIII. Priuſquam itaque ad inſtitutum pergam, ſunto in *Fig.* I. portiunculæ Curvæ infinite parvæ a b, bc, quibus perpendiculariter inſiſtant radii circuli oſculatoris af, bf, concurrentes in puncto f, facienteſque angulum a f b æqualem angulo g b c, quem producta portio a b cum altera bc efficit; tum abſcindatur bh = bc, ductæque intelligantur parallelæ a l, b n, co, nec non b l, h o m, g e n; quarum illæ abſciſſarum, hæ applicatarum elementa [ſive *dx*, *dy*, *ddx*, &c.] indigitent. Dico,

α. Quod poſitis Curvæ elementis ab, bc, hoc eſt, ipſis *ds* æqualibus, radius circuli oſculatoris ſeu longitudo fili evolventis af, nempe $z = dx\,ds : ddy$; item $z = dy\,ds : ddx$. Nam ho: bc = ho: he + hc: be = [ob ſimilitudinem Triangul. bmh, hoc, item hcb, abf] bm: bh + ab: bf = al: ab + ab: bf = al: bf = $dx : z$. Sed h o = h m — n c = b l — n c = ddy, & bc = ds. Quare $ddy : ds = dx : z$. Eodem modo oſtendetur $ddx : ds = dy : z$. Q. E. D.

Corollarium. In omni Curva, poſitis ejus elementis æqualibus, differentiæ ſecundæ coordinatarum primis reciproce proportionantur. Cum enim $dx\,ds : ddy = z = dy\,ds : ddx$ erit $dx\,ddx = dy\,ddy$, adeoque $ddx : ddy = dy : dx$; quod ipſum quoque ex ſola ſimilitudine Triangulorum bmh, hoc, liquet; ubi co, ſeu *ddx*, eſt ad oh, ſeu *ddy*, ut hm ad bm, vel bl ad al, ſeu *dy* ad *dx*.

β. Poſitis vero abſciſſæ elementis a l, b n, hoc eſt, ipſis *dx* æqualibus, erit radius oſculantis circuli a f ſeu $z = ds^3 : dx\,ddy$. Quoniam g c: b c = g c: h c + h e: b c = [ob ſimilitudinem Triangul. b n g, c h g, nec non h c b, a b f] b g: b n + a b: b f = a b: al + ab: b f = $ds : dx + ds : z = ds^2 : z\,dx$: atque gc = gn — nc = bl — nc = ddy, & bc = ds, erit $ddy : ds = ds^2 : z\,dx$. Q. E. D.

Haud abſimiliter oſtendetur, quod poſitis *dy* æqualibus, futurum eſt $z = ds^3 : dy\,ddx$.

His addo nova, de quibus nec *Fratri* adhuc conſtat, Theoremata pro curvis, quarum applicatæ non ſunt parallelæ, ſed in com-

communi puncto coeunt: poſito namque radio circuli ſuper polo ſeu umbiculo hoc deſcripti a; abſciſſa peripheriæ ejus, x; & intercepta inter polum & datam curvam, y: erit radius oſculantis circuli $z = adyds : (2dxdy + yddx)$ vel $aydxds : (ydx^2 - aaddy)$ ſi elementa Curvæ ds; & $z = ads^3 : (dxds^2 + dxdy^2 - ydxddy)$ ſi ipſa dx: & denique $z = ads^3 : (dxds^2 + dxdy^2 + ydyddx)$ ſi ipſa dy æqualia intelliguntur. Eſt vero in ejuſmodi Curvis $ds = \sqrt{(yydx^2 + aady^2)} : a$ (a). Hac via duce cognovi, radium N.LVIII.

(a) Sit [Fig. A] Ad $= a$, de $= dx$, em $= dx + ddx$, Aa $= y$, lb $= dy$, nc $= dy + ddy$, al $= ydx : a$ bn $= (ydx + dydx + yddx) : a$, ab $= ds = \sqrt{(aady^2 + yydx^2)} : a$, bc $= ds + dds$, af $= z$. Producatur a b in h, & centro b, deſcribatur per c, arculus c h; fiatque angulus nbg $=$ lab, &, addito utrinque recto, erit gbA $=$ baA, adeoque hbg $=$ [hbA $-$ gbA $=$ aAb $+$ baA $-$ gbA $=$] aAb, unde fit Ad [a] : de [dx] $=$ bh [$ds + dds$] : ho [$(dxds + dxdds) : a$]. Præterea ſimilitudo Triangul. alb, bng, dat al [$ydx : a$] : bn [$(ydx + dydx + yddx) : a$] $=$ bl [dy] : ng [$(ydydx + dy^2dx + ydyddx) : ydx$], unde demto nc [$dy + ddy$] relinquitur gc $= (dy^2dx + ydyddx - ydxddy) : ydx$. Rurſus ex ſimilitudine Triang. goc, & gbn vel bal, ſequitur, ba [ds] : al [$ydx:a$] $=$ gc [$(dy^2dx + ydyddx - ydxddy) : ydx$] : co [$(dy^2dx + ydyddx - ydxddy) : ads$]. Ergo ch $=$ co $+$ ho $= (dxds^2 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy + dxdsdds) : ads$; ac denique ſectores ſimiles cbh, afb, dant ch : cb [$ds + dds$] $=$ ab [ds] : af, unde fit [af] $z = (ads^3 + ads^2dds) : (dxds^2 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy + dxdsdds)$, vel $ads^3 : (dxds^2 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy)$, cum in numeratore ads^2dds, in denominatore $dxdsdds$ præ reliquis terminis evaneſcant. In hac expreſſione radii oſculi, nulla quantitas conſtans ſupponitur. Quare ſi ponantur ipſa dy æqualia, hoc eſt $ddy = 0$, fiet $z = ads^3 : (dxds^2 + dxdy^2 + ydyddx)$ quod ultimum eſt Auctoris noſtri Theorema: penultimum vero, ſeu $z = ads^3 : (dxds^2 + dxdy^2 - ydxddy)$ habetur, ponendo $ddx = 0$, ſeu ipſa dx æqualia. Quod ſi ds [$\sqrt{(aady^2 + yydx^2)} : a$] ſtatuatur conſtans, erit $aadyddy + ydydx^2 + yydxddx = 0$, adeoque $ddy = -ydx^2 : aa - yydxddx : aady$, & $ddx = -dydx : y - aadyddy : yydx$. Subſtitue hunc valorem in formula $z = ads^3 : (dxds^2 + dxdy^2 - ydxddy + ydyddx)$, & fiet $z = ads^3 : (dxds^2 + dxdy - ydxddy - dxdy^2 - aady^2ddy : ydx) = ads^3 : (dxds^2 - (yydx^2 + aady^2)ddy : ydx) = aydxds^3 : (ydx^2ds^2 - aads\,ddy) = aydxds : (ydx^2 - aaddy)$; quod eſt Theorema ſecundum. Hic pro ddy ſubſtitue valorem ejus $-ydx^2 :$ aa

N.LVIII. dium circuli ſpiralem *Archimedaam* oſculantis ubique quartam eſſe proportionalem, ad peripheriam circuli primæ revolutionis, radium ejus, & quantitatem $(xx+aa)\sqrt{(xx+aa)}:(xx+2aa)$. (b)

Sed miſſis & præmiſſis iſtis, redeo in orbitam propoſiti noſtri Problematis, conſtruendo Curvam Elaſticam, ut ſequitur:

I. *Generaliter.*

Eſto ſpatium rectilineum, ſive curvilineum quodvis ABC [*Fig.* 2.] cujus abſciſſæ AE vires tendentes, ordinatæ EF tenſiones repræſentent, eique ponatur æquale quadratum AD, intra quod deſcriptus ſit ſuper A circuli quadrans GKL. Statuatur etiam indefinitæ portioni ſpatii AEF æquale rectangulum AH, ducta recta HI ſecante quadrantem circuli in K, & junctæ AK fiat parallela GM, ipſique AM in ordinata EF [ſi opus ſit] producta capiatur æqualis EN. Erit punctum N ad curvam quandam AN talem, ut ſi ſpatio AEN pergas ſtatuere æquale rectangulum AO, rectaſque OP, FE producas ad communem occurſum in Q, exiſtat punctum Q in curva optata AQR. Nimirum, ſi aſſerculus quidam oblongior, tigillum, virga, pertica, aut lamina quæcunque flexilis, elaſtica, & gravitatis expers AQRSyVA, uniformis ubique latitudinis & craſſitiei RS, AV, longitudinis vero RQA, firmetur una extremitate in RS ad perpendiculum, alterique AV potentia applicetur, ſeu pondus appendatur Z, quantum ſufficit ad laminam incurvandam, donec ipſa ejuſve tangens in A, puta AB, directioni ponderis

$aa - yydxddx : aady$, & erit $z = aydxds : (ydx^2 + ydx^2 + yydxddx : dy) = adyds : (2dxdy + yddx)$; quod eſt Theorema primum.

(b) Eſt in Spirali *Archimedea* $y = ax : c$ [c peripheriam denotat, cujus radius a], atque $dy = adx : c$, & $ddy = addx : c$. Evaneſcente igitur ddx, nulleſcit ddy. Quare radius oſculi $z = ads^3 : (dxds^2 + dxdy^2)$. Eſt autem $ds = \sqrt{(aady^2 + yydx^2)}$: $a = dx\sqrt{(aa+xx)} : c$. Ergo $z = \frac{a}{c} \times \frac{(aa+xx)\sqrt{(aa+xx)}}{2aa+xx}$.

Digitized by Google

deris A Z normalis fiat, acquiret concava laminæ ſuperficies N. LVIII.
RQA curvaturam quam conſtruximus; cui convexa S y V parallela eſt, & evolutione curvæ ejuſdem mn condeſcribitur. (c) Quantum autem ad hoc præſtandum requiratur ponderis, ſic cognoſces: Ponatur vectis SRZ, cujus fulcrum R, brachium longius RZ = BA, brevius æquale craſſitiei laminæ RS, cui affixa ſit portio quæpiam datæ laminæ SY, firmata in X Y; quo facto, ſi longiori vectis extremitati adjiciatur pondus Z, quod extendere poſſit dictam portionem per Triangulum RST, fibram ſcilicet XS per ST, xs per st, reliquaſque proportionaliter, ita quidem ut ST ſit ad BC, ſicut SY rectangulum ſub longitudine & craſſitie portionis laminæ ad ſpatium A B C; erit idipſum quoque pondus quæſitum. (d)

(c) Sit Qy laminæ craſſities $= c$; Qq, elementum curvæ $= ds$, AP $= y$, PQ $= x$, EF $= t$, tenſio quam vis tendens AE, hoc eſt pondus Z agens per vectem AE, vel Q P inducere valet fibræ elaſticæ, cujus longitudo data $= b$, reſiſtenti per vectem SR vel Qy. Igitur tenſio yΩ, quam inducit fibræ ωy, cujus longitudo ds, erit $tds : b$. Et ſimilia Triangula ΩyQ, Qqn, dant Ωy $[tds : b]$: yQ $[c]$ = Qq $[ds]$: Qn [z ſeu, ut oſtenſum eſt, $dxds : ddy$]. Æquando igitur media extremis $tdxds^2 : bddy = cds$, vel $cbddy$, aut $aaddy$ [ponendo $aa = cb$] $= tdxds$ ac integrando $aady = ds\int tdx = Sds$ [faciendo $S = \int tdx =$ AEF]. Ergo $a^4 dy^2 = SSdy^2 + SSdx^2$, unde eſt $dy = Sdx : \surd(a^4 - SS)$, ubi $aa =$ ſpatio ABC. Nam ubi EQ tangit curvam A Q R, abitque in BR, ibi dx reſpectu dy evaneſcit. Ergo $\surd(a^4 - SS)$ evaneſcit, & eſt $a^4 = SS$, vel $a^2 = S$ = ABC.

Atque hinc ſequitur Auctoris conſtructio. Eſt enim AG $= a$, AD $= a^2$ = ABC, AH = AEF $= S$, & A I = AH : AG $= S : a$, atque IK $= \surd(AK^2 - AI^2) = \surd(aa - SS : aa) = \surd(a^4 - SS) : a$. Similia autem Tr. AIK, MAG, dant I K $[\surd(a^4 - SS) : a]$: AI $[S : a]$ = AG $[a]$: AM $[Sa : \surd(a^4 - SS)]$ = EN. Igitur AEN $= \int Sadx : \surd(a^4 - SS)$ = AO $= ay$. Itaque $y = \int Sdx : \surd(a^4 - SS)$; & $dy = Sdx : \surd(a^4 - SS)$.

Hanc fuiſſe Auctoris Analyſin ex N°. LXVI liquet. In qua tamen nonnulla corrigenda videntur, præſertim, quod ad unius duntaxat fibræ ωy tenſionem attenderit, cum tamen omnes fibræ quæ craſſitiem Q y conſtituunt, extendantur, imo potius comprimantur interiores, dum exteriores extenduntur. De quibus videſis Nos ſup. LXVI & CII.

(d) Pondus Z agens per vectem AE, laminæ cujus longitudo $= b$ inducit

N.LVIII. *Scholia* & *Corollaria*. 1. Si lamina inflexa R Q A loco puncti R firmetur alicubi in Q, reſecta portione R Q, ſervabit reliqua ab eadem potentia inflexa eandem curvaturam A Q.

2. Quin & ſi curva RQA, rotata circa R Z, genuerit a parte oppoſita aliam R q ſimilem & eandem ſecum, ſed inverſe poſitam, & lamina cogitatione producta ac loco puncti R in q firmata fuerit, retinebit aucta & eadem potentia compreſſa eandem curvaturam A Q R q.

3. Porro ſi ſegmentum quodvis curvæ A Q rotatum circa rectam Qn ipſi normalem in Q, producat in parte oppoſita ſimile & æquale ſegmentum Qa, formabunt ambo ſegmenta A Q a *Arcum* proprie dictum, qui poſito retinaculo in Q tenditur a duabus potentiis, extremitati utrique ad rectos applicatis, & ſingulis ipſi Z æqualibus. Idem intellige de Arcubus formatis rotatione Curvæ integræ A Q R, vel auctæ portione R q, circa rectam eidem in R, vel q normalem; unde triplex habetur Arcus: Diminutus, Plenus, Auctus. *Diminutus*, quem formant duo ſegmenta minora Curva A Q R: *Plenus*, quem æqualia: *Auctus* quem majora; & hoc diſcrimine cognoſcuntur, quod rectæ tangentes utramque extremitatem Arcus diminuti ad partes ejus convexas, aucti ad concavas, pleni ad neutras inclinant, ſed ſibi mutuo parallelæ ſunt.

4. Eadem quoque curvatura A Q a gaudere conſentaneum eſt *Aſſulas* illas, ex quibus Dolia conficiuntur: unde ſequitur, neminem doliorum capacitatem, quæ vulgo pro Sphæroidibus ellipticis habentur, rite menſuraſſe; cum nulla ratione aſſeratur, aſſeres hoſce curvari in ellipſes.

5. Si directio ponderis, vel cujuſvis potentiæ inflectentis, ad lami-

ducit tenſionem E F, agendo vero per vectem AB = RZ, eidem inducit tenſionem BC. Ergo laminæ SY, cujus longitudo SX, agens per eundem vectem, inducit tenſionem ST = BC × SX : *b*, [ſunt enim, cæteris paribus, tenſiones ut laminarum longitudines]. Atqui *b* = *aa* : *c* = ABC : Q Y = ABC : SR. Ergo ST = BC × SX × SR : ABC, hoc eſt, ST : BC = SX × SR [SY] : ABC.

laminam, ejuſve tangentem in puncto appenſionis ſit obliqua; naſcetur Curva paululum diverſa ab AQR, quam tamen eadem facilitate determinare poſſum. Sed nolo nimium evagari. (e) N.LVIII.

6. Rectangulum ſub radio circuli oſculantis laminam Qn, & reſpondente applicata EF, æquatur conſtanti ſpatio ABC = AD (f). Hinc dicti radii reſpectivis applicatis reciproce proportionantur; & cum iidem quoque linearum curvedines reciproce menſurent, erunt curvedines inflexæ laminæ AQR reſpectivis EF directe proportionales: quapropter in A puncto applicatæ potentiæ curvedo nulla eſt [quod alias in puncto flexus contrarii fieri conſuevit;] hinc eo major, quo remotior unaquæque portio laminæ a linea directionis potentiæ: maxima eſt in R, unde iterum verſus q decreſcit, &c. ſaltem ſi, cum viribus tendentibus AE, ſimul quoque creſcant tenſiones EF; quo quidem nihil univerſalius verum exiſtit.

7. Idcirco, data lege tenſionum invenire curvam Elaſticam, in abſtracta geometria aliud nihil eſt, quam data curva AFC reperire aliam AQR, in qua radii circulorum oſculantium reciproce proportionentur reſpectivis applicatis alterius. Facillima autem eſt converſa hujus: Data curva Elaſtica, una cum radiis circulorum eam oſculantium, invenire legem tenſionum, quam Natura in ejus productione obſervat: utpote ad quem effectum tantum requiritur, ut tertia proportionalis ad radium Qn & conſtantem quandam AG, axi AB reſpective applicetur, ad habendam ſtatim EF. (g)

Conſectantur hinc Theoremata quædam univerſalia prorſus nova. Nam

8. In omni Curva AQR, ſumma tertiarum proportionalium ad radios circulorum oſculantium & conſtantem quandam rectam

(e) Vide Num. LXVI. Art. II.

(f) $EF \times Qn = t \times dx\, ds : ddy = aa = ABC = AD$. Vid. Not. c.

(g) Nam, quia $EF \times Qn = AD = AG^2$, eſt $Qn : AG = AG : EF$.

N.LVIII. AG, applicatarum ad axem Curvæ AB, efficit ſpatium quodpiam ABC = rectangulo ſub una applicatarum EF & reſpectivo circuli oſculantis radio Qn = quadrato AG (h). Quod ipſum quoque per initio demonſtratum Theorema evincitur: Sic enim AE = x, EQ = y, AQ = s, AG = a; erit per memoratum Theorema, Qn = $dx\,ds : ddy$, tertia proportionalis ad hanc & AG, nempe EF = $aaddy : dxds$, quæ ducta in dx gignit differentiale ſpatii ABC, $aaddy : ds$, cujus proin integrale $aady : ds$, efficit indefinite ſpatium AEF; eſt vero pro ſpatio toto ABC, $aady : ds$ = [ob $dy = ds$ in extremitate R] aa = EF × Qn.

9. Sed & ſpatium quodvis intermedium FEef, duabus applicatis EF, ef, interceptum, æquale rectangulo ſub AG, ceu ſinu toto, & differentia ſinuum duorum angulorum, quos tangentes rectæ Qp, rd, in punctis Curvæ Q & r, ad axem AB conſtituunt (i).

10. Iiſdem poſitis quæ prius, Tangens Qp eſt ad ſubtangentem pP, ut ſpatium ABC ad ſpatium AEF: cum enim ſpatium AEF repertum ſit $aady : ds$, erit ds ad dy, hoc eſt, Qp ad pP, ſicut aa, hoc eſt, ABC ad AEF.

11. Quin etiam Qp, pP, PQ, proportionales ſunt ipſis AK, AI, IK, vel MG, MA, AG; ſimiliaque ſunt Triangula QpP, KAI & GMA (k).

12. Quod ſi dictæ tertiæ proportionales ad radios circulorum oſculantium & conſtantem AG, applicentur ad axem alterum curvæ AZ, naſcetur ſpatium AγcZA = ABCFA = AD. Sed AEF ad APγ ut pP, ad differentiam reliquorum laterum Trianguli QpP (l).

13. Si

(h) $\int AG^2 . dx : Qn = \int EF . dx$ = AEF, quod tandem eſt ABC = EF × Qn.

(i) Quoniam AEF = $aady : ds$ = aa × Sinum anguli PQp; & Aef = aa × Sinum anguli wrd, ſeu rde, eſt EFfe = AEF — Aef = aa × differentiam Sinuum, &c.

(k) Qp:Pp:QP = $ds:dy:dx = aa: S:\sqrt{(a^4 - SS)} = a:(S:a):\sqrt{(aa - SS: aa)}$ = AK: AI: IK = MG: MA: AG.

(l) $\int EF . dy = \int t dy = \int (t dx \int t dx :$ √.

13. Si punctum h ſit in cauſtica Elaſticæ ex radiis ipſi PQ, vel AB, parallelis, producaturque radius circuli oſculatoris Qn in b, ad occurſum ipſi AZ; erit Qn ad Qb ut ſpatium AEF ad circumſcriptum rectangulum, ut Qh ad $\frac{1}{2}$ QP (m). N.LVIII.

14. Ut radius AG, ad arcum circuli GK: ſic laminæ craſſities RS vel AV ad exceſſum longitudinis convexæ yV ſupra concavam QA: unde exceſſus iſte arcui GK proportionalis (n).

15. Quoties curva Elaſtica AQR eſt ex numero geometricarum, hoc eſt, algebraicarum [ſic enim illas poſthac appellabo in honorem *Viri Celeberrimi*, qui hoc nomine deſignatas cupit,] curva quoque Tenſionum AFC eſt algebraica, & ſimul ſpatium ABC quadrabile: ſed non viciſſim (o).

16. Si curva tenſionum AFC eſt algebraica & ſpatium ABC quadrabile, Elaſtica AQR nunc eſt algebraica, nunc mechanica: alge-

$\sqrt{(a^4 - SS)}) = \int(SdS : \sqrt{(a^4 - SS)}) = aa - \sqrt{(a^4 - SS)}$. Ergo, quando $S = ABC = aa$, tunc $\int EF.\, dy$, quod eſt AycZA, fit $= aa =$ AD. Ubique autem AEF [S]: APy $[aa - \sqrt{(a^4 - SS)}] = \frac{S}{a} : a - \sqrt{(aa - SS : aa)} =$ AI : AK — IK $=$ Pp : Qp — Pp.

(m) Qh : $\frac{1}{2}$QP $=$ Qf : QP $=$ Qn : Qb $= \frac{dxds}{ddy} : \frac{xds}{dy} = \frac{dx}{x} : \frac{ddy}{dy} = \frac{dx}{x} : \frac{tdxds : aa}{Sds : aa} = S : tx =$ AEF ad rectang. circumſcriptum.

(n) Exceſſus convexitatis Vy ſupra concavitatem AQ $= \int \Omega y = \int tds : b = \int ctds : aa = \int ctdy : S = \int ctdx : \sqrt{(a^4 - SS)} = c\int dS : a\sqrt{(aa - SS : aa)} = \frac{c}{a}$ per arcum circuli, cujus radius a [AG], ſinus $S : a$ [AI] $= \frac{c}{a}$ per arcum GK. Ergo, ut radius a [AG] ad arcum GK, ſic c [RS] ad exceſſum convexitatis ſupra concavitatem. Generalis autem eſt *condeſcriptarum* proprietas ut earum differentia vel ſumma æquetur arcui circuli, quam primus demonſtravit *Joh.* BERNOULLI, Frater Auctoris.

(o) Ubi curva AQR eſt algebraica, habetur $dy : dx$, algebraice. Ergo algebraice data eſt ratio $S : \sqrt{(a^4 - SS)}$, atque $SS : (a^4 - SS)$, & $SS : a^4$, ac $S : aa$. Igitur ſpatium ABC eſt quadrabile. Datur etiam algebraice, ratio $ddy : dxds$, ſeu $t : aa$. Ergo t datur algebraice, hoc eſt, curva AFC algebraica eſt.

Digitized by Google

N.LVIII. algebraica, ſi inſuper curvilineum A E N quadrabile; mechanica, ſi ſecus. Quod ſi curva A F C ſit quidem algebraica, at non contineat ſpatium quadrabile, altera A Q R non alia eſt, quam mechanica ſecundi generis, hoc eſt, quæ ad ſui conſtructionem ſupponit quadraturam ſpatii mechanici primi generis; niſi forte quadraturæ ſpatiorum A E F & A E N a ſe mutuo dependeant, quo caſu Elaſtica non niſi primi generis mechanica eſt.

II. *Specialius.*

Si curva tenſionum A F C ſit paraboloides cujuſvis gradus, hoc eſt, ſi tenſiones EF ſint in quacunque ratione multiplicata, ſeu ſubmultiplicata virium tendentium A E [pro cujus rationis indice pono m] conſtructio curvæ Elaſticæ ſic contrahetur: Facto ſuper A quadrante circuli A B i, capiatur in ejus radio A g, quæ ſit ad A B & A E eo ordine proportionalis, quem indicat numerus $m + 2$, indeque excitata perpendiculari g I, junctaque I A, eique facta parallela i u, applicetur in E recta E N $=$ A u: ſic naſcitur curvilineum A E N, cui ſi fiat æquale rectangulum AO [poſtquam A G æqualis ſumpta fuerit ipſi A B] productis O P, F E, habebitur in optata curva punctum Q. Quod pondus Z ſpectat, cujus ope laminæ elaſticæ hæc curvatura inducatur, tantum in A appendendum eſt, quantum poſſit in diſtantia R Z vel A B extendere fruſtum laminæ S Y per Triangulum RST, quouſque ſcilicet Rectangulum ſub R Z & ST ad Rectangulum SY fiat, ſicut $m + 1$ ad unitatem. (r)

Scholia

(r) Sit A B $= X$, B C $= T$, & curva tenſionum AFC ejus naturæ, ut ſit ubique $= X^m : x^m = T:t$, aut $t = Tx^m : X^m$. Igitur $S = \int tdx = Tx^{m+1} : (m+1)\, X^m = tx : (m+1)$. Æquatio igitur curvæ AQR, quæ generaliter erat $dy = Sdx : \surd(a^4 - SS)$, in hoc caſu ſpeciali erit $dy = txdx : (m+1) \surd(a^4 - ttxx : (m+1)^2) = txdx : \surd((m+1)^2 a^4 - ttxx) =$ [quia $aa =$ ABC $= TX : (m+1)$] $= txdx : \surd(TTXX - ttxx)$.

Hinc

Scholia & Corollaria. 1. Tangens Qp eſt ad ſubtangentem pP, ſicut recta AB ad nuper acceptam Ag. (q) N.LVIII.

2. Recta Qb Curvæ perpendicularis, quarta eſt proportionalis ad tres Ag, AE & AB. (r)

3. Radius oſculantis circuli Qn ad totam perpendicularem Qb [& proinde quoque Rm ad RZ] eſt ſicut 1 ad $m+1$.

4. Et radius reflexus Qh ad incidentem PQ, ut 1 ad $2m+2$. (s)

5. Si ſit curva interminata Rβ, talis, ut applicata ei recta βQP ubique ſit tertia proportionalis ad AE & AB, erit curvilineum AZR$\beta\alpha$A ad quadrantem ABi, ut & pars AP$\beta\alpha$A ad ſectorem Ali; ſicut 2 ad $m+1$. (t)

6. Ra-

Hinc conſtructio: Nam cum ſit $AB^{m+1} : AE^{m+1} = AB : Ag$, erit $Ag = AE^{m+1} : AB^m = x^{m+1} : X^m = tx : T$, & $gl = \sqrt{(AB^2 - Ag^2)} = \sqrt{(XX - ttxx : TT)} = \sqrt{(TTXX - ttxx)} : T$. Similia autem Triangula Agl, Aiu dant $gl : Ag = AB : Au$. Ergo Au [EN] $= Xtx : \sqrt{(TTXX - ttxx)}$. Ergo $AEN = \int Xtxdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)} = AO = AB \times AP = Xy$. Igitur $y = \int (txdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)})$ & $dy = txdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)}$.

Pondus autem Z generaliter tale eſſe debet, ut agens per vectem RZ, laminæ SY tenſionem inducat ST, quæ ſit ad BC, ut SY ad $ABC = AB.BC : (m+1)$, vel, æquando media extremis, & dividendo per BC, ut ſit ST × AB [ST × RZ] $= (m+1)$ SY.

(q) $Qp : Pp = ds : dy =$ [quia $Sds = aady$] $aa : S = \frac{TX}{m+1} : \frac{tx}{m+1} = TX : tx = T : \frac{tx}{T} = AB : Ag$.

(r) $Pp : Qp = [Ag : AB =]$ AE : Qb.

(s) Generaliter, Qn : Qb = AEF : AE.EF [Vide Not. m]. Specialiter, Qn : Qb = AEF [AE × EF : $(m+1)$] : AE × EF $= 1 : m+1$. Et quia Qh : $\frac{1}{2}$QP = Qn : Qb [Vid. Not. n] erit Qh : QP $= 1 : 2m+2$.

(t) Eſt $P\beta = X^2 : x$. Ergo elementum ſpatii $AP\beta\alpha A = X^2 dy : x = X^2 tdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)}$. Elementum vero ſectoris $Ali = \frac{1}{2}$ AB per elementum arcus $il = \frac{1}{2} AB^2 \times dAg : gl = \frac{1}{2} XX.(m+1) x^m dx : \sqrt{(TTXX - ttxx)} = \frac{1}{2}(m+1) XXtdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)}$. Ergo elem. ſpatii AP$\beta\alpha$A ad elem. ſectoris Ali, ut 1 ad $\frac{1}{2}(m+1)$ vel ut 2 ad $m+1$. Et in eadem ratione ſunt ipſa ſpatia, quæ ſimul incipiunt & deſinunt.

N.LVIII. 6. Radius quadrantis Ai ad arcum il eſt, ſicut Laminæ craſſities RS vel AV ad exceſſum, quo convexa ejus longitudo yV ſuperat concavam QA (u).

7. Ex infinitis Paraboloidibus [qualium AFC hic una fingitur, quæque pro curva tenſionum poſſunt accipi,] una ſola eſt, quæ curvam laminæ AQR reddit algebraicam: una ſola, quæ rectificabilem; una ſola, quæ ſpatium ejus efficit quadrabile: quamvis nec hæ ipſæ proprie paraboloidum nomen mereantur. (y)

Nam 1°. ſi $m = 0$, ſive, ſi tenſiones ſint in ratione, ut ſic dicam, nulliplicata* virium tendentium, hoc eſt, ſi EF, BC ſint æquales & paraboloides ABC degeneret in parallelogrammum, Curva laminæ abibit in circulum; prout evidens admodum eſt, cum ob tenſionum æqualitatem nulla ratio ſit, cur majorem minoremve curvedinem in una, quam in altera parte induat.

2°. Si

(u) Eſt generaliter laminæ craſſities ad exceſſum convexitatis ſupra concavitatem, ut radius a ad arcum cujus ſinus $S : a$, [Not. n], vel ut radius $aa : 1$, ad arcum cujus ſinus $S : 1$. Specialiter autem eſt $aa = TX : (m+1)$ & $S = tx : (m+1)$. Ergo radius ad ſinum ut TX ad tx, vel ut X [AB] ad $tx : T$ [Ag]. Quare laminæ craſſities ad exceſſum convexitatis ſupra concavitatem, ut AB ad arcum il, cujus ſinus Ag.

(y) 1. Si curva AQR, cujus æquatio oſtenſa eſt $dy = txdx : \sqrt{(TTXX - ttxx)} = Tx^{m+1} dx : X^m \sqrt{(TTXX - TTx^{2m+2} : X^{2m})} = x^{m+1} dx : \sqrt{(X^{2m+2} - x^{2m+2})}$ ſit algebraica, neceſſe eſt differentialem $x^{m+1} dx : \sqrt{(X^{2m+2} - x^{2m+2})}$ eſſe integrabilem. Ea vero nequit integrari niſi quando eſt $m+1$ æqualis fractioni affirmativæ, cujus denominator impar, aut fractioni negativæ, cujus denominator par. Illa autem fractio, ſi ſit AFC paraboloides, hoc eſt, ſi m ſit numerus integer, alia eſſe nequit quam $\frac{1}{1}$. Ergo curva AQR non eſt algebraica, niſi $m = 0$. Eo autem in caſu æquatio abit in hanc $dy = xdx : \sqrt{(XX - xx)}$ aut integrando, $a - y = \sqrt{(XX - xx)}$, quæ eſt ad circulum, centro Z, radio ZR, vel ZA deſcriptum.

Quod ſi, non ſolum paraboloides, ſed etiam hyperboloides pro curvis tenſionum AFC ſumi poſſe concedatur, tunc innumeræ curvæ AFC dabunt curvam AQR algebraicam.

2. Quo-

2°. Si $m = -\frac{1}{2}$, id eſt, ob indicem negativum, ſi tenſiones ponantur in ratione ſubduplicata reciproca virium tendentium [quo caſu Curva AFC verius eſt hyperboloides] naſcetur Curva laminæ rectificabilis; tota quippe AQR dupla rectæ AB, ſicut portio ejus RQ dupla mediæ proportionalis inter AB & BE. At talis hypotheſis, qua creſcente vi tendente minuatur tenſio, & decreſcente augeatur, naturæ legibus & conſuetudini ubique adverſatur. N.LVIII.

3°. Si denique $m = 1$, quæ vulgo recepta eſt hypotheſis, hoc eſt, ſi tenſiones ſint in ſimplici ratione virium [quo caſu curvilineum ABC abit in Triangulum] complectetur ſic curvata lamina ſpatium quadrabile. De hoc vero nunc fuſius.

III. *Specialiſſime.*

Vulgaris [ut modo dixi] eſt hypotheſis, *extenſiones viribus tendentibus proportionales eſſe:* qua eſt uſus olim Celeberrimus

2. Quoniam $ds = aady : S = (TX : (m+1) \times (x^{m+1} dx : \surd(X^{2m+2} - x^{2m+2}) : (Tx^{m+1} : (m+1) X^m) = X^{m+1} dx : \surd(X^{2m+2} - x^{2m+2})$; toties erit curva AQR rectificabilis, quoties differentialis hæc poterit integrari. Ea vero poteſt ſemper integrari, quando $2m+2$ fractio eſt, hoc eſt, quando $m = \frac{1}{2r} - 1$, ſumendo r pro numero quocunque integro affirmativo; ſpeciatim ſi $r = 1$, erit $m = -\frac{1}{2}$, ſeu $t = 1 : \surd x$, & Elaſticæ curvæ æquatio $dy = dx \surd x : \surd(X - x)$, quæ eſt ad Cycloidem, axe AB, ſemibaſi AZ deſcriptam. Hujus autem longitudo, ut notum, æqualis eſt duplæ diametro AB circuli genitoris & portio quævis cujus applicata EQ æqualis eſt duplo mediæ proportionalis inter AB & BE.

3. Spatium AQP $= \int x dy = \int(x^{m+2} dx : \surd(X^{2m+2} - x^{2m+2})$ quadrabile eſt, ſi hæc quantitas integrabilis. Integrari autem poteſt, quando $m = (1 - 2r) : (1 + 2r)$ vel $-(6 + 2r) : (4 + 2r)$, ubi r numerum quemcunque integrum, & ipſum o repræſentat. Fac $r = 0$, & $m = (1 - 2r) : (1 + 2r)$ dat $m = 1$, qui caſus eſt ſpecialiſſimus de quo infra fuſius.

N.LVIII. *Dnus* LEIBNITIUS in acutiſſima ſua lucubratione *De Reſiſtentia ſolidorum*; & ipſemet ego in præſente materia, priuſquam generalem Problematis conſtructionem adinveniſſem. Quapropter operæ pretium exiſtimo, naturam & proprietates Curvæ noſtræ in hac hypotheſi paulo ſpecialius exponere: quanquam pro ipſa hypotheſeos hujus, ſicut & pro alterius cujuſvis veritate multum militare nolim; perſuaſum potius habens, nullam conſtantem tenſionum legem in Natura obſervari, ſed eam pro diverſa corporum textura diverſam exiſtere; id quod experimenta, tum noſtra, tum aliorum abunde confirmare videntur, quorum plurima prælaudatus Author induſtrius *Magiſterii naturæ & artis*, loco citato, recenſet.

Conſtructio. Per punctum E, [*Fig.* 3] ſumptum ubivis in radio AB circuli BiGL, agantur recta Ei & radio perpendicularis EF; e qua producta [ſi opus ſit] abſcindatur EN, quæ ſit ad AB, ſicut quadratum AE ad rectangulum FEi [quod fieri poteſt per generalem conſtructionem, ſumendo Ag tertiam proportionalem ad AB & AE, & ducendo gl, Al & huic parallelam iu: vel ſi videatur commodius, ducendo Ff parallelam AB & ſecantem Ei in f, junctæque fA agendo parallelam ac, abſcindentem ex Ei partem Ea = EA; utrovis enim modo repertæ Au vel Ee ſumenda æqualis EN:] ſic erit punctum N ad curvam AN claudentem ſpatium AEN; cui ſi porro ad radium AG conſtituatur æquale rectangulum AO, & producantur NE, OP ad mutuum occurſum in Q, erit punctum Q in curvatura optata AQR; ad quam inducendam Laminæ tantum ei in A pondus appendendum, quanto poſſit [in *Figura* 2.] extendi SY donec rectang. RZ × ST, fuerit duplum rectang. SY. Sic ut pateat, eam non ſecus atque catenariam tranſcendentem eſſe, & ad ſui conſtructionem quadraturam ſpatii curvilinei requirere (*a*).

Cele-

(*a*) Si ſint tenſiones viribus tendentibus proportionales, fiat [Not. p] $m = 1$, vel $t = x$ & $T = X$, eritque curvæ Elaſticæ æquatio $dy = xxdx : \surd (X^4 - x^4)$ vel $xxdx : \surd (a^4 - x^4)$ ponendo nunc $a = AB = X$. Quæ, ſecundum Auctoris præſcripta conſtruitur, capiendo EN [$axx : \surd$

Celeberrimus D. Leibnitius ingenioſiſſimum modum præſcribit, conſtruendi Catenariam ope ſolius Logarithmicæ, abſque ſuppoſitione quadraturarum; eoque ſane perfectiſſimum in Tranſcendentibus conſtruendi genus exhibet : dolendum tantum quod non ſit univerſale; nec enim ſuccedit in iis curvis, quæ ad ſui conſtructionem Circuli quadraturam requirunt ; plurimæque dantur aliæ, quæ mechanicæ cum ſint, nec tamen a Circuli, nec ab Hyperbolæ tetragoniſmo [hoc eſt, a Logarithmicæ deſcriptione] dependent. Poteſt vero certo charactere cognoſci, utrum curva aliqua mechanica ope Logarithmicæ conſtrui poſſit, necne. Poſita enim Æquatione differentiali curvæ $ady = tdx$; [ubi dx & dy elementa coordinatarum deſignant, a quantitatem conſtantem, t quantitatem aliam quamcunque, quam ex indeterminatis ſola x ingrediatur ;] Dico, ſi qua arte reperiri poſſit curva algebraica, cujus x abſciſſam denotet, cujuſque ſubtangens tertia ſit proportionalis ad t & a, certo ſecuturum, curvam optatam ope Logarithmicæ conſtruibilem eſſe ; cum ad hoc præſtandum nihil aliud requiratur, quam ut ſingulis applicatis curvæ algebraicæ ſumantur æquales applicatæ in Logarithmica [cujus ſubtangens ſit $= a$], & ex iis [productis, ſi opus] reſecentur ſingulæ abſciſſæ, ad habenda totidem puncta, per quæ optata curva tranſire debet. Quod ſi vero nulla detur curva ex algebraicarum numero, cujus ſubtangens dictam tertiam proportionalem N.LVIII.

$\sqrt{(a^4 - x^4)}$] quæ ſit ad AB [a] ut AE^2 [xx] ad rect. FE [$FE \times Ei = \sqrt{(aa - xx)} \times \sqrt{(aa + xx)} = \sqrt{(a^4 - x^4)}$] ; vel ſumendo Ag [$xx : a$] tertiam proportionalem ad AB [a] & AE [x], ducendo gl, [$\sqrt{(aa - x^4 : aa)} = \sqrt{(a^4 - x^4) : a}$], Al, & huic parallelam iu, quæ dabit Au [= EN] $= axx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ propter gl : Ag = Ai : Au ; aut etiam, ducendo Ff parallelam AB, quæ dabit $Ef = \sqrt{(a^4 - x^4) : a}$, propter Ai [$a$] : Ei [$\sqrt{(aa + xx)}$] = EF [$\sqrt{(aa - xx)}$] : Ef; capiendo Ea = EA = x & agendo ipſi Af parallelam ac, quæ ex EA abſcindet $Ec = axx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$, propter Ef [$\sqrt{(a^4 - x^4) : a}$] : EA [$x$] = Ea vel EA [$x$] : Ec, vel EN. Ita enim erit $ay = AG \times AP = AO = AEN = \int axxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$, adeoque $y = \int xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$.

Pondus autem Z tale eſſe debet [Not. p] ut ſit $ST \times RZ = (m+1) SY = 2SY$.

N.LVIII. nalem æquet, fruſtra quoque quis conſtructionem imperatam ſolius ope Logarithmicæ molietur (*b*). Quocirca ſi in noſtra curva [cujus æquatio differentialis eſt $xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$] præſtandum eſſet quod Acutiſſimus Geometra præſtitit in Funicularia, indagandum prius foret, num curva quædam detur algebraica, quæ ſubtangentem habeat $a\sqrt{(a^4 - x^4)} : xx$; quod aliis indagandum relinquo, ut leve habeant ſpecimen, quo univerſales ſuas, quas jactant, tangentium methodos inverſas explorent. Ego ob graves cauſas ſuſpicor curvæ noſtræ conſtructionem, a nullius Sectionis conicæ ſeu quadratura, ſeu rectificatione dependere. Sed pergo ad ejus præcipuas affectiones:

1. Ducta tangente Qp, erit ſubtangens Pp quarta proportionalis ad AB, AE & EN. Ipſa vero EN quarta proportionalis ad AB, AE & tangentem Qp: ideoque

2. Inter tangentem Qp & ſubtangentem Pp media eſt proportionalis EN. Hinc Pp: Qp $=$ AE^2 [QP^2]: AB^2 $=$ Ag: AB. (*c*) Et hæc eſt proprietas characteriſtica Curvæ, quam texi involucro *Menſe Junio* 1691 *, cujus ſenſus hic eſt: *Portio axis applicatam inter & tangentem eſt ad ipſam tangentem, ſicut quadratum applicatæ ad conſtans quoddam ſpatium.* Logogryphi tunc adhibiti ratio conſiſtit in tribus alphabetis vicariis, ex quibus litteræ alternatim deſumptæ ſunt: eædem vero ad alphabetum naturale ita referuntur, ut hujus litteræ *a*, reſpondeat vicarii

(*b*) Si ſit curva algebraica, cujus *x* abſciſſa, *u* ordinata, ſubtangens [$udx : du$] $= aa : t$, erit $aadu : u = tdx = ady$, adeoque $y =$ log. *u*, atque ideo curva, cujus æquatio eſt $tdx = ady$ poterit conſtrui per logarithmicam. Sed de hujus methodi univerſalitate, vide Nos. LXIV. & LXVI.

(*c*) $Pp = xdy:dx = x^2 : \sqrt{(a^4 - x^4)} = x.(axx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) : a =$ AE $\times$ EN : AB.

$Qp = xds : dx = aax : \sqrt{(a^4 - x^4)} = a.(axx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) : x =$ AB $\times$ EN : AE.

Ergo Pp $\times$ Qp $=$ EN^2. Ac Pp: $Qp = \frac{AE \times EN}{AB} : \frac{AB \times EN}{AE} = AE^2 :$ $AB^2 = \frac{AE^2}{AB}$ [Ag]: AB.

* N°. XLII. pag. 452.

N.LVIII.

viearii primi b, ſecundi d, tertii g; cæteris elementis ordine continuo ſuccedentibus. Id quod ipſum Logogryphum tentanti, ex retecta quam involvit propoſitione obſcurum eſſe non poteſt.

3. Spatium Elaſticum RQPZ æquale ſemiſſi rectang. FEi, idemque proportionale rectæ gl: totum ergo ſpatium AQRZA æquatur ſemiquadrato ex AB (d).

4. Curvedines inflexæ Laminæ in R, Q, ſunt proportionales applicatis RZ, QP (e).

5. Recta Qb curvæ perpendicularis tertia eſt proportionalis ad AE & AB. (f)

6. Ejuſque ſemiſſis eſt radius oſculantis circuli Qn. Ambæ ergo ad AB applicatæ Hyperbolas efficiunt. (g)

7. Recta Rm ſumpta ad principium uſque curvæ mn, e cujus evolutione principalis deſcribitur, æquatur ſemiſſi ipſius RZ vel AB.

8. Ipſa vero curva mn quarta eſt proportionalis ad AE, EB & ſemiſſem AB. (h)

9. Si ex radio reflexo incidentis QP abſcindatur Qh, quarta pars ipſius QP, erit punctum h in Cauſtica ex radiis ipſi AB parallelis; ſic ut Cauſtica Ah æquetur $\frac{5}{4}$ AE. (i)

10. Spatium

(d) $APQ = \int x\,dy = \int(x^2 dx : \surd(a^4 - x^4)) = A - \frac{1}{2}\surd(a^4 - x^4)$. Fiat $x = 0$, & erit $APQ = 0 = A - \frac{1}{2}\surd a^4$, adeoque $A = \frac{1}{2}\surd a^4 = \frac{1}{2} aa$. Fiat $x = AB = a$, & APQ $[\frac{1}{2} aa - \frac{1}{2}\surd(a^4 - x^4),]$ evadit $AZR = \frac{1}{2} aa$. Igitur $PQRZ = AZR - APQ = \frac{1}{2} aa - \frac{1}{2} aa + \frac{1}{2}\surd(a^4 - x^4) = \frac{1}{2}\surd(a^4 - x^4) = \frac{1}{2}\surd(aa - xx) \times \surd(aa + xx) = \frac{1}{2}$ FEi $= \frac{1}{2} a \times \surd(a^4 - x^4) : a = \frac{1}{2}$ AB×gl.

(e) Curvedines ſunt inverſe ut radii oſculi; Ergo directe ut $ddy : dxds = 1 : aa$ [Not. c] $= x : aa$, proportionales applicatis x.

(f) Qb = AB×AE : Ag [Not. r] $= ax : (xx : a) = aa : x = AB^2 : AE$.

(g) Qb : Qn $= m + 1 : 1$ [Not. ſ] $= 2 : 1$. Ergo Rm $= \frac{1}{2}$ RZ $= \frac{1}{2}$ AB.

(h) Curva mn = Qn − Rm $= \frac{1}{2} AB^2 : AE - \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AB (AB - AE) : AE = \frac{1}{2} AB \times BE : AE$.

(i) Qh : QP $= 1 : 2m + 2$ [Not. ſ] $= 1 : 4$. Et Curva Ah = PQ + Qh $= \frac{5}{4}$PQ $= \frac{5}{4}$AE.

N. LVIII. 10. Spatium quoque cauſticum A h r Z A admittit quadraturam, quippe æquale $\frac{7}{8}$ ſpatii Elaſtici AQRZA, hoc eſt, $\frac{7}{16}$ quadrati ex AB (*k*).

11. Spatium vero ab Evoluta m n comprehenſum a quadratura hyperbolæ dependet. Poſito enim $AB^2 = 8$, applicataque nx, quæ ſit ad m Z, ſicut 2 ad $\sqrt{5}$, exprimetur ſpatium m n x Z per ſeriem [alias ſpatium hyperbolicum, ut vulgo notum, deſignantem] $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ &c. diminutam $\frac{3}{5}$ unitatis. Nota ſpatium n t b x infinitum eſſe. (*l*)

12. Omnes portiunculæ curvæ AQ ductæ in reſpectivas applicatas QP, vel A E, aut [quod unum idemque,] omnes hujus † particulæ in tangentes reſpectivas Q p, ſpatium conficiunt quod Sectori circuli A l i æquatur: nimirum, ſi radius circuli A B ſit 1, ejuſque portio A q intercepta centro A ductaque recta l L dicatur *t*, utrumlibet ſpatium exprimetur per ſeriem: $t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9$, &c. (*m*)

† *Scil. applicatæ.*

13. Hinc Sector A l i ad curvam A Q applicatus, producit diſtantiam Centri gravitatis curvæ ab axe A P (*n*). Et ſuperficies Conoidis geniti rotatione curvæ A Q circa axem A P, ad Sectorem A l i ſe habet, ut circumferentia circuli ad radium, hoc eſt, æquatur arcui l i ducto in ſemiperipheriam i GL. (*o*)

14. Diſtan-

(*k*). Nam triangulum, quod inter radios duos reflexos viciniſſimos & exiguum curvæ AQR arcum continetur, ſub-octuplum eſt parallelogrammi quod inter duos radios incidentes intercipitur, cum utriuſque æqualis ſit altitudo *dy*, hujus baſis illius baſi quadruplo major. Ergo area A h r R Q A areæ AZR eſt octava pars. Igitur A h r Z A $= \frac{7}{8}$ A Z R $= \frac{7}{16} AB^2$.

(*l*) Vide Num. C I. Prop. 60, quæ ultima eſt.

(*m*) $\int xds$, vel [Not. *c*] $\int$ Qp. $dx = \int (aaxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) =$ ſectori circuli cujus radius $a =$ AB, ſinus $xx : a =$ Ag, hoc eſt ſectori A l i. Eſt autem Aq = tangenti ſemiſſis arcus i l. Quare per N[i]. LXXIV. Prop. 45. Series $t - \frac{1}{3}t^3 +$ &c. hujus ſectoris aream exprimit.

(*n*) Notiſſimum enim eſt diſtantiam centri gravitatis curvæ AQ ab axe AP, inveniri, ſi ſumma momentorum ſingularum particularum curvæ [$\int xds =$ Ali] applicetur ad, vel dividatur per ipſam curvam AQ.

(*o*) Hujus conoidis ſuperficies =

c

14. Diſtantia Centri gravitatis ſpatii Elaſtici A Q P ab axe AB invenitur, ſi triens cubi rectæ A E, mulctatus ſolido ſub tribus E F, Ei & A P comprehenſo, adplicetur ad quadratum A B, truncatum rectangulo F E i. Ejuſdem vero diſtantia ab A P habetur, ſi triens ſolidi ſub curva A Q & quadrato A B, mulctati ſolido ſub tribus E F, E i & E A comprehenſo, adplicetur ut ante. Idcirco totius ſpatii AQRZA centrum gravitatis ab axe AB diſtat triente rectæ A B; & ab A Z triente curvæ A Q R. Hinc menſurantur ſolida nata ex converſione figuræ tam circa rectam A B quam A Z. (p) N.LVIII.

15. Ipſa vero Curva AQ reperitur, ſi deſcripta hyperbola æquilatera i d s, cujus centrum A, & ſemi-latus tranſverſum A i, triplum ſolidum quod fit ex ductu fruſti hyperbolici A i d E in ſegmentum circuli A i F E, multatum ſolido comprehenſo ſub tribus E F, E d vel E i, & E A, adplicari intelligitur ad duplum quadratum ex A B. (q)

16. Series

$\frac{c}{r}\int x\,ds = \frac{c}{r} \times$ A l i [ubi $c:r$, rationem exprimit peripheriæ ad radium]. Eſt autem A l i $= \frac{1}{2}$ A i $\times$ i l. Ergo ſuperficies conoidis $= \frac{c}{2r} \times$ A i $\times$ i l $=$ [poſito $r =$ A i] $\frac{1}{2} c \times$ i l.

(p) Diſtantia centri gravitatis ab axe AB æqualis eſt $\int xydy : \int xdy$. Eſt autem $\int xdy = \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}\sqrt{(a^4 - x^4)}$ [Not. d], & $\int xydy = y\int xdy - \int dy\int xdy$ $= \frac{1}{2}aay - \frac{1}{2}y\sqrt{(a^4 - x^4)} - \int \frac{1}{2}aady$ $[\frac{1}{2}aay] + \int \frac{1}{2}dy\sqrt{(a^4 - x^4)}$ $[= \int \frac{1}{2}xxdx$, aut $\frac{1}{6}x^3] = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}y\sqrt{(a^4 - x^4)}$. Igitur hæc diſtantia $= (\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}y\sqrt{(a^4 - x^4)}) : (\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}\sqrt{(a^4 - x^4)}) = (\frac{1}{3}x^3 - y\sqrt{(aa - xx)}\sqrt{(aa + xx)}) : (aa - \sqrt{(aa - xx)}.\sqrt{(aa + xx)})$.

Diſtantia ejuſdem centri gravitatis ab axe AP eſt $\frac{1}{2}\int xxdy : \int xdy = \int(x^4dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) : (aa - \sqrt{(a^4 - x^4)}) = \frac{1}{3}(aa\int(aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) - x\sqrt{(a^4 - x^4)}) : (aa - \sqrt{(a^4 - x^4)}) = \frac{1}{3}(aas - x\sqrt{(a^4 - x^4)}) : (aa - \sqrt{(a^4 - x^4)})$.

Hinc ſi $x = a$, diſtantia centri gravitatis ab A B $= \frac{1}{3}a$, & ab A P $= \frac{1}{3}s$.

Solidum genitum ex rotatione figuræ A P Q ſuper axem A B $= \frac{c}{r}\int xydy = \frac{c}{r}(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}y\sqrt{(a^4 - x^4)})$; at ſuper axem A P $= \frac{c}{2r}\int xxdy = \frac{c}{6r}(aas - x\sqrt{(a^4 - x^4)})$.

(q) AQ $= s = \int(aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)})$ $=$

N.LVIII. 16. Series etiam noſtræ inventionis utiliter adhiberi poſſunt, cum aliæ difficulter hic locum inveniant: Sic poſita A B ejuſve quadrato $=1$, exprimi poteſt quantitas ſpatii $sBAN$, rectæve AZ, vel BR, per ſeriem

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2.7}+\frac{1.3}{2.4.11}+\frac{1.3.5}{2.4.6.15}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.19}+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.23}+\&c.$$

quantitas vero Curvæ AQR per hanc

$$1+\frac{1}{2.5}+\frac{1.3}{2.4.9}+\frac{1.3.5}{2.4.6.13}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.17}+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.21}+\&c.$$

quarum illam invenio $>$ quam 0. 598 & $<$ quam 0. 601: hanc $>$ quam 1. 308 & $<$ quam 1. 316; ſic ut tres iſtæ lineæ RZ, AZ, AQR, proxime ſe habeant ut 10. 6. 13. (*r*) Hujuſmodi autem ſeries, quæ diverſæ paulo ſunt naturæ ab iis, quas Celeberrimus Geometra LEIBNITIUS hinc inde in *Actis* prodidit, & conſtructu ſunt facillimæ, & ad exprimendas quaſvis promiſcue quantitates, rationales, irrationales & tranſcendentes pariter accommodæ. Pro reliquis *Vir eximius*, ſuperiori anno, methodum ingenioſiſſimam profecto & Auctore ſuo digniſſimam præſcripſit, ut nihil in hoc genere excellentius excogitari poſſe exiſtimem.

17. Figura Elaſtica ARZ mota in fluido ſecundum directionem AZ, præcedente nunc vertice A, nunc baſe RZ reſiſtentias patitur quæ ad ſe invicem ſunt ut 4 & 5, ſed mota juxta directionem RZ, præeunte jam vertice R, jam baſe AZ, reſiſtentias ſubit ſe habentes ut 3 & 5; ideoque reſiſtentiæ, quas figura patitur mota ſucceſſive juxta

$=\frac{3}{2aa}\int dx\sqrt{(a^4-x^4)}-\frac{1}{2aa}x\sqrt{(a^4-x^4)}$. Eſt autem $\int(dx\sqrt{(a^4-x^4)})=\int dx\sqrt{(aa+xx)}\sqrt{(aa-xx)}$ ſolidum quod fit ex ductu fruſti hyperbolici in ſegmentum circuli. Ductus ille intelligendus eſt, juxta mentem *Gregorii a* STO. VINCENTIO de ſolido quod naſcitur ducendo ſingulas hyperbolæ applicatas in ſingulas adjacentes applicatas circuli.

(*r*) Vide harum Serierum demonſtrationem N°. C I. Prop. 56. 57. 58. Vide etiam Num. LXIV.

juxta utramque directionem, præeunte utrobique vertice ſe habent ut quadrupla RZ & tripla AZ. ($ſ$). N.LVIII.

18. Supereſt una ex palmariis proprietatibus curvæ noſtræ tertiæ conſtructionis, quam antehac ſupremis tantum labris tetigi, quæ eſt quod eadem una repræſentet curvaturam lintei a pondere infuſi liquoris expanſi. Nimirum erecto verticaliter ſuper BR plano ARφ, rectaque Aφ horiſontaliter conſtituta, ſi lamina elaſtica AQR [continuata, ſi vis, ab altera parte uſque in φ] ſenſim derigeſcere, & in omnibus ſuis partibus flexilis fieri intelligatur ad inſtar corii, linteive, quod affixum hinc inde in punctis A & φ intra ſe velut culeum contineat liquorem aliquem, qui totam ejus cavitatem ARφ repleat: Dico futurum, ut linteum pondere fluidi expanſum eandem curvaturam AQR retineat, aut ſi non habeat, acquirat; cujus aſſerti veritatem, etiam non conſiderata in ſpecie natura curvæ AQR, facile poſſem demonſtrare (t). Sed ſuffecerit attigiſſe ſequentia.

 α. Si

($ſ$) Reſiſtentia baſis RZ ad reſiſtentiam curvæ ſecundum axem motæ, eſt [Vide Num. LVI. pag. 568.] ut x ad $\int(dx^3 : ds^2) = \int(a^4 - x^4)dx : a^4 = x - x^5 : 5a^4$, ac poſito $x = a$, ut a ad $a - \frac{1}{5}a$, vel ut 5 ad 4.

At ſi figura moveatur ſecundum RZ, reſiſtentia baſis AZ eſt ad reſiſtentiam figuræ, ut y ad $\int(dy^3 : ds^2) = \int(x^6 dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}) = \frac{3}{5}\int(xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)} - \frac{1}{5}x^3\sqrt{(a^4 - x^4)} : a^4 = \frac{3}{5}y - x^3\sqrt{(a^4 - x^4)} : 5a^4$, quæ ratio, poſito $x = a$, fit ratio y ad $\frac{3}{5}y$, aut 5 ad 3.

Igitur cum reſiſtentia curvæ motæ ſecundum AZ, ſit ad reſiſtentiam RZ, ut 4 ad 5, & reſiſt. RZ ad reſiſt. AZ, ut RZ ad AZ, & reſiſt. AZ ad reſiſt. curvæ motæ ſecundum RZ, ut 5 ad 3, erit, compoſitis rationibus, reſiſtentia prima ad ultimam ut 4RZ ad 3AZ.

(t) Data eſt N°. XLVIII. Not. a, pag. 483 & 484, æquatio generalis curvarum in quas flectitur filum cujus ſingula puncta innumeræ potentiæ perpendiculariter urgent. Hæc erat $pdyds = aaddx$, quæ, quia ds conſtans dat $dxddx = - dyddy$, reducitur ad hanc $- pdxds = aaddy$, vel $pdxds = aaddy$, poſita origine in A, non in R, ut ponebatur N°. XLVIII. Potentiæ p in noſtro caſu, cum ſint columnæ fluidi quarum altitudines PQ, & fluidorum preſſiones ſint altitudinibus eorum proportionales, per applicatas PQ [x] commode deſignabuntur, unde æquatio fiet $xdxds = aaddy$, quæ ipſiſſima eſt quam ſupra ad Elaſticam invenimus

$tdxds$

N.LVIII. α. Si loco rectæ RZ concipiatur firmus paries, qui affixam habeat unam lintei extremitatem in R, portioque lintei RQ a pariete & portione reliqua ſubito abrumpi intelligatur, excutietur hæc portio a pondere incluſi fluidi juxta eam directionem, quæ cum pariete RZ angulum faciat, cujus tangens ſit ad ſinum totum, ſicut EF eſt ad Ei. Hinc totum linteum, diſruptis ſubito in A & R vinculis, excutitur juxta angulum ſemirectum (u).

β. Si ex AB abſcindatur Aσ, quæ ad AB ſit ut 1 ad $\sqrt{\sqrt{2}}$, & applicetur σρ, erit per ρ ducta recta ſemirectum cum pariete angulum conſtituens, & curvæ perpendicularis, & linea directionis totius lintei, & ſimul axis æquilibrii impulſionum: at non tranſibit per concurſum rectarum AB, RB, lintei extremitates A & R tangentium (x); ut nec in Velaria id contingere exiſtimandum eſt, [cum ſecus curvæ hæ ex algebraicarum deberent eſſe numero ut attendenti ſatis patet], quanquam hoc olim incogitanti mihi & certis de cauſis feſtinanti inter alias regulas, quas biennio abhinc

$tdxds = aaddy$, ſi nempe tenſiones t viribus tendentibus x proportionales ſtatuantur.

(u) N°. XLVIII. Not. f, media directio omnium preſſionum, quæ curvam urgent perpendiculariter, inventa eſt biſecare angulum quem tangentes extremæ comprehendunt, atque efficere cum axe RZ angulum, cujus tangens ſit ad ſinum totum ut $ds - dy$ ad dx: hoc eſt, in caſu præſenti, ut $aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)} - xxdx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ ad dx, aut ut $aa - xx$ ad $\sqrt{(a^4 - x^4)}$ vel, dividendo per $\sqrt{(aa - xx)}$, ut $\sqrt{(aa - xx)}$ [EF] ad $\sqrt{(aa + xx)}$ [Ei]. Sit $x = 0$, & habebis angulum ſemirectum, cujus nempe tangens æqualis Sinui toti.

(x) Recurrit error, quem N°. XLVIII. Not. g, pag. 486 animadvertimus. Nondum potuit Auctor ſibi perſuadere mediam directionem inter innumeras perpendiculares ad Curvam, non eſſe pariter normalem ad ipſam. Quæſivit ergo, quo in puncto perpendicularis ad curvam cum utroque axe angulum efficeret ſemirectum, hoc eſt, quo in puncto eſſet $dx = dy$, & habuit $xx = \sqrt{(a^4 - x^4)}$ ſive $2x^4 = a^4$ aut $x = a : \sqrt{\sqrt{2}}$. Ex eodem fonte manat prava Regulæ 15, N^i. XLVIII, correctio, quam tandem feliciter dedit N°. LXVI, ubi intellexit, obliquam eſſe ad curvam AQR mediam directionem, quæ per concurſum B tangentium extremarum tranſire demonſtrata eſt N°. XLVIII. Not. a, pag. 484.

hinc de curvatura Veli dedi, exciderit. Quocirca rogandus Lector ut Regulam 15 deleat, lacunamque ſi velit impleat alio modo facillimo, axem æquilibrii in Velaria inveniendi, nempe faciendo BD [Vide *Fig.* 2. ibidem] æqualem & parallelam ipſi CH, ducendoque DF parallelam HB, quæ erit quæſitus æquilibrii axis, fietque ſponte BG = BD vel CH. N.LVIII. Tab. XVIII No. 48.

γ. Vis ponderis impellens linteum AQR juxta dictam directionem ad pondus ejus abſolutum ſe habet ut $\sqrt{2}$ ad 1.

δ. Vis lintei ſuſtinens ſeu firmitas ejus requiſita, ne rumpatur, in omnibus ejus punctis eadem eſt, & tanta, quanta requiretur in A ad ſuſtinendum linteum, ne labatur; atque æquatur ipſi abſoluto ponderi liquoris incluſi (y). Linteum igitur æquabilis texturæ æqualiter reſiſtit prementi fluido, ſecus ac lamina inflexa, quæ in partibus ipſi R propinquioribus debilior eſt quam in cæteris.

ε. Tandem & hoc addamus, quod inter omnes figuras iſoperimetras eidem rectæ Aφ inſiſtentes, Elaſtica ARφ illa eſt, quæ habet centrum ſuum gravitatis longiſſime remotum ab Aφ: ſicuti Funicularia eſt illa, in qua centrum gravitatis ipſius curvæ ab eadem maxime diſtat (z). Notare hic igitur convenit affinitatem miram, quæ ab una parte Funiculariæ & Velariæ, ab altera Elaſticæ & Curvæ Lintei ab incluſo liquore expanſi intercedit.

Supereſſet nunc, ut retenta vulgari extenſionum hypotheſi ſpeculationes noſtras promoveremus ulterius, indagando quales Curvæ prodeant, ſi Lamina Elaſtica proprio pondere abſque appenſo onere flectatur: Si flectatur ab utroque ſimul: † Si non ſit

(y) Tenſio fili, ſive lintei, oſtenſa eſt N°. XLVIII. Not. a, conſtans & $= aa =$ ARφ $=$ ponderi totius fluidi. Vis vero quæ ſecundum mediam directionem premit, eſt ad Tenſionem aa [Vide Not. k. pag. 486] ut $\sqrt{(2ds - 2dy)}$ ad $\sqrt{ds}$, hoc eſt, in hoc caſu, ut $\sqrt{((2aa-2xx)dx : \sqrt{(a^4 - x^4)})}$ ad $\sqrt{(aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)})}$ vel ut $\sqrt{(2aa - 2xx)}$ ad $\sqrt{aa}$; quæ ratio, ubi $x = 0$, reducitur ad hanc $\sqrt{2aa} : \sqrt{aa}$, vel $\sqrt{2} : 1$.

(z) Sequitur ex notiſſimo Mechanices Axiomate, quo fertur centrum gravitatis tantum deſcendere quantum poteſt.

† Harum quæſtionum ſolutiones vide

N.LVIII. ſit uniformis craſſitiei aut latitudinis, ſed exempli gratia, triangularis aut alterius cujuſvis figuræ; & vis flectens applicata, tum in cuſpide tum in baſi ejus: Nec non qualem Lamina curvaturam habere debeat, ut ab appenſo onere, vel proprio pondere, vel ab utroque ſimul in rectam extendatur, * [quod uſui veniret in attemperandis brachiis bilancium & ſtaterarum, ubi requiritur ut centra motus & appenſionum jaceant in directum:] item, qualis figura danda laminæ, ut per inflexionem acquirat datam curvaturam; & mille ejuſmodi alia. Quarum Curvarum omnium proprietates characteriſticas, & aliquarum etiam conſtructiones exhibere poſſum, quas ſecundi tertiive generis mechanicas eſſe deprehendo. Sed pleraque nondum digeſſi, nec uni vacat agere omnia. Præterea & Lectorum noſtrorum induſtriæ quædam relinquenda videntur, quibus hinc ampla occaſio inventum noſtrum perficiendi ſuppeditatur.

vide in elegantiſſimis Diſſertationibus Celebb. *Danielis* BERNOULLI & *Leon.* EULERI in *Comment. Acad. Petropol.* Tom. III. pag. 62. & 70.

* Vide N°. CVII. Art. XX.

Digitized by Google

N°. LIX.

JACOBI BERNOULLI

SOLUTIO

PROBLEMATIS LEIBNITIANI

De Curva Acceſſus & Receſſus æquabilis a punčto dato, mediante rečtificatione Curvæ Elaſticæ.

FElicitatem inventi præcedentis commendare poteſt ſolutio elegantiſſimi Problematis *Leibnitiani*, de invenienda *linea*, *per quam deſcendens grave æqualiter æqualibus temporibus a dato punčto recedat, vel ad illud accedat* (a): quod laudatiſſimo ſuo Auctori ita placuit, ut non tantum ad ejus tentamen Amicos pariter & Adverſarios aliquoties in *Actis* provocaverit [Vide *An.* 1689, *Apr. pag.* 198, & 1690, *Mai. p.* 229, & *Jul. pag.* 360,] ſed & ipſe ſtrenue in illo deſudarit, teſtibus nonnullis Curvæ proprietatibus, quas *Gallorum Diario* inſeri curavit, ut ex relatione *Fratris* habeo, qui tamen illas nominare mihi non potuit. Multus etiam fuit in eodem ipſe *Frater*, dum *Pariſiis* ageret, ſed omni ſua Methodo Tangentium inverſa aliud nil efficit, quam ut Problema ad hanc æquationem differentialem reduceret, $(x\,dx+y\,dy)\sqrt{y}=(x\,dy-y\,dx)\sqrt{a}$, ad quam tamen etiam

Acta Erud. Lipſ. 1694. Jun. p. 276.

(a) Hanc Iſochronam Paracentricam vocavit LEIBNITIUS.

No. LIX. etiam nullo labore pervenitur ([b]). Plenariam vero illius ſolutionem, ſive conſtructionem, nec ipſe, nec quiſquam alius dare potuit. Nuper, cum præcedens ſchediaſma pararem *Lipſiam*, partemque inventi cum figuris ipſis jamjam chartæ conſignaſſem, ſcrutinium hujus Lineæ ſuſcepi, occaſione novorum Theorematum quæ ibi dedi pro radiis circulorum oſculantium in Spiralibus [quorum tamen inveſtigatio & ipſa incidenter tantum fiebat; præcipua enim inventi capita ſub calamo demum mihi naſcebantur,] mox etiam, poſt pauca conamina optatum finem conſecutus ſum ([c]), ubi hoc perquam ſingulare mihi accidit, ut abſoluta

(b) Sit $A\theta\omega\alpha$ curva quæſita, ſintque $A\gamma = x$, $\gamma\alpha = y$, ideoque $A\alpha = \sqrt{(x^2+y^2)}$, ejuſque differentiale $\alpha\beta = (xdx+ydy).\sqrt{(x^2+y^2)}$, quod receſſus eſt momentaneus corporis a puncto A, dum ſcil. ſpatiolum $\delta\alpha = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$ deſcribit, quemadmodum percurrendo $A\varpi$ initiolum curvæ, ipſa longitudine $A\varpi$ ab A recedit. Sint illi receſſus $\alpha\beta$, $A\varpi$ æquales, & ideo, per conditionem curvæ, æqualia ſunt tempora, quibus $A\varpi$, $\delta\alpha$ percurruntur; conſequenter hæc ſpatiola $A\varpi$, vel $\alpha\beta$ $[(xdx+ydy):\sqrt{(x^2+y^2)}]$, & $\alpha\delta$ $[\sqrt{(dx^2+dy^2)}]$ ſunt proportionalia celeritatibus corporis in A & α. Hæ vero celeritates, ex lege deſcenſus gravium, ſunt ut radices altitudinum ex quibus grave deſcendit, hoc eſt ut radices altitudinum iA $[a]$, ex qua grave in A deſcendit, & iA $+ \alpha\gamma$, $[a+y]$ ex qua grave in α deſcendit; habemus itaque hanc æquationem $(a+y)(xdx+ydy)^2 : (xx+yy) = a(dx^2+dy^2)$, vel $ax^2dx^2 + 2ayxdydx + ayydy^2 + yxxdx^2 + 2yyxdydx + y^3dy^2 = axxdx^2 + axxdy^2 + ayydx^2 + ayydy^2$, quæ, demtis utrinque æqualibus, tranſpoſito termino $2ayxdydx$, & extracta radice quadrata, reducitur ad iſtam $(xdx+ydy)\sqrt{y} = (ydx - xdy)\sqrt{a}$; quæ tamen, ob indeterminatarum permixtionem, vix poteſt conſtrui.

(c) Eligantur itaque commodiores indeterminatæ, quibus tamen inventis, puncta curvæ determinentur. Sit, v. g. $A\alpha = t$, $\varepsilon\zeta = z$, & erit $\alpha\gamma = tz : a$, propter $A\varepsilon : A\alpha = \varepsilon\zeta : \alpha\gamma$, nec non $\alpha\beta = dt$, & $\beta\delta = tdz : \sqrt{(aa - zz)}$, cum ſit $A\zeta$ $[\sqrt{(aa-zz)}] : A\varepsilon$ $[a] = \varepsilon\kappa$ $[dz] : \varepsilon\lambda$ $[adz:\sqrt{(aa-zz)}]$, & $A\varepsilon$ $[a] : \varepsilon\lambda$ $[adz:\sqrt{(aa-zz)}] = A\delta$ vel $A\alpha$ $[t] : \beta\delta$ $[tdz:\sqrt{(aa-zz)}]$. Igitur cum Nota ſuperiori oſtenſum ſit $\alpha\beta : \alpha\delta = \sqrt{iA} : \sqrt{(iA + \alpha\gamma)}$, vel $\alpha\beta^2 : \alpha\delta^2 = iA : iA + \alpha\gamma$, vel convertendo $\alpha\beta^2 : \beta\delta^2 = iA : \alpha\gamma$, erit $dt^2 : \frac{ttdz^2}{aa - zz} = a : \frac{tz}{a}$, quæ reducitur ad $dt : \sqrt{t} = adz : \sqrt{(aaz - z^3)}$, ubi jam ſeparatæ ſunt indeterminatæ,

ſoluta analyſi animadverterem, curvam Elaſticam, quæ qualemcunque tantum occaſionem huic tentamini dederat, illam ipſam eſſe, cujus rectificatione altera conſtrui poſſet ([d]). Nam quanquam idem exequi liceat, mediante quadratura ſpatii alicujus algebraici, alterum tamen conſtruendi modum præferendum cenſeo, tum quod generaliter facilius in praxi rectificentur curvæ, quam quadrentur ſpatia, tum præſertim quod ipſa natura [ſiquidem convenientem tenſionis legem obſervet] illum præſcripſiſſe videatur. No. LIX.

CONSTRUCTIO. Deſcripta itaque curva Elaſtica tertiæ conſtructionis [*Fig.* 3.] cæteriſque poſitis, ut prius, applicetur in utroque quadrante circuli BL, LG, recta $\iota\zeta$ æqualis ipſi Ag, ſeu tertiæ proportionali ad AB & AE [hic in dextro tantum quadrante ducta apparet, ut linearum confuſio vitetur] & ex ducta $A\iota$ [productaque ſi ſit opus] abſcindatur $A\alpha$ æqualis tertiæ proportionali ad rectam AB & portionem curvæ AQ in ſiniſtro, vel φRQ in dextro quadrante; eritque punctum α in curva quadam $A\chi\omega n$, ita comparata ut grave per illam latum [ſi prius ex altitudine iA deciderit] æqualibus temporibus æqualiter ad punctum A accedat, aut ab illo recedat. Cujus conſtructionis demonſtrationem [ut Celeberrimum Problematis Auctorem, aliis occupatiſſimum, examinandi labore ſublevem] hic appono.

tæ, atque integrando ulterius $2\sqrt{t} = \int(adz:\sqrt{(aaz - z^3)})$, unde liquet, rem reductam eſſe ad quadraturam curvæ, cujus abſciſſa z, ordinata $a^2\sqrt{a}:\sqrt{(aaz - z^3)}$.

([d]) Quod ſi vero, ulterioris reductionis gratia, fiat $z = uu:a$, erit $adz:\sqrt{(aaz - z^3)} = 2audu: a\sqrt{(au^2 - u^6:a^3)} = 2aadu:\sqrt{(a^4 - u^4)}\sqrt{a}$ Igitur $2\sqrt{t} = \frac{2}{\sqrt{a}}\int(aadu:\sqrt{(a^4 - u^4)})$, vel $\sqrt{at} = \int(aadu:\sqrt{(a^4 - u^4)})$. Eſt autem [N°. præc. Not. *q*.] $\int(aadu:\sqrt{(a^4 - u^4)})$ = arcui AQ vel φRQ curvæ elaſticæ, facta nimirum AE $= u$. Igitur eſt $\sqrt{at}$ [$\sqrt{(a. A\alpha)}$] = AQ vel φRQ, & $A\alpha = AQ^2:a$ vel $\varphi RQ^2:a$, tertia proportionalis ad AB, AQ vel φRQ, quando aſſumpta eſt $\iota\zeta$ [$z = uu:a$] tertia proportionalis ad AB, AE. Unde ſequitur Auctoris conſtructio. Vide Num. ſequentem Nota (a).

No.LIX. DEMONSTRATIO. Deſcriptus intelligatur centro A circulus $\beta\delta$, abſcindens ex applicata $A\alpha$ Elementum $\alpha\beta$, & ex curva Elementum $\alpha\delta$, cui concipiatur in vertice portiuncula iſochronos $A\varpi$. Jam ratio $\beta\delta$ ad $\alpha\beta$ compoſita eſt ex ſequentibus quinque rationibus:

$\beta\delta$: Elem. periph. $G\iota\,[\iota\lambda] = A\alpha : A\iota$
Elem. per. $G\iota\,[\iota\lambda]$: Elem. $\iota\zeta\,[\iota x] = A\iota : A\zeta$, ex nat. Circuli.
Elem. $\iota\zeta\,[\iota x]$: Elem. $AE = 2AE : AB$, per conſtr. & princ. Calc. inf. parvor.
Elem. AE : Elem. $AQ\,[\varphi RQ] = A\zeta : AB$, ex nat. curvæ AQ ut collig. ex Cor. 2. Conſtr. III. præced.
Elem. $AQ\,[\varphi RQ]$: $\alpha\beta = AB : 2AQ\,[2\varphi RQ]$ per conſtr. & princ. Calc. inf. parvor.

unde facta diviſione per communes rationum antecedentes & conſequentes, $\beta\delta : \alpha\beta = A\alpha : AB + AE : AQ\,[\varphi RQ,]$ & $\beta\delta^2 : \alpha\beta^2 = A\alpha^2 : AB^2 + AE^2 : AQ^2$ vel φRQ^2 [$\iota\zeta : A\alpha$, per conſtr.] $= A\alpha^2 \times \iota\zeta : AB^2 \times A\alpha = A\alpha \times \iota\zeta : AB^2 =$ [ob ſimilitudinem Triangulorum $A\alpha\gamma$, $A\iota\zeta$] $A\iota \times \alpha\gamma : AB^2 = \alpha\gamma : AB\,[A\iota]$, componendoque $\alpha\delta^2 : \alpha\beta^2 = \alpha\gamma + Ai : Ai$; & proinde $\alpha\delta : \alpha\beta = \sqrt{(\alpha\gamma + Ai)} : \sqrt{Ai} =$ celeritas acquiſita in α : celer. acquiſ. in $A =$ [ex natura deſcenſus gravium] $= \alpha\delta : A\varpi$ [per hypoth. quia æqualibus tempuſculis tranſiri ſupponuntur]. Ergo $\alpha\beta = A\varpi$ Ergo grave per hanc Curvam latum æqualiter æqualibus temporibus a puncto A recedit. Q. E. D.

Quæ hic præcipue obſervanda veniunt, ſunt ſequentia:

1. Si grave altius vel humilius, quam ex i, decidere ſupponatur, puta ex τ, non opus eſt nova Elaſtica: Sufficit hæc una omnibus Curvis iſochronis deſcribendis. Omnes enim inter ſe ſimiles ſunt, determinanturque, faciendo tantum, ut Ai ad $A\tau$, ſic $A\alpha$ ad aliam $A\alpha$ abſcindendam ex eadem $A\iota$. Eſtque ipſa curva Schematis noſtri conſtructa pro gravi tanquam ex τ, non i, decidente.

2. Sed & infinitæ dantur aliæ, quas grave ex eadem altitudine

τA

τA delapſum ita permeare poteſt, ut æquabiliter ad punctum aliquod accedat vel recedat; at illud continuo diverſum ab A; nec niſi per unicam curvam ex eadem altitudine, reſpectu ejuſdem puncti, acceſſus vel receſſus æquabilis effici poteſt. (e) No.LIX.

3. Curva noſtra Iſochronos initium capit in ipſo puncto A, cujus reſpectu motus æquabilis eſt, & terminatur in puncto η ejuſdem cum illo altitudinis; utraque extremitate tangit horizontalem rectam $A\eta$ (f). Unde flexum contrarium habere conſtat. Quod ſi ex altera parte ſtatuatur huic ſimilis & æqualis Curva $A\lambda\theta\psi$, & grave dimittatur ex η cum celeritate, quam acquirere poteſt cadendo ex altitudine æquali ipſi τA, illud primo deſcendendo ad ω, mox reaſcendendo, æquabiliter ad A accedet, indeque pergendo continue per alteram $A\lambda\theta\psi$ ab eodem puncto A eadem ratione elongabitur.

4. Tangens curvæ in locis intermediis, velut α, reperitur, ſi ducta $A\mu$ perpendiculari ad $A\alpha$, fiat, ut $\sqrt{A\tau}$ ad $\sqrt{\alpha\gamma}$; ita $A\alpha$ ad $A\mu$; ducta enim $\alpha\mu$ curvam tanget: quod vel ex uſu, quem præſtare debet curva facile infertur (g).

5. Recta $A\eta$ quadrupla eſt rectæ $A\theta$. (h)

6. Si in Elaſtica punctum Q aſſumatur tale, ut tertia proportionalis ad ſubtangentem Pp & rectam AB æquetur curvæ AQ, invenie-

Hhhh 2

(e) Imo vero infinitæ dantur, ut obſervarunt LEIBNITIUS N°. LXIV, & HUGENIUS N°. LXV, agnovitque Author N°. LXVI. Scil. in integratione æquationis $dt:\sqrt{t} = adz:\sqrt{(aaz - z^3)}$, [Nota (c)] omiſſa eſt conſtantis additio. Integralis autem completa $2\sqrt{t}+\sqrt{b} = \int(adz:\sqrt{(aaz - z^3)})$ pertinet ad infinitas diverſas curvas, prout alia atque alia aſſumitur quantitas b. Vide Num. LXVI.

(f) Vide Notam ſequentem.

(g) Eſt enim $A\alpha : A\mu = \alpha\beta : \beta\delta =$ [Vide Not. c] $\sqrt{iA}$ aut hic $\sqrt{\tau A} : \sqrt{\alpha\gamma}$. Igitur ſi ſit $\alpha\gamma = 0$, id quod locum habet ubi $A\alpha$ cadit in AG, erit etiam $A\mu$ infinities minor ipſa $A\alpha$, adeoque curva tangit rectam $A\alpha$, ſeu AG. Hujuſmodi ſunt puncta A & η, quæ Noſter initium & finem curvæ vocavit, licet ipſa revera interminata ſit, & infinitos flexus atque ſinus habeat. Vide rurſus Num. LXVI.

(h) Eſt enim $A\eta = AR\varphi^2 : AB$ [per conſtr.] $A\theta$ vero $= AQR^2 : AB$. Ergo

No. LIX. venietur ejus ope punctum χ portionis $A\chi\theta$, quod omnium maxime diſtat a perpendiculari $A\theta$ (i).

7. Sin punctum Q ponatur tale, ut tangens Qp æquetur curvæ φRQ, illo mediante habebitur in altera punctum ω, omnium infimum, & remotiſſimum ab horizontali $A\eta$ (k).

8. Tandem & hoc advertendum eſt, quod ex propoſiti Problematis conſtructione proclive jam colligere ſit, quales ſuppoſitiones faciendæ, ad reducendam æquationem $(x\,dy + y\,dx)\sqrt{y} = (y\,dx - x\,dy)\sqrt{a}$. Nam ſi loco x & y (l) aſſumantur duæ aliæ indeterminatæ t & z (m), ponendo $ay = tz$, & $ax = t\sqrt{(aa - zz)}$; prodibit æquatio, in qua ſeparari poſſunt indeterminatæ t & z cum ſuis differentialibus a ſe invicem; quod ſufficit ad conſtructionem deinde, ſaltem per quadraturas, expediendam. Duo enim in hoc calculo adhuc præcipue deſiderari videntur, quæ ſi ſemper fieri poſſent, omnia reperta eſſent; unum ut differentialia ſecundi aliorumve generum ad differentialia primi redu-

Ergo cum ſit ARφ = 2AQR erit $A\eta = 4A\theta$.

(i) Tangens in puncto χ, quod eſt ab Axe AL remotiſſimum, rectæ $\alpha\gamma$ parallela eſt, & dat Triangulum $A\alpha\mu$ Triangulo $A\alpha\gamma$ ſimile. Igitur $\alpha\gamma^2 : A\gamma^2 = A\alpha^2 : A\mu^2 =$ [Not. g] $= Ai : \alpha\gamma$, vel, componendo, $\alpha\gamma^2$ [$ttzz : aa$] : $A\alpha^2$ [tt] $= Ai$ [a] : $Ai + \alpha\gamma$ [$a + tz : a$]; unde elicitur t [$AQ^2 : a$] $= (a^4 - aazz) : z^3$ [quoniam $z = uu : a$] $= (a^4 - u^4)\, a^3 : u^6 = a^3 : Pp^2$. Eſt enim [No. præc. Nota (c)] $Pp = u^3 : \sqrt{(a^4 - u^4)}$ atque ideo $Pp^2 = u^6 : (a^4 - u^4)$. Igitur cum ſit ad punctum χ, $AQ^2 : a = a^3 : Pp^2$, vel $AQ^2 = a^4 : Pp^2$, eſt etiam $AQ = aa : Pp$, ſive AQ tertia proportionalis ad tangentem Pp & rectam AB.

(k) Tangens autem in puncto ω, quod ab Axe AG maxime diſtat, ipſi parallela eſt & efficit Tr. $A\alpha\mu$ ſimile Triang. $A\alpha\gamma$. Eſt igitur $A\gamma^2 : \alpha\gamma^2 = A\alpha^2 : A\mu^2 = Ai : \alpha\gamma$, vel componendo $A\alpha^2$ [tt] : $\alpha\gamma^2$ [$ttzz : aa$] $= Ai + \alpha\gamma$ [$a + tz : a$] : $\alpha\gamma$ [$tz : a$]; unde deducitur $t =$ [$\varphi RQ^2 : a$] $= aaz : (aa - zz) = a^3uu : (a^4 - u^4)$ [ſcribendo nimirum $uu : a$ pro z] $= Qp^2 : a$. Namque eſt [No. præc. Nota (c)] $Qp = aau : \sqrt{(a^4 - u^4)}$ Eſt igitur ad punctum ω, $\varphi RQ^2 : a = Qp^2 : a$, vel arcus φRQ = tangenti Qp.

(l) $A\gamma$ & $\gamma\alpha$.

(m) $A\alpha$, & $i\zeta$.

reducantur; alterum, ut in æquationibus differentialibus primi No. LIX. generis, indeterminatæ, ſi invicem permixtæ ſint, a ſe mutuo ſeparentur, ut unaquæque cum ſua differentiali peculiarem æquationis partem conſtituat; hoc eſt, ut reperiatur methodus inverſa tangentium. Pro utroque dedi regulas quaſdam [plureſque ſine fine dare poſſem] ſimiles illis, quas *Frater* Pariſiis apud *Marchionem* HOSPITALIUM depoſuit, quibus methodum ineſſe initio exiſtimarat. At ſtatim ſenſi, illas non continere niſi artificia quædam particularia, quæ methodum appellare non auſim; utpote qualem non magis dari poſſe arbitror, quam dari poteſt univerſalis methodus pro conſtruendis æquationibus algebraicis quorumvis promiſcue graduum. Illa enim [cujus olim in *Actis* mentio facta eſt] qua pono indefinite $o = a + bx + cy + exy +$ &c. & quæro deinde ejus ope lineæ tangentem, vix aliter quam in ſpeculatione ſuccedere videtur. Quod dictis fidem faciat, hoc eſto, quod præſens Problema, quanquam ut apparet haud admodum difficile, nullius regulæ, methodive hactenus repertæ ope, ſolvi a quoquam potuerit.

N°. LX.

JACOBI BERNOULLI
CONSTRUCTIO CURVÆ
Acceſſus & Receſſus æquabilis,
Ope Rectificationis Curvæ cujuſdam algebraicæ:
Addenda nuperæ ſolutioni Menſis Junii.

Acta Erud. Lipſ. 1694. Sept. p. 336

TRiplex præcipue modus habetur conſtruendi curvas mechanicas, ſive tranſcendentes. Primus, ſed ad praxin parum idoneus, fit per curvaturas ſpatiorum curvilineorum. Melior eſt, qui inſtituitur per rectificationes curvarum algebraicarum; accuratius enim & expeditius rectificari poſſunt curvæ, ope fili vel catenulæ ipſis circumplicatæ, quam quadrari ſpatia. Eodem loco habeo illas conſtructiones, quæ peraguntur abſque ulla rectificatione & quadratura, per ſolam deſcriptionem curvæ alicujus mechanicæ, cujus puncta, licet non omnia, infinita tamen, & quantumvis proxima, geometrice inveniri poſſunt, qualis eſſe ſolet Logarithmica, & ſi quæ ſint ejus generis aliæ. Optimus vero modus, ſicubi haberi poſſit, ille eſt, qui peragitur ope alicujus curvæ, quam Natura ipſa, abſque arte, motu quodam celerrimo & quaſi inſtantaneo ad nutum Geometræ producit; cum præcedentes modi requirant curvas, quarum delineatio, ſive per motum continuum, ſive per plurium punctorum inventionem, ab Artifice inſtituatur, communiter vel lenta vel impedita nimis exiſtit. Ita conſtructiones illas Problematum, quæ

Digitized by Google

quæ Hyperbolæ quadraturam vel Logarithmicæ deſcriptionem ſupponunt, cæteris paribus, poſthabendas cenſeo iis, quæ ope Catenariæ peraguntur, ſeu curvæ, quam ſuſpenſa catena ſponte ſua citius induerit, quam reliquis ipſe deſcribendis primam manum admoveris. No. LX.

Curva Acceſſus & Receſſus æquabilis, ob ſolam proponentis Viri commendationem, mereri videtur ut de conſtructionibus ſecundum omnes tres modos illi adornandis ſimus ſolliciti. Conſtructio primi modi per quadraturas, quam in nupera ſolutione inſuper habui, ob jam dictam rationem, inſtitui poteſt, ſumendo in *Fig.* 3. rectam EN, non, ut ibi, ipſi Au, ſed ipſi iu æqualem; iterumque curvilineo AEN æquale rectangulum AO; hujus enim latus AP nuperæ curvæ AQ adæquabitur; ſic ut ſumpta ad AB & nunc inventam AP tertia proportionali Aα, habeatur punctum α in optata curva (*). Tertii modi conſtructio, quæ fieret mediante linea Elaſtica AQ, quam ſolam ibi tetigi, ſine dubio fieret optima, ſi natura alicubi tenſiones viribus tendentibus ſimpliciter proportionales effeciſſet: at quia nullus forte invenitur Elater, qui hanc tenſionis legem præciſe obſervet; nec ſi reperiatur, illud certo conſtet; idcirco nec iſti fidere ſatis tutum: præſtatque recurrere ad ſecundum conſtruendi modum, & quærere curvam algebraicam, cujus rectificatione ſcopum aſſequamur. Talem ex voto ſeſe ſiſtit curva quatuor dimenſionum quæ hac æquatione exprimitur $xx + yy = a\sqrt{(xx - yy)}$, quæque circum axem BG [$2a$] conſtituta formam refert jacentis notæ octonarii ∞, ſeu complicatæ in nodum faſciæ, ſive lemniſci, *d'un nœud de ruban* Gallis. Hujus enim, tum altera medietas, curvæ Elaſticæ ARφ, tum ſuper nodo A intervallo indeterminatæ AE abſciſſa medietatis portio minor, minori AQ, major

(*) Sit AE $= u$, Ag $= uu : a$, gl $= \sqrt{(aa - u^4 : aa)} = \frac{1}{a}\sqrt{(a^4 - u^4)}$; & cum ſit gl : Al = Ai : iu, erit iu $= a^3 : \sqrt{(a^4 - u^4)} =$ EN. Atque ideo mixtilineum AEN $= \int(a^3du : \sqrt{(a^4 - u^4)}) =$ AO : conſequenter AP $= \int(aadu : \sqrt{(a^4 - u^4)})$ = [N°. præc. Not. d] $= \sqrt{at}$ ſeu $\sqrt{}$AB. Aα. Igitur Aα = AP^2 : AB, tertia proportionalis ad AB, AP.

No. LX. major majori Elaſticæ portioni ϕRQ æquatur. Unde quoque ratio conſtat, illam ad propoſiti Problematis conſtructionem adhibendi (b).

Cæterum, ſicut infinitæ lineæ mechanicæ a curvæ circularis aut parabolicæ rectificatione, ſeu logarithmicæ deſcriptione dependent; ita præter curvam acceſſus & receſſus infinitarum aliarum, & partim etiam ipſius Elaſticæ conſtructio [ut infra apparebit] a rectificatione memoratæ algebraicæ quatuor dimenſionum derivatur. Et auſim aſſeverare in materia conſtructionis mecha-

(b) Oſtenſum eſt N°. præc. Not. (d) conſtructionem curvæ quæſitæ pendere ab integratione quantitatis $aadu : \sqrt{(a^4 - u^4)}$. Hæc, ut reducatur ad rectificationem curvæ algebraicæ, conſideranda eſt quaſi elementum curvæ, ejuſque quadratum dividendum, ſi poteſt fieri, in duo alia quadrata, quorum radices ſint integrabiles; ut integralia exprimant coordinatas curvæ algebraicæ. Commode autem accidit quadratum $a^4du^2 : (a^4 - u^4)$ dividi poſſe in duo $(a^4 - 4aauu + 4u^4)\, du^2 : (2a^4 - 2aauu)$, & $(a^4 + 4aauu + 4u^4)du^2 : (2a^4 + 2aauu)$ quæ ſimul juncta efficiunt $a^4du^2 : (a^4 - u^4)$, quorumque radices $(aa - 2uu)\, du : \sqrt{(2a^4 - 2aauu)}$, & $(aa + 2uu)\, du : \sqrt{(2a^4 + 2aauu)}$ poſſunt integrari. Sunt enim harum integralia, ſeu coordinatæ Curvæ, $u\sqrt{(aa - uu)} : a\sqrt{2}$ = quæ dicatur y, & $u\sqrt{(aa + uu)} : a\sqrt{2}$, quæ vocetur x. Nunc, ut habeatur æquatio inter coordinatas; ope iſtarum $u\sqrt{(aa - uu)} : a\sqrt{2} = y$ & $u\sqrt{(aa + uu)} : a\sqrt{2} = x$, eliminetur u, primum eas quadrando, $aauu - u^4 = 2aayy$, & $aauu + u^4 = 2aaxx$ atque addendo, $2aauu = 2aayy + 2aaxx$ ſive $uu = yy + xx$; quo patet u deſignare ſubtenſam Curvæ ab origine A exeuntem: Deinde pro uu ſubſtituendo valorem ejus, in æquatione $aauu + u^4 = 2aaxx$, ea ſic reducitur ad $aa(xx + yy) + (xx + yy)^2 = 2aaxx$, vel tranſponendo $(xx + yy)^2 = aaxx - aayy$, aut radicem extrahendo $xx + yy = a\sqrt{(xx - yy)}$, quæ ipſa eſt Lemniſcatæ æquatio; cujus itaque conſtat arcum, quem ſubtendit recta $AE = u$, æqualem eſſe quantitati $a\int(aadu : \sqrt{(a^4 - u^4)})$, quæ etiam exprimit arcum AQ, vel ϕRQ Elaſticæ. Igitur Lemniſcata potuit pro Elaſtica adhiberi ad conſtructionem Iſochronæ, hoc ſolum diſcrimine quod recta AE, quæ iſtius erat abſciſſa, illius eſſe debeat ſubtendens. Vide omnino Num. CIII. Art. 2. Cæterum dedit *Joh.* BERNOULLI *Act. Erud.* 1724, Aug. pag. 356, elegantiſſimam regulam pro reducendis quadraturis quibuſcunque ad rectificationes curvarum algebraicarum.

Digitized by Google

mechanicarum, hanc inter cæteras immediate ſequi præcedentes; adeo ut conſtructio, quæ per nullam priorum ſuccedit, proxime vel per hujus curvæ, aut per lineæ hyperbolicæ aut ellipticæ, aut duarum ſimul rectificationem tentanda ſit. Cujus rei ratio eſt, quod poſt differentialium formulas, $aadz:\sqrt{(aa-zz)}$, $zzdz:\sqrt{(aa-zz)}$, $aadz:\sqrt{(aa+zz)}$, $zzdz:\sqrt{(zz-aa)}$, quæ ope quadraturæ circuli & hyperbolæ integrantur, ſimpliciſſimæ fere videantur hæ expreſſiones, $zzdz:\sqrt{(z^4-a^4)}$, $aadz:\sqrt{(z^4-a^4)}$, $aadz:\sqrt{(a^4-z^4)}$, $zzdz:\sqrt{(a^4-z^4)}$, & ſimiles; quarum prima, mediante lineæ hyperbolicæ, ſecunda & tertia curvæ noſtræ lemniſcatæ, quarta ejuſdem & ellipticæ rectificatione integrantur. Etenim ſi indeterminata z applicetur ad hyperbolam æquilateram [cujus axis tranſverſus eſt $2a$] ex ipſius centro, ſatisfaciet arcus vertici & applicatæ interceptus pro prima formula (c). Et ſi eadem z [aut tertia proportionalis ad z & a, ubi z major quam a] ex nodo ſubtendatur curvæ lemniſcatæ, inſerviet ſubtenſus arcus pro duabus mediis (d). Et ſi denique ex centro ellipſis [cujus axis minor eſt $2a$, major $2a\sqrt{2}$] ipſa z abſcindatur in minore & per ſectionis terminum recta agatur majori parallela, deſignabit intercepta parallelis portio ellipticæ, truncata reſpondente portione curvæ lemniſcatæ, inte- No. LX.

(c) Per eandem analyſin, qua uſi ſumus Nota præc. decomponatur quadratum $z^4dz^2:(z^4-a^4)$, in alia duo $zzdz^2:(2zz-2aa)+zzdz^2:(2zz+2aa)$, quorum radices $zdz:\sqrt{(2zz-2aa)}$ & $zdz:\sqrt{(2zz+2aa)}$ erunt coordinatarum y & x elementa, ipſarumque integralia $\sqrt{(\frac{1}{2}zz-\frac{1}{2}aa)}$ & $\sqrt{(\frac{1}{2}zz+\frac{1}{2}aa)}$ coordinatæ y, x. Igitur quadrando ac duplicando $zz-aa=2yy$, & $zz+aa=2xx$, atque addendo $2zz=2xx+2yy$, vel $zz=xx+yy$; [unde patet z eſſe curvæ ſubtendentem;] vel ſubtrahendo $2aa=2xx-2yy$, vel $yy=xx-aa$, quæ eſt æquatio ad hyperbolam æquilateram. Vide rurſus Num. CIII. Art. 2.

(d) Oſtenſum eſt Nota (b), Arcum Lemniſcatæ, cujus parameter a, ſubtenſa u, æqualem eſſe $\int(aadu:\sqrt{(a^4-u^4)})$. Quare ſi $u=z$, erit dictus arcus $=\int(aadz:\sqrt{(a^4-z^4)})$. Si vero $u=aa:z$, erit dictus arcus $=-\int(aadz:\sqrt{(z^4-a^4)})$.

Digitized by Google

No. LX. integrale quartæ formulæ $zz\,dz : \sqrt{(a^4 - z^4)}$ (e): Unde cum eadem, *in citata Fig.* 3, exiſtente $AE = z$, elementum denotet applicatæ AP vel EQ in Elaſtica (f), patet hanc applicatam æquari differentiæ duarum portionum curvæ ellipticæ & lemniſcatæ; ideoque manifeſtum, quomodo Elaſtica per rectificationem utriuſque confici poſſit. Et quoniam Lemniſcatæ portio, ut ſupra monui, Elaſticæ portioni AQ adæquatur, liquet etiam, ellipticam ipſam adæquari aggregato AQ + AP; quæ non inelegans harum Curvarum proprietas exiſtit.

(e) Eſt enim $\int(zzdz : \sqrt{(a^4 - z^4)}) = \int((aa+zz)\,dz : \sqrt{(a^4 - z^4)}) - \int(aadz : \sqrt{(a^4 - z^4)})$. Hic autem ultimus terminus $aadz : \sqrt{(a^4 - z^4)}$ eſt arcus lemniſcatæ, cujus ſubtenſa $= z$. Et $\int((aa+zz)\,dz : \sqrt{(a^4 - z^4)}) = \int(dz\sqrt{(aa+zz)} : \sqrt{(aa - zz)})$ æqualis arcui ellipſis. Notum enim eſt, ſi a & c ſint ellipſis ſemi-axes, abſciſſa z, arcum eſſe $= \int(dz\sqrt{(aa - zz + cczz : aa)} : \sqrt{(aa - zz)})$. Fiat igitur $-zz + cczz : aa = zz$, aut $cc = 2aa$, vel $c = a\sqrt{2}$, & patet arcum ellipſis, cujus axes ſunt $2a$ & $2c = 2a\sqrt{2}$, reſpondentem abſciſſæ z [poſita origine earum in centro] eſſe $= \int(dz\sqrt{(aa+zz)} : \sqrt{(aa - zz)})$. Igitur $\int(zz\,dz : \sqrt{(a^4 - z^4)})$ = arcui ellipſis $[\int(dz\sqrt{(aa+zz)} : \sqrt{(aa - zz)})]$ minus arcu lemniſcatæ $[\int(aadz : \sqrt{(a^4 - z^4)})]$. Vide iterum Num. CIII. Art. 2.

Cæterum quantitas $z^m dz : \sqrt{(a^4 \pm z^4)}$ integrari poteſt, abſolute, quotieſcunque m eſt numerus ex ſerie imparium [affirmativorum aut negativorum] alternatim excerptus $\pm 3, \pm 7, \pm 11, \pm 15$, &c. Integrabitur autem, conceſſa circuli vel hyperbolæ quadratura, ubi $m = \pm 1$, vel ± 5, vel ± 9, &c.

(f) N°. LVIII, pag. 592, vel Nota (a) pag. 591.

N°. LXI.

N°. L X I.

G. G. L. *

NOVA CALCULI DIFFERENTIALIS APPLICATIO,

Et uſus ad multiplicem linearum conſtructionem ex data tangentium conditione.

MEmini jam a me inſinuatum in his *Actis*, ut rectarum ordinatim ſumptarum concurſu hactenus noto, ita & concurſu curvarum lineas formari. Sed placet rem non parvi ad Geometriam augendam momenti exponere diſtinctius; nam ne in rectis quidem concurrentibus, tota ejus vis fuit perſpecta. In genere igitur hoc Problema ad communis Geometriæ leges revocare hic docebo: *Lineis* [rectis vel curvis] *propoſitam tangentibus, poſitione ordinatim datis, invenire propoſitam*; vel quod eodem redit; *Invenire lineam, quæ infinitas lineas ordinatim poſitione datas tangit.* Cujus uſus cum latiſſime pateat, calculum in eam rem peculiarem jamdudum excogitavi, vel potius huc peculiari ratione applicui noſtrum differentialem, compendio non contemnendo. Scilicet quemadmodum CARTESIUS, loca Veterum calculo exprimens, æquationes adhibuit quæ cuivis curvæ puncto conveniunt; ita nos æquationes hic adhibemus infinities ampliores, quæ cuilibet puncto cujuſlibet curvæ in ſerie ordinatim ſumptarum curvarum comprehenſæ, accommodantur. Itaque *x* & *y* abſciſſa quidem & ordinata, ſeu coordinatæ, eſſe intelliguntur cujuſvis ex dictis curvis, ſed ſpeciatim tamen accipiuntur de curva ex ipſarum concurſu formata, ſeu ipſas tangente; utili quodam æquivocationis characteriſticæ genere. Coefficientes *a*, *b*, *c*, in æquatione cum ipſis *x* & *y* uſurpatæ, ſignificant quantitates in eadem *Acta Erud. Lipſ. 1694. Jul. p. 311.*

* *Gothofredi Guilielmi* LEIBNITII.

No. LXI. eadem curva conſtantes, alias quidem *inſitas* [nempe parametros,] alias vero *extraneas*, quæ ſitum curvæ [adeoque verticis axiſque] definiunt. Sed comparando curvas ſeriei inter ſe, ſeu tranſitum de curva in curvam conſiderando, aliæ coefficientes ſunt *conſtantiſſimæ*, ſeu *permanentes*, [quæ manent non tantum in una, ſed & in omnibus ſeriei curvis,] aliæ ſunt *variabiles*. Et quidem ut *ſeriei curvarum lex* data ſit, neceſſe eſt unicam tantum in coefficientibus ſupereſſe variabilitatem, adeoque ſi in *primaria* pro omnibus curvis *æquatione*, naturam earum communem explicante, plures extent variabiles, neceſſe eſt dari alias *æquationes acceſſorias*, coefficientium variabilium dependentiam inter ſe exprimentes, quarum ope omnes variabiles ex æquatione primaria tolli poſſint, præter unam. Cæterum pro concurſu duarum linearum proximarum, ſua interſectione punctum curvæ quæſitæ [quam & tangere intelliguntur,] determinantium, manifeſtum eſt, concurrentes quidem, adeoque lineam ex concurſu formatam tangentes, eſſe geminas; interſectionis autem ſeu concurſus punctum eſſe unicum, adeoque & ordinatam ei reſpondentem unicam eſſe: cum alioqui in inveſtigatione ſolita linearum propoſitam tangentium, rectarum vel curvarum [velut circulorum, parabolarum &c.] ex datæ curvæ ordinatis quærendarum, ordinatæ geminæ, tangentes unicæ concipiantur. Itaque quoad præſentem calculum, quo ipſæ ex tangentibus rectis vel curvis poſitione datis inveſtigantur ordinatæ, [contra quam in communi] manent ordinatæ x & y in hoc tranſitu [a proximo ad proximum] invariatæ, adeoque ſunt indifferentiabiles; at coefficientes [quæ in communi calculo indifferentiabiles cenſentur, quia conſtantes,] quatenus hic variabiles ſunt, differentiantur. Notabile eſt autem, ſi omnes inſitæ coefficientes ſint permanentes, curvæque adeo ordinatim concurrentes ſint congruæ inter ſe; perinde fore, ac ſi intelligantur eſſe veſtigia ejuſdem lineæ motæ, curvaque eorum concurſu formata lineam motam perpetuo durante motu tanget. Unde in hoc caſu oritur connexio quædam cum generatione *Trochoidum*; nam & baſis, ſuper qua volvitur generatrix Trochoeidis, generatricem durante motu tangit.

Calculus autem ita inſtituetur: Aſſumatur aliquis angulus rectus fixus, cujus crura utcunque producta conſtituere intelliguntur duos axes relationis curvarum, ſeu axem cum axe conjugato; in quos demiſſæ normales ex puncto curvæ quocunque erunt ordinata, x, & ordinata conjugata, ſeu abſciſſa, y; uno verbo, *coordinatæ*, x & y; quarum relationem ex datis quærendo habebitur *æquatio* [1], quam paulo ante appellavimus *primariam*, cum ſit cuilibet cujuſlibet curvarum ordinatim ſumptarum puncto communis. Quod ſi æquationi [1] inſunt plures coefficientes variabiles, ut b, c, dabitur earum dependentia per ſecundariam æquationem [2], unam vel plures; atque ita ex æquatione [1] tollendo coefficien-

ficientes variabiles, præter unam b, prodibit æquatio [3]. Hanc æquationem differentiando, ut prodeat æquatio [4], cum in ea ſola affutura ſit differentialis ipſius b, evaneſcet differentialitas, adeoque habemus æquationem [4] ordinariam, cujus ope ex æquatione [3] tollendo variabilem reſiduam b, habebitur æquatio [5], in qua præter x & y tantum ſupererunt coefficientes invariabiles [ut a] quæ erit æquatio ad curvam quæſitam concurſu ſeriei linearum formatam, adeoque *ad ſeriei linearum tangentem communem.* No. LXI.

Sed & aliter inſtitui poteſt calculus, prout facilitas invitabit, non tollendo ſtatim variabiles, ſed ſervando. Nempe datis, æquatione [1] primaria, & æquatione [2] ſecundaria [una vel pluribus, pro explicanda dependentia coefficientium variabilium inſervituris;] differentientur, æquatio [1], ut prodeat [3], & æquatio [2], ut prodeat [4] [una vel plures, ſi pro æquatione 2 affuerint plures.] Ita habebimus plures quantitates differentiales, ſed tamen habebimus & æquationes ſufficientes ad eas tollendas; & quidem modo tolli poſſint differentiales quantitates uſque ad unam, etiam reſidua iſta evaneſcet per ſe, & ſic prodibit æquatio [5] ordinaria, ſeu carens quantitate differentiali; quam conjungendo cum æquationibus [1] & [2] tolli poterunt variabiles omnes, & prodibit æquatio [6] naturam exprimens curvæ quæſitæ, linearum concurſu formatæ, quæ erit eadem cum æquatione [5] calculi prioris.

Hae jam methodo ſolvi poſſunt innumera Problemata ſublimioris Geometriæ, hactenus non habita in poteſtate, pertinentiaque ad tangentium converſam; ex quibus nonnulla in ſpecimen indicabo, magnæ utique generalitatis. Veluti data relatione inter AT & Aθ [*Fig.* 1] reſegmenta axium per curvæ tangentem CT facta, invenire curvam CC. Nam rectæ curvam tangentes ordinatim poſitione dantur, adeoque & curva quæſita, quippe quæ earum concurſu formatur. Vel ſi dato puncto axis T, detur lineæ datæ EE punctum E, ſic ut juncta TE, ſi opus producta, quæſitam curvam CC tangat, patet ex dictis curvam CC præſcripta hic methodo haberi. Similiter data relatione inter AP & Aϖ, reſegmenta axium facta per curvæ perpendicularem PC, licet invenire curvam CC: nam ob rectas Pϖ ordinatim poſitione datas, etiam datur linea FF formata per earum concurſum; hujus vero evolutione deſcribetur curva CC quæſita. Unde hic quidem infinitæ curvæ ſatisfacientes dari poſſunt, omnes ſcilicet *parallelæ* inter ſe, quæ ejuſdem lineæ evolutione *condeſcribuntur*; & data relatione inter AP & Aϖ dari poteſt *curva quæſita* non tantum ſatisfaciens, ſed & *tranſiens per punctum datum.* Interim hoc caſu curva CC non ſemper eſt ordinaria, quoniam ſcilicet non ipſamet, ſed ipſius per evolutionem generatrix rectarum poſitione datarum concurſu formatur. Certe cum ipſa curva formatur concurſu, habetur deter-

Digitized by Google

No. LXI. determinata, nec in arbitrio eſt punctum, per quod tranſeat; quæ diſtinctio utilis eſt in hac doctrina.

Sed exemplum calculi dabimus in Problemate itidem generali, ad aliquam tamen ſpecialem lineam applicato: *Data relatione perpendicularis* PC *ad proprium ab axe reſegmentum* AP, *invenire lineam* CC [*Fig.* 2]. Patet enim datis poſitione punctis P, nempe centris circulorum, & radiis PC datis magnitudine [ob datam relationem ad AP] *dari ordinatim circulos lineam* CC *tangentes*, adeoque lineam ipſam circulorum concurſu formatam haberi poſſe, id quod jam verbulo indicaveramus olim in *Actis* 1686, *menſe Junio*, *pag.* 300, ſub ſchediaſmatis finem. Itaque centro P, radio PC magnitudine dato, deſcribatur circulus CF. Ut ergo methodum paulo ante poſitam hic applicemus: ex puncto circuli quocunque F agantur normales ad crura anguli recti PAH, ſeu coordinatæ FG, y, & FH, x [quæ in caſu concurſus duorum circulorum incidunt in CB, CL]. Sit AP, b, & PC, c; fiet ex natura circuli [1] $xx+yy+bb=2bx+cc$, æquatio primaria omnibus noſtris circulis & cuique cujuſque puncto communis. Quoniam autem datur relatio inter AP & PC, dabitur curva EE, cujus ordinata PE æquetur PC; hæc curva ponatur [exempli gratia] eſſe parabola, cujus parameter a, & fiat [2] $ab=cc$, quæ æquatio ſecundaria exhibet relationem ſeu dependentiam inter c & b. Hujus ope tollendo c, ex æquatione 1, fiet [3] $xx+yy+bb=2bx+ab$; patet autem in æquat. 1, præter coordinatas x & y, adeſſe coefficientes c, b, a; ex quibus c & b ſunt in uno circulo conſtantes, & c quidem eſt circulo inſita, cum ejus radium deſignet; b eſt extranea, quippe ſitum centri deſignans; ambæ variatis circulis ſunt variabiles; ſed a eſt conſtantiſſima, ſive permanens, cum non unius tantum circuli omnibus punctis, ſed & pro omnibus circulis noſtris in æquatione maneat eadem. Reducta jam æquatio 3 ad unam coefficientem variabilem b, differentietur ſecundum b [ſolam in ea differentialem] & fiet $2bdb=2xdb+adb$, ſeu [evaneſcente db] fit [4] $b=x+\frac{1}{2}a$, [qui calculus in caſu unius differentiabilis in effectu coincidit cum methodo vetere *de maximis & minimis* a FERMATIO propoſita, ab HUDDENIO promota, ſed quæ tantum eſt corollarium noſtræ.] Jam ope æquat. 4, tollendo reſiduam coefficientem variabilem b ex æquat. 3, fiet [5] $ax+\frac{1}{4}aa=yy$ quæ eſt æquatio ad curvam CC quæſitam. Idque indicio eſt eam eſſe parabolam, ipſi datæ AE congruentem, ſed paulo tantum aliter ſitam; continuata enim CC vertice ſuo V incidet in axem AP, ſed ſupra datæ AE verticem A, ita ut diſtantia verticum AV ſit communis lateris recti pars quarta. Si alteram calculandi rationem malis, per plures differentiales; reſumptæ æquationes 1 & 2 differentientur, & ex 1 fiet [3] $bdb=xdb+cdc$, ſed ex 2 fiet [4] $adb=2cdc$ quarum [3 & 4] ope, tollendo dc, evaneſcet ſimul & db, & fiet

[5]

[5] $b = x + \frac{1}{2}a$, ut paulo ante. Unde jam per 1, 2, 5, tollendo *c* No.LXI.
& *b* coefficientes variabiles; prodibit [6] $ax + \frac{1}{4}aa = yy$, pro æquatione lineæ quæſitæ, ut ante.

Atque ita docuimus, data relatione perpendicularis PC ad proprium ex axe reſegmentum AP, exhibere lineam CC, quia ordinatim dantur circuli lineam tangentes. Sed data relatione rectæ tangentis TC ad proprium ex axe reſegmentum AT [ſeu circulis normalibus ad lineam ordinatim datis] invenire lineam CC, alterius eſt methodi; & *conſtructione tractoria* talis linea haberi poteſt, a nobis in his *Actis Sept. anni ſuperioris* explicata *. Hujus autem præſentis methodi noſtræ maximus præterea eſt uſus ad complura alia Problemata Geometriæ ſuperioris, aut etiam ad mechanica vel phyſica applicatæ. Cum enim id agitur, ut figura formetur, in quovis puncto dato ſuæ lineæ terminantis præſtans aliquid deſideratum, perſæpe conſequimur quæſitam formando ipſam concurſu linearum, quarum quævis in aliquo puncto ſatisfacit, ipſomet ſcilicet puncto concurſus. Hac ratione jam olim in ſchediaſmate de *Lineis Opticis* inveni modum lineas exhibendi, quæ radios ordinatim poſitione datos, ſeu a datæ figuræ ſpeculo venientes, reddant convergentes, aut divergentes, aut parallelos. Formatur enim talis linea ellipſium concurſu, ſi radii debeant fieri convergentes; eademque methodus valet, ſi reddendi ſint paralleli aut divergentes.

P. S.

Solutionem ſuam Problematis *Bernoulliani*, menſe nupero Maio, una cum objectione Anonymi *Actis Eruditorum* inſertam, *D. Marchio* HOSPITALIUS Auctor defendere non diſtulit, oſtenditque, ut intellexi, Anonymum, ſi calculum ſuum ad finem perduxiſſet, ipſummet ſolutionis datæ ſucceſſum fuiſſe deprehenſurum. Cæterum Anonymus ille aliam ſolutionem non dedit, neque id ſecundum Analyſin vulgarem facile præſtari poteſt. Noſtra autem nova, adeoque & Dni. *Marchionis* ac Dominorum BERNOULLIORUM methodus, non hoc tantum, ſed &, quemadmodum jam menſe Julio 1693, *in Actis* pag. 313, eſt admonitum, innumera ſimilia ſolvit, ſive abſolute pro re nata, ſive per quadraturas. Et generale Problema ſic concipi poteſt: *Data ratione inter duas Functiones invenire lineam.* Data ratio intelligitur, quæ eſt inter duas datas, velut *m* & *n*. *Functionem* voco portionem rectæ, quæ ductis ope ſola puncti fixi & puncti curvæ cum curvedine ſua dati rectis, abſcinditur. Tales

* Vide conſtructionem *Bernoullianam* N°. LVII, & N°. CIII. Art. 19.

No.LXI. Tales ſunt: [*Fig.* 1] Abſciſſa AB vel Aβ, ordinata BC vel βC; tangens CT vel Cθ; perpendicularis CP vel Cϖ; ſubtangentialis BT vel βθ; ſubperpendicularis BP vel βϖ; per tangentem reſecta AT vel Aθ; per perpendicularem reſecta AP vel Aϖ; correſecta PT vel ϖθ; radius oſculi ſeu curvedinis CF; & aliæ innumeræ.

N°. LXII.

JACOBI BERNOULLI DE METHODO TANGENTIUM INVERSA,

Quouſque tum in communis, tum in reconditioris Geometriæ poteſtate ſit & non ſit.

Conferenda cum Schediaſmate Leibnitiano *Menſis* Julii, 1694.

Act. Erud. Lipſ. 1694. Oct. p. 391.

ELegantia ſunt, quæ hic dedit Vir Eximius de Applicatione Calculi differentialis ad partem Methodi Tangentium inverſæ, quæ conſiſtit in conſtructionibus curvarum ex data relatione duarum *Functionum*, quas appellat, ad ſe invicem. Et cum ad profectum ſcientiæ conducat noſſe, quouſque hæc etiam per vulgarem Geometriam poſſint effici; obſervandum eſt, quod quotieſcunque Functiones illæ, quas inter ratio data, hoc eſt, algebraica ſupponitur, tales ſunt, ut curvam neceſſario poſcant algebraicam [quod fit, ubi rectæ curvæve quæſitam tangentes ordinatim poſitione dantur, ut cum ex data relatione inter reſeg-

reſegmenta axium AT & Aθ, [*Fig.* 1] aut inter perpendicula- No. LXII.
res CP & reſegmentum AP, quæritur Curva.] Problema quoque ſemper in poteſtate communis Geometriæ ſit futurum, ut non opus ſit differentialium calculo uti, niſi pro illis curvis, quas data relatio non ſemper algebraicas arguit; quod ſpeciatim in ipſo exemplo Celeberrimi Auctoris ita manifeſtum fit: Sit invenienda Curva CC, cujus perpendicularis PC ad reſegmentum ab axe AP habeat relationem datam, velut eam quam habent coordinatæ Parabolæ AE, hoc eſt, [ob communem rationis terminum AP,] ut PC ſit æqualis PE. Intelligantur centris P & (P) radiis perpendicularium PC (PC), duo circuli deſcribi interſecantes ſeſe citra curvam in F, erunt per hypotheſin PC (PC), hoc eſt, PF, (P) F, ſingulæ reſpondentibus PE (PE), æquales; unde & reciproce, dato quovis citra curvam puncto F, [hoc eſt, datis A (B), (B) F, rectis,] duæ ex illo ſatisfacientes rectæ FP, F (P) ad axem inflecti poſſunt, eo propiores futuræ ſibi & perpendicularibus PC quo punctum F curvæ propius aſſumptum fuerit; adeo ut hoc in ipſamet curva accepto [rectis AB, BF, coordinatis ejus exiſtentibus] omnes PC, PF in unam perpendicularem PC, ut & puncta P & (P) in unum P coalitura ſint, ipſaque æquatio ab AP denominata duos æquales valores acquiſitura: unde quæſitum vulgari arte conſequendi conſtat. Nempe poſitis A (B) $= x$, (B) F $= y$, AP $= b$, PF $= c = \sqrt{ab} =$ PE, ut emergat æquatio $bb - 2bx + xx + yy = ab$, operatio ſic ſe habebit:

$$\begin{array}{ccccc} bb - 2bx + xx + yy = ab & \qquad & bb - 2bx + xx + yy = ab \\ 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 & & 1 \quad 0 \; -1 \; -1 \quad 0 \\ \hline 2bb - 2bx \quad = \quad ab & & bb \quad - xx - yy = 0 \end{array}$$

ſeu $b = x + \frac{1}{2}a$ ſive $b = \sqrt{(xx + yy)}$

quare $x + \frac{1}{2}a = \sqrt{(xx + yy)}$, hoc eſt, $ax + \frac{1}{4}aa = yy$, æquatio pro curva quæſita, eadem cum *Leibnitiana*. Et memini, cum *Frater* olim e Galliis redux ipſum hoc Problema, ut difficile quippiam ibi habitum, mihi propoſuiſſet, me constructio-

 nem

No.LXII. nem generalem e veſtigio hanc dediſſe. Super curvæ AE [cujus ordinatæ AP, PE, relationem datam exhibent] ſubtangentiali PD, ceu diametro, deſcribatur ſemicirculus PCD, in qua adaptetur PC = PE, erit C punctum in optata curva CC, eique perpendicularis adaptata PC (a). Similiter etiam data relatione inter reſegmenta axium per tangentem AT, Aθ, [hoc eſt, data curva AQ, cujus in T applicata TQ ſit æqualis Aθ] Curva CC generali conſtructione reperitur, ut ne calculo quidem opus ſit: Ducta enim tangente datæ curvæ QR, reperiatur ad AR & AT tertia proportionalis AB, abſcindenda in axe ad partes R, occurretque erecta ſuper ipſo perpendicularis BC poſitione datæ tangenti Tθ in puncto quæſitæ curvæ C (b): ubi commodum recordor *Fraterni Problematis in Januario* 1692, pag. 33. inſerti (c), quod noſtri tantum ſpecialis caſus eſt, in quo curva, cujus coordinatæ datam relationem exhibent, circulus exiſtit ſuper axium conjugatorum concurſu deſcriptus; unde facillima conſtructio emergit, quæ ſit, abſcindendo tantum [vide Figuram 4, ibidem] in ſubtenſa anguli recti ED partem EB vel DB, quæ ſit tertia proportionalis ad ED & crus illi oppoſitum FD vel FE. Non ſecus vero etiam, datis poſitione curvis Lineam

(a) Sit F curvæ quæſitæ punctum, FT tangens ejus, F (P) perpendicularis, & ductis PO, EN parallelis ipſis FT, AP, erit (P) T: (P) F = (P) P: (P) O = EN: (E) N [nam ob (P) F = (P) (E) & PF = PE eſt etiam (P) O = (P) F — FP = (P) (E) — PE = N (E)] = (P) D: (P) (E) vel (P) F. Igitur (P) T = (P) D. Quamobrem tangentis FT terminus eſt in D. Deſcripto itaque ſuper PD ſemicirculo, eſt punctum F in ejus peripheria; applicetur ideo perpendicularis PF = PE, & habebitur punctum F.

(b) Sit C (θ) (T) tangens viciniſſima tangenti CθT, & ducantur ordinata (T) (Q) = Aθ, atque QM, θt ipſi AT parallelæ, cumque ſit TQ = Aθ & (T) (Q) = A (θ) erit M (Q) = θ (θ). Jam vero eſt AB : BT = Cθ : CT = θt : T (T) = θt : θ (θ) + θ (θ) : T (T) = AT : Aθ vel QT + M (Q) : MQ = AT : QT + QT : TR = AT : TR; Ergo dividendo eſt AB : AT = AT : AR. AB igitur eſt tertia proportionalis ad AR, AT.

(c) Supra No. XLVI. pag. 470.

Applicatio autem præſentis conſtructionis ad caſum illum nihil habet difficultatis.

Digitized by Google

neam quæſitam tangentibus, ipſa communis Geometriæ ope reperitur. Sic aliquando ſolvi vulgari methodo *Problema Balliſticum* de definienda Curva quam tangant omnes parabolæ, a globo in ſingulis mortarii elevationibus conſtante vi exploſo, deſcriptæ. Sic etiam reperio lineam, quæ tangat ſeriem paraboloidum ejuſdem gradus, circa eundem axem conſtitutorum, at vertices diverſos, parametrumque intervallo verticis & extremitati axis æqualem habentium, perpetuo rectam eſſe ([4]). Porro, quo pacto, communis Geometriæ beneficio, ex data duarum Functionum relatione, tertia ſit elicienda, & ſpeciatim ex data relatione coordinatarum, id eſt, ex ipſa data curva, radius oſculi, [ſupponendo in æquatione duas vel tres radices æquales; prout oſculum ſpectatur ut concurſus, vel duorum radiorum circulorum tangentium inæqualium, vel trium radiorum unius ſecantis circuli,] id jam in *Additamento citato Problemati Menſis Januarii 1692*, pagina 34 *, & in *Lucubrationibus Menſis Martii*, 1692 †, & *Junii 1693*, de *Natura oſculorum* ††, abunde oſtendimus: idemque etiam per præcedentem conſtructionem poteſt effici. Cum enim detur curva, punctumque in ea, per hypotheſin, adeoque ſubperpendicularis, adeoque poſitione radius oſculi, iſque extremitate ſua tangat curvam evolutam, dabuntur quoque reſegmenta axium conjugatorum per hunc radium. Ergo per præcedentem dabitur Evoluta. Ergo & radius oſculi dabitur longitudine. Quomodo vero ex data coordinatarum una & radio oſculi, ipſa viciſſim curva indaganda ſit, hoc quidem communis Geometriæ vires tranſcendit; nec enim dantur poſitione oſculantes circuli. Dependet autem Problema a *conſtructionibus Elaſticarum*: Deſcripta namque curva, cujus applicata reciproce proportionetur radio oſculi, ſi ad ipſam, ceu ad Lineam Tenſionum, conſtruatur Elaſtica, erit hæc quæſita, ut No.LXII.

Kkkk 2 ex

([4]) Vide Num. LXVII, Nota VII, & *Analyſim inf. parvorum*, Sect. VIII, Art. 146, atque Sect. IX, Art. ult. [209].

* Supra pag. 471.
† Supra N°. XLVII, pag. 473. ſeq.
†† Supra N°. LVI., pag. 559. ſeq.

Digitized by Google

No.LXII. ex nuperis *Menſe Junio* 1694 publicatis colligere eſt *. Sed tandem illud in genere tenendum (quod initio innui) omnia Problemata, quibus promiſcue algebraicæ & tranſcendentes Curvæ ſatisfaciunt, Geometriæ reconditiori propria eſſe, fruſtraque tentari per communem: eorum vero alia conſtrui per ſimplices *quadraturas* aut *rectificationes*; alia per *inflexiones Elaterum*, ut præcedens; alia ſaltem per *tractiones*, ut cum quærenda proponitur curva, ex data relatione rectæ tangentis ad proprium ex axe reſegmentum; cujus conſtructionem in caſu relationis conſtantis (qualem *Frater* propoſuerat) An. 1693, *Menſe Junio* ** dedimus, facile tamen accommodandam ad caſum cujuſvis relationis datæ variabilis, modo loco rectæ, ſuper qua fili deſcribentis extremitas protruditur, ſubſtituatur Curva cujus ordinata æquetur exceſſui fili ſupra tangentem datam. Nemo vero hic exiſtimet, omnem Methodum inverſam his exhauſtam eſſe, ut pote quæ non debet acquieſcere in qualicunque curvarum conſtructione, ſed primario rimari, quot quibuſque in caſibus ſint futuræ algebraicæ, aut ſecus, ac tum ad cujus gradus quadraturas referantur: quod in modo laudato Problemate Dnus. *Marchio* HOSPITALIUS & ego præſtitimus. Ad hoc vero præſtandum requiritur, ut in æquatione litteræ indeterminatæ cum ſuis differentialibus a ſe mutuo ſeparentur, quod nec ſemper fieri poteſt, nec ſi poſſit, univerſali methodo conſequi licet: & quemadmodum datis æquationibus algebraicis quibuſvis, multiplicatione ex ipſis compoſita facile habetur; data vero compoſita, invenire componentes difficillimum & ſæpe impoſſibile, ut nulla huic negotio univerſalis regula præſcribi poſſit, particulares vero infinitæ, quarum bonam partem collegit HUDDENIUS: ita quoque Methodus directa tangentium ubique facilis, inverſa generalis nulla, ejuſque loco tantum particulares dari poſſunt regulæ, quarum qui plures collegerit, is optime de hac Methodo meruiſſe cenſebitur. Ad directam Methodum pertinet hoc Problema, quod

* N°. LVIII. Art. I. §. 7. pag. 583.

** Supra N°. LVII. pag. 574. Vide etiam Num. CIII. Art. 19.

Digitized by Google

quod tentari poteſt: *Datis* [Fig. 2] *tribus Curvis algebraicis* G, H, I, *& quarta* K, *quam formant interſectiones rectarum* HK, IK, *tangentium curvas* H & I *in iiſdem punctis, in quibus tangens curva* G *ipſas ſecat, quærere tangentem quarta* K (f). No. LXII.

(f) Sit [*Fig.* A] G*hi* tangens curvæ G, tangenti GHI proxima, ſecans curvas H, I, in *h*, & *i*, ex quibus eductæ tangentes *hk*, *ik*, ſeſe mutuo ſecent in *k*, quod erit punctum curvæ K ipſi K viciniſſimum, adeoque K*k* tangens eſt quæſita, quam ponimus occurrere rectæ GH (productæ, ſi opus eſt) in L, unde ducatur LT parallela ipſi IK, nec non ad HK normalis LP, iſtique parallela KN, quam ſumere licet pro arcu circuli centro H per K deſcripti. Demittatur etiam ad IK vel LT perpendicularis KQ, cujus pars perexigua KO haberi poteſt pro arcu circuli centro I per K deſcripti. Denique ſint R, S, centra circulorum oſculantium curvas datas in H, & I, ducanturque radii RH, R*h*, nec non SI, S*i*, atque recta IM ipſi H*h* parallela. Quibus poſitis, erit HL : IL = HT : KT [ob ſim. Tr. HLT, H:K] = HT : LT + LT : KT = HK : KI + LP : KQ [ob ſim. Tr. rectang. LTP, KTQ] = HK : KI + KN : KO [ob ſim. Tr. KLP, K*k*N, & KLQ, K*k*O] = HK : KI + KN : KH + RH : KI + KI : KO = HK^2 : KI^2 + KN : KH + KI : KO = HK^2 : KI^2 + H*h* : HR + IS : I*i* [ob ſim. Tr. H*k*N, R*h*H, & IKO, SI*i*] = HK^2 : KI^2 + IS : HR + H*h* : I*i* = HK^2 : KI^2 + IS : HR + H*h* : IM + IM : I*i* = HK^2 : KI^2 + IS : HR + GH : GI + HK : KI [ob ſim. Tr. GH*h*, GIM, & IM*i*, IKH,] = HK^3 : KI^3 + IS : HR + GH : GI. Sunt autem dati hi omnes termini HK, KI, IS, HR, GH, GI. Dantur ideo rationes HK^3 : KI^3, IS, HR, GH : GI. Datur itaque ratio HL : IL quæ ex illis componitur & dividendo, datur ratio HI : HL. Datur autem HI : quare datur HL, atque ideo punctum L. Sed & datur punctum K. Datur ergo tangens KL.

Id Problema, ratione haud multum diſſimili, ſolutum dedere Viri Celeb. *Joh.* BERNOULLI *Act. Erud. Lipſ.* 1695. Febr. pag. 65, & *Marchio* HOSPITALIUS, *ibid.* Jul. pag. 307.

N°. LXIII.

SOLUTIONES
PROBLEMATIS HOSPITALIANI
De Curva æquilibrationis,
Auctore JAC. BERNOULLIO.

PROBLEMA.

Acta Erud. Lipſ. 1695. Febr. p. 65. AB vel AC eſt pons arrectarius verſatilis circa A: BDH vel CDP funis extremo pontis alligatus, ambiens trochleam D: P, pondus annexum funi & æquilibrium ubique cum ponte conſtituens, ut pons, minima ſuperaccedente vi attolli demittique poſſit:

Quæritur, qua curva hoc liceat conſequi?

PRIMA SOLUTIO.

Ductæ intelligantur BK, CR, CF, AE perpendiculares ipſis AB, AC, AD, & CD, & vocentur AB, vel AC, *a*; AD, *b*; BD, *c*; DH, *f*; nec non applicata quæſitæ curvæ QM, *y*; & portio funis SQ, *z*; item pondus P, *p*; & pondus pontis, *q*. Quo facto, erit, per principia Statica vulgo nota, Potentia ſuſtinens pontem in K: Potent. ſuſt. in R = AB [AC]: CF; & Pot. in R: Pot. obliq. in D = AE: AC; quare *ex æqual.*

æqual. perturb. Pot. in K [$\frac{1}{2} q$]. Pot. in D $=$ AE : CF $=$ [ob N. LXIII.
Triang. ſimilia AED & CFD] AD : CD $= b : c - z$; unde Potentia ſuſtinens pontem AC in D $= (cq - qz) : 2b$. Ex altera parte, dum grave P conatur deſcendere per elementum curvæ PQ, velocitas ejus in perpendiculo eſt QN, ſeu dy, & velocitas potentiæ ſuſtinentis grave, QO, ſeu dz; ideoque $dz : dy = p : \frac{p\,dy}{dz} =$ Pot. ſuſt. grave P $=$ [per hyp.] Pot. ſuſt. pontem AC $= (cq - qz) : 2b$, hoc eſt, $2bp\,dy = cq\,dz - qz\,dz$; integrataque æquatione, $4bpy = 2cqz - qzz$.

2. *Aliter, ſine differentialium calculo.*

$AC^2 + AD^2 - CD^2 = 2\,DAF$, id eſt, $aa + bb - cc + 2cz - zz = 2b$ in AF, id eſt, [ob $cc = aa + bb$] AF $= (2cz - zz) : 2b$. Ergo pondus pontis q in $\frac{1}{2}$ AF, ſive quantitas aſcenſus perpendicularis centri gravit. ejus $= (2cqz - qzz) : 4b$. Quantitas vero deſcenſus iſochroni appoſiti gravis P eſt py; quare $py = (2cqz - qzz) : 4b$, ſeu $4bpy = 2cqz - qzz$; ut antea.

Conſtr. Factis angulis rectis AHI & HIL, ſic ut HI æquetur ipſi BD, IL vero ſit longitudinis arbitrariæ, modo non excedat alterius ſemiſſem; deſcribatur per puncta L & H Parabola LNH, cujus vertex L & axis IL. In hac ſumptum ſit quodvis punctum N, per quod tranſeant rectæ NM, NP, parallelæ ipſis HA, HI; factaque HG $=$ HM, centro D, radio DG, arcus deſcribatur GPO ſecans NP rectam in P. Erit punctum hoc in optata curva HQ. Grave P ei imponendum ad pontis pondus habet rationem compoſitam ex ratione DB ad duplam AD, & ejuſdem DB ad duplam IL. Hinc grave P ſemper excedere debet ſemiſſem ponderis ipſius pontis. Dimidio vero poteſt minui, ſi in extremitate pontis C alia intelligatur trochlea, quam funis CD amplectatur. (a)

(a) Animadvertit Cel. *Joh.* BERNOULLI Frater Auctoris curvam optatam

Digitized by Google

N. LXIII. tatam HQ cycloidalem eſſe genitam ex rotatione circuli ſuper æqualem circulum. Videatur ejus animadverſio in ſolutionem Dni. *Marchionis* HOSPITALII *Act. Erud. Lipſ.* 1695, Febr. pag. 60. ſeq. Interim mihi temperare non poſſum, quin elegantiſſimam ejus & generaliſſimam ſolutionem adjungam. Problema ſic generaliter ſibi propoſuit. *Data in plano verticali curva quavis* A B [Fig. A], *quæritur in eodem plano altera curva* LM, *ita ut duo pondera data* B, M, *communi funiculo* BCM *trochleam fixam* C *ambienti alligata, & curvis ubicunque impoſita, ſemper ſibi mutuo æquilibrentur.* Illudque ita ſolvit. „ Pro principio, inquit, aſſumo notiſſimum illud axioma ſtaticum; In omni motu gravium æquilibratorum, centrum gravitatis neque aſcendit, neque deſcendit, ſed perpetuo manet in eadem altitudine horizontali. Ut hoc ad præſens negotium applicetur, curva quæſita debet habere proprietatem talem, ut duo pondera M, B habeant, in quovis ſitu, ſemper eundem horizontalem axem æquilibrii. Per ductam itaque verticalem CQ agatur utcunque horizontalis KIE [quæ conſtantem axem æquilibrii denotet,] fiatque ut pondus datum M ad pondus datum B, ita diſtantia breviſſima IH [quæ data eſt ob curvam datam AB] ad quartam IP, quæ ad partem contrariam ſumenda eſt, & ducenda parallela P M, quæ ſecabit arcum centro C & radio CM [differentia funiculi totius & partis datæ CB] deſcriptum in puncto M, quod erit ad curvam optatam. Hoc enim modo fit, ut centrum gravitatis commune ponderum B & M ſemper exiſtat in linea horizontali KIE, quæ cum ad arbitrium ducta, ita duci poteſt, ut curva optata tranſeat per quodlibet punctum datum, &c.

N°. LXIV.

N°. LXIV.

G. G. L. *

CONSTRUCTIO

PROPRIA PROBLEMATIS

DE CURVA ISOCHRONA

PARACENTRICA.

Ubi & generaliora quædam de natura & calculo differentiali oſculorum,

Et de conſtructione linearum tranſcendentium, una maxime geometrica, altera mechanica quidem, ſed generaliſſima.

Acceſſit modus reddendi inventiones tranſcendentium linearum univerſales, ut quemvis caſum comprehendant & tranſeant per punctum datum.

A Celeberrimo Viro *Jacobo* BERNOULLIO, Matheſeos apud Baſileenſes Profeſſore, in *Actis menſis Junii* nuperi †, velut invitatus; præſertim circa Problema a me olim, cum nondum noſtra calcu- *Acta Erud. Lipſ. 1694. Aug. p. 364*

* *Gothofredi Guilielmi* LEIBNITII. † N°. LIX. pag. 601.

N. LXIV. landi methodus frequentari cepiſſet, propoſitum, reſponſionem defugere nolui, tametſi & valetudo vacillans & aliæ multiplices cauſæ excuſare me fortaſſe poſſent. Et quidem profundius iſta meditari non licet, aut demonſtrationes introſpicere; minime tamen dubito, pro explorato acumine *Viri*, vera attuliſſe. Quo conſtituto, libenter agnoſco non facile in ſpecialium Problematum ſolutione apud Geometras pulchriora repertum iri. Quædam tamen annotabo, quæ mihi primo aſpectu ſeſe obtulere, nec novo ſtudio indigebant. Theoremata pro inveniendis radiis circulorum oſculantium * elegantia & utilia ſunt; utorque ſimilibus vel expreſſe, vel potius virtualiter, ipſa calculi noſtri natura jubente, quoties generatricem evolutoriam vel oſcula quæro lineæ non niſi differentialiter, ſeu per tangentium proprietatem datæ; tunc enim ut ex duabus incognitis generatricem determinantibus unius [altera ſublata] valor, per ipſas x, y, dx, dy lineæ differentialiter datæ, generaliter habeatur, utique veniendum eſt ad differentio-differentiales; quæ tamen ceſſant in applicatione, quia $dy : dx$, per ordinarias explicatur. Sed & pro centris, non minus ac radiis, circulorum oſculantium Theoremata generaliora formari poſſunt, quæ certorum elementorum æqualitate non indigent. Tale hoc eſt [cujus Corollaria ſunt, quæ Vir Clariſſimus attulit,] Radius oſculi eſt ad unitatem, ut elementum unius coordinatæ eſt ad elementum rationis elementorum alterius coordinatæ & curvæ. *Rationem* autem hic ſumo pro re homogenea unitati vel numero, quæ oritur ex diviſione antecedentis per conſequens. Item: Diſtantia centri oſculantis circuli ab ordinata curvæ eſt ad unitatem, ut tertia proportionalis elementorum abſciſſæ & curvæ eſt ad elementum rationis elementorum abſciſſæ & ordinatæ. Et quod notatu dignum eſt, poſſunt hæc indagari ſine meditatione figuræ; nempe ex calculo ſolo a nobis propoſito: quærendo ſcilicet æquationem localem ad rectam curvæ normalem, eamque differentiando ſecundum quantitates in ea geminatas, methodo a me præſcripta in *Actis Aprilis*, 1692, & nuper † illuſtrata. Nempe ſit [*Fig.* 1] abſciſſa AB, x; ordinata BC, y; vel contra; & elementum curvæ ſit dc. Et CP ad curvam perpendicularis axi occurrat in P; ſumaturque in ea punctum quodcunque G, unde ad axem normalis GF ducatur. Jam ſit AF, f; & GF, g; fietque [cum ſigna ita poſtulabunt] $g + y$ ad $f - x$ ut dx ad dy, ſeu fiet $g + y = (f - x)\, dx : dy$, quæ eſt æquatio localis ad rectam indefinite productam, curvæ normalem. Verum, quia jam duarum hujuſmodi rectarum quæritur interſectio, differentianda eſt hæc æquatio; hoc tantum obſervato, ut g & f, ob commune punctum concurſus, conſiderentur velut coincidentes in utraque recta, adeoque indiffe-

* N°. LVIII. pag. 578.   † N°. LXI.

Digitized by Google

differentiabiles. Et fiet $dy = (f - x)\, d(dx : dy) - dx\,dx : dy$; ſeu N. LXIV.
$dcdc : dy$ [tertia proportionalis ipſis dy, dc] eſt ad $d(dx : dy)$ [elementum rationis inter dx & dy] ut $f - x$ ad unitatem: quod eſt poſterius Theorema ex iis quæ paulo ante adduxi. Quod ſi rationem inter dx & dy vocemus r, fiet dx ad $rdr : (1 + rr)$ [elementum quoddam pro dicta ratione logarithmicum] ut diſtantia a coordinata nempe $f - x$ eſt ad unitatem (a). Iiſdem poſitis, radius oſculi vocetur q, fiet $q\,dy : dc = f - x$; & differentiando fiet $q\,d\,(dy : dc) = - dx$ ſeu fiet q ad 1, ut $- dx$ ad $d\,(dy : dc)$ vel q ad 1, ut dy ad $d\,(dx : dc)$ quod eſt Theorema prius. Et omnino variari iſta poſſunt infinitis modis, conſtituique pro uſu Problematum; potiſſima tamen elegantioraque conſignari prodeſt ad ſcientiæ incrementum. Et latent ſane in iſtis, quæ egregios uſus habere poſſunt.

De *Elaſtro* in univerſum quidem dici, opinor, poteſt: tenſionem eſſe proportionalem vi tendenti. Sed cum in ſolidi contenti mutatione tenſio conſiſtat, non ſolet tota in longitudinem refundi; ut ſi fingamus pilas inflatas in lineam poſitas eſſe, viciniamque vicinæ nodo quodam alligari, ac totum funem ex illis compoſitum intendi; manifeſtum eſt, funis extenſionem in longitudinem non fore proportionalem tenſioni aeris incluſi in pilis, ſeu vi tendenti. Quæ cauſa etiam eſt, quod de lamina elaſtica non, æque ac de catena, certi aliquid conſtitui poteſt. Itaque recte *Clariſſimus Vir* generalia dedit pro quacunque tenſionis lege.

Cum varios modos conſtruendi tranſcendentes lineas examinaſſem olim, omnium abſolutiſſimum eſſe repereram, qui fieret inventione punctorum quotcunque per meras quantitates ordinarias ſeu algebraicas, ſuppoſita tantum una quantitate conſtante tranſcendente pro punctis omnibus: cum alias perpetuo tranſcendentibus novis ſit opus pro puncto quovis. Et hoc modo uſus eram ad catenariæ conſtructionem. Is igitur valde probatur *Celeberrimo Viro* pagina 271 *: dolendum tamen cenſet, quod non ſit univerſalis; etſi enim ſuccedat in his, quæ pendent a logarithmis vel quadratura hyperbolæ, non tamen adhiberi poſſe, ubi quadratura circuli vel altior alia requiritur. Cum vero mihi ſecus videatur, omninoque arbitrer pro circuli dimenſione, imo & pro altioribus, ſimile aliquid fieri poſſe; ad promotionem ſcientiæ intereſt, ut res nonnihil declaretur. Nempe

 quod

(a) Nempe, per mox demonſtr. $f - x : 1 = \frac{dc^2}{dy} : dr$. Sed $dc^2 : dy^2 = (dy^2 + dx^2) : dy^2 = dy^2 : dy^2 + dy^2 : dx^2 = 1 + rr$. Ergo $dc^2 : dy = (1 + rr)\, dy$, & $(f - x) : 1 = (1 + rr)\, dy : dr = (1 + rr)\, rdy : rdr = (1 + rr)\, dx : rdr$ [eſt enim $rdy = dx$] $= dx : \frac{r\,dr}{1 + rr}$.

* Pag. 591.

N. LXIV. quod pro quadratura hyperbolæ præſtat ſectio rationis, ſeu inventio mediarum proportionalium, id pro circulari præſtat ſectio anguli. Itaque loco logarithmicæ adhiberi poteſt *Linea ſinuum* [noſtro more explicata] vel Linea tangentium, aliaque ſimilis. Nempe ſumatur quadrans circuli ABCGA, [*Fig.* 2] cujus baſis BC eſt ſinus totus, altitudini BA utcunque productæ in E, tanquam axi, ordinatim applicentur ſinus recti, hoc modo: Arcus quadrantis biſecetur in G; & ſegmenta AG, CG rurſus biſecentur in H & K; & ſegmenta AH, HG, GK, KC denuo biſecentur, eodemque modo pergi intelligatur. Porro ſimiliter altitudo EB biſecetur in (G); & E (G), B (G) in (H) & (K) atque ita porro: tum ipſæ rectæ a punctis ſectionum ad axem ductæ, ut GL, HM, KN ſeu ſinus angulorum GBC, HBC, KBC, [quos cum baſi comprehendunt radii a punctis ſectionum arcus ad centrum ducti] ordinatim applicentur reſpondentibus punctis ſectionum altitudinis; ſeu transferantur in (G) (L); (H) (M); (K) (N); & ſinus totus BC, in B (C); & linea E (M) (L) (N) (C) erit linea ſinuum. Atque ita, ſi ordinatæ velut (M) (H) ſint ut ſinus angulorum [velut ABH], abſciſſæ E (H) erunt ut anguli, ſeu ut arcus, [velut AH]. Et, ſiquidem tota altitudo EB ſit æqualis arcui quadrantis, abſciſſæ erunt arcubus dicto modo reſpondentibus æquales. Igitur linea hæc ſinuum per puncta deſcribi poteſt, non minus ac logarithmica. Ipſa autem ſemel deſcripta, dataque una ſola quantitate conſtante, quæ eſt ratio diametri ad circumferentiam; ſeu data ratione arcus quadrantis AGC, ad radium BC; adeoque data ratione arcus AGC ad altitudinem BE [cujus ratio ad BC pro arbitrio ſumpta eſt,] patet, ope lineæ ſinuum deſcriptæ, arcum circuli quemvis dari; adeoque & ſegmenti cujuſque circularis vel ſectoris quadraturam. Quemadmodum autem in logarithmica datur unica illa quantitas requiſita, ſi detur figuræ deſcriptæ tangens; ita in linea ſinuum idem eſt. Nam ſi ordinatæ ſint ſinus, & abſciſſæ ſint proportionales arcubus, erunt elementa abſciſſarum proportionalia arcuum elementis. Jam elementum arcus eſt ad elementum ſinus, ut radius ad ſinum complementi. Ergo in figura ſinuum dicta, erit elementum abſciſſæ ad elementum ordinatæ, id eſt, erit ſubtangentialis quæcunque T (G) ad ordinatam GL ſeu ſinum, in ratione compoſita radii AB ad arcum quadrantis AGC, & altitudinis BE ad BL ſinum complementi; & ipſe arcus quadrantis erit ad radium, ut BE altitudo lineæ ſinuum eſt ad T (G) ſubtangentialem quadraginta quinque graduum ſinui reſpondentem. Porro quemadmodum lineæ tranſcendentes, id eſt, æquatione algebraica, ſeu certi gradus, inexplicabiles, nempe de gradu in gradum tranſeuntes, deſcribi poſſunt ſectione rationis & anguli; ita manifeſtum eſt, innumerabiles alias hujuſmodi per puncta conſtructiones poſſe excogitari linearum tranſcendentium, quas ad alias quadraturas, itemque ad tangentium inverſam methodum, ſeu differentialium primi gradus conſtru-

conſtructionem profuturas ex dictis intelligi poteſt. Atque ita ad novum velut Pelagus meditationum aditus patet, quod rite ingredienti præclara dabit; cum in his vera conſiſtat connexio Analyſeos algebraicæ atque tranſcendentis. Qua occaſione noto obiter, quod *Vir Clariſſimus* in mei gratiam algebraicas ſe inpoſterum vocaturum ait, quas ante geometricas vocaverat, non ita a me accipi, quaſi mihi neſcio quam in his affectationem imputet; ſed quod rationes meas non improbet, quibus inductus ſtatuo, quicquid exactum eſt geometricum eſſe, mechanicum vero quod fit appropinquando; nec minus peccaſſe CARTESIUM hæc Geometria excludendo quæ ipſius Analyſi non ſubjiciebantur, quam Veteres CARTESIO peccaſſe erant viſi, qui lineas ſupra rectam & circulum ad mechanicas retulerant. N. LXIV.

Nota, quam *Vir Clariſſimus* adhibet pagina 271 *, unde intelligatur, an quadratura figuræ ordinariæ ope logarithmicæ exhiberi poſſit, quod ſcilicet res tum demum ſuccedat, cum ordinata figuræ quadrandæ eſt ſubtangentialis algebraicæ; non videtur univerſalis; nec niſi pro illis eſt, quæ ſimpliciore ratione per logarithmos conſtruuntur. Nam eo caſu, quo hæc nota locum habet, logarithmus ordinatæ ad alteram illam curvam algebraicam dicta ſubtangentiali præditam, erit æqualis rationi, quam ordinata quadratricis ſeu ſummatricis habet ad conſtantem; ſcilicet in quadratrice ſit ordinata y, in quadranda t, in altera algebraica v; abſciſſa utrobique ſit x, & in algebraica ad v ſit ſubtangentialis q; ſitque $ady = tdx$; & t detur per x, & ob notam præſcriptam ſit $q = aa : t$, erit ex natura ſubtangentialis $dx : q = dv : v = tdx : aa = dy : a$. Ergo log. $v = y : a$. Sit jam in exemplo ad inſtantiam apto $t = x + aa : x$, fiet $y = xx : 2a + a$ log. x ([b]). Ergo ſi nota ipſa eſſet univerſalis, deberet dari algebraica v, cujus logarithmus eſſet $xx : 2aa +$ log. x ([c]); ſeu logarithmus rationis inter quantitates algebraicas v & x ([d]) deberet eſſe quantitas algebraica $xx : 2aa$ indefinite, in quibuſcunque v vel x; quod fieri nequit. Invenire autem, utrum quadratura fieri poſſit per logarithmicam, vel etiam per dimenſiones conicas, alterius eſt Analyſeos, quam a methodo tangentium inverſa diſtinguo. Et quod ad hanc attinet, agnoſco me propoſuiſſe, inter alias, viam per æquationem generalem $a + bx + cy$ &c. ad curvam indefinitam; cujus uſum non contemnendum puto, praxi ipſa & ſpeciminibus edoctus. Sed contractionibus quibuſdam, aliaque induſtria opus eſt.

 Ad

* Pag. 591.

([b]) Integrando ſcil. æquationem $dy\, [= tdx : a] = xdx : a + adx : x$.

([c]) Quoniam log. $v = y : a$.

([d]) Nempe log. $v -$ log. $x = xx : 2aa$.

N. LXIV. Ad ſeriem quam Profeſſor Clariſſimus exhibet pagina 274 * pro exprimenda quantitate $y = \int (xxdx : \sqrt{(1 - x^4)})$ perveniri etiam poteſt ſimplici expreſſione potentiæ binomii. Nam $(1 + b)^e = 1 + \frac{e}{1} b + \frac{e.(e-1)}{1.2} bb + \frac{e.(e-1)(e-2)}{1.2.3} b^3$ &c. quod ſi ſit $= 1 : \sqrt{(1 - x^4)}$ erit $e = -1 : 2$ & $b = -x^4$, unde explicando ſeriem $1 + \frac{e}{1} b$ &c. & proveniens multiplicando per $xxdx$, habebitur valor ipſius dy : unde fiet $y = \frac{1}{3.1} x^3 + \frac{1}{7.2.1} x^7 + \frac{1.3}{11.4.1.2} x^{11} + \frac{1.3.5}{15.8.1.2.3} x^{15}$ &c. Ego ſane, compendii cauſa, utor hoc artificio poſt NEWTONUM etiam ad ſeries meas, cum unica irrationalis calculum ingreditur; quia ſic ſublatio ejus evitatur. Quanquam & poſt exaltationes [prolixius licet] ad idem perveniri poſſit, methodo a me præſcripta.

Venio jam ad Problematis mei ſolutionem, ſeu *lineæ* [quam voco] *Iſochronæ paracentricæ* a me propoſitæ conſtructionem, occaſione curvæ elaſticæ a Viro Clariſſimo feliciter inventam, & ipſa ejus evolutione exhibitam; qua me invitare videtur, ut meam quoque ſolutionem prodam. Feciſſem multo ante, ſi ſatis vacare liceret his laboribus. Jam enim ante complures annos habui, & quidem paulo poſt Iſochronam ſimplicem inventam (e), quando & publice propoſui quærendam hanc paracentricam paulo difficiliorem. Sed plerumque viam reperiſſe contentus, proſecutione abſtinere cogor. Adeo ut ad ipſius Catenariæ conſtructionem vix demum, diu poſt repertam ejus analyſin, me accinxerim; cum ſcilicet amici urgerent. Apparebit autem, meum proceſſum non tam ab eo, quod feliciter extrinſecus oblatum eſt, quam ex ipſius rei natura ſtatim per ſe proveniſſe. Et quanquam adeo non improbem conſtructionem datam, ut laudem potius, quippe quæ ad rem difficilem Auctori aditum dedit; nec iis aſſentiar, qui peccatum dicunt, compoſito magis modo præſtari quod poteſt ſimpliciore, [neque enim peccatum eſt, quod perfectiſſimum non eſt,] cum tamen mihi ſeſe obtulerit conſtructio ſatis expedita per rectificationem curvæ ordinariæ, hanc velut toto genere ſimpliciorem illa, quam Vir Clariſſimus dedit, paucis deſignare volui. Nam ipſe curvam quandam conſtruit, quadratura ſeu dimenſione ejus figuræ, cujus ordinata eſt $axx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$. Et hujus quadratricis tranſcendentis [quam ob uſum Elaſticam vocat] rurſus dimenſionem adhibet, ut ſolvatur Problema quæſitum:

* Pag. 596.
(e) Cujus conſtructionem vide N°. XXXIX. pag. 421.

Digitized by Google

tum: atque ita curvam a me propoſitam efficit per ſolutionem tranſcendentalem ſecundi generis. Sed cum curva ſit ipſamet nonniſi generis primi, quia tantum ad ejus conſtructionem requiritur quadratura figuræ cujus ordinata eſt $\sqrt{(a^4 - x^4)} : a$ (f); ideo lineam quoque quæſivi algebraicam, cujus rectificatione quæſitum commode præſtaretur. Quomodo autem hæ duæ quadraturæ conicis dimenſionibus reſpondeant, aliis oſtendam. Adeſt enim peculiaris pro talibus Analyſis. Sane ſi quadranda eſſet figura ordinatarum $\sqrt{(a^4 + x^4)}$ [quæ ſigno tantum a dicta differt] per extenſionem curvæ hyperbolicæ res præſtaretur (g). Sed nunc ad propriam conſtructionem Problematis propoſiti progrediamur. N.LXIV.

Quæritur qualis ſit [*Fig.* 3.] linea *Iſochrona paracentrica* 1C 2C 3C, in qua moto gravi, quod deſcendit ex altitudine H, acceſſus & receſſus, reſpectu centri cujuſdam A, ſeu puncti fixi, ſit æquabilis; adeoque elementa diſtantiarum ab A ſint elementis temporum proportionalia. Diſtantiæ AC repræſentent tempora t; ex 1C agatur 1C1θ, normalis ad A2C, erunt 1θ2C, ut elementa temporum dt. Arcus curvæ appellentur c; elementa eorum, dc, tanquam elementa ſpatiorum, quæ grave percurrendo abſolvit. Sunt autem [ex generaliſſima motus lege] elementa ſpatiorum in ratione compoſita velocitatum & temporis elementorum. Velocitas vocetur v. Hinc [1] dc ut vdt. Diſtantia inter horizontes punctorum H & A, ſeu HA, vocetur a. Porro, ex lege motus gravium, velocitates ſunt in duplicata ratione altitudinum HB. Sit AB, x, & HB erit $a + x$ [nam varietates ſignorum pro talibus in ipſo litteræ valore comprehendo, nec in calculo moror, cum omnia eodem modo proveniant] fiet [2] vv ut $a + x$, & per 1 & 2 fit dc ut $dt \sqrt{(a + x)}$ ſeu ad implendam legem homogeneorum [3] $dc = dt \sqrt{(aa + ax)} : a$. Jam centro A, radio ſi placet AH, deſcribatur circulus HKM, axem AB ſecans in K, & AC in M. Et arcus KM [qui vocabitur m] repræſentet angulum converſionis rectæ ACM circa A; itaque, 1M 2M, ſeu dm, erit ipſius

(f) Pendet enim Iſochronæ Paracentricæ conſtructio[N°.LIX.Not.d, p.603.] ab integratione hujus quantitatis $aadx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$, cujus integralis eſt $\frac{3}{2aa} \int (dx \sqrt{(a^4 - x^4)}) - \frac{x}{2aa} \sqrt{(a^4 - x^4)}$. Pendet igitur conſtructio ab integratione hujus $dx \sqrt{(a^4 - x^4)}$.

(g) Quadratura figuræ, cujus ordinata $= \sqrt{(a^4 + x^4)} : a$, pendet manifeſto ex dimenſione parabolæ cubicæ, cujus ſcil. abſciſſa x, ordinata $x^3 : aa$. Id monitus LEIBNITIUS agnovit, dixitque „ ſibi viſum fuiſſe, „ cum iſta ſub manibus olim haberet, „ videre connexionem cum dimen„ ſione curvæ hyperbolicæ; ſed ta„ lia tunc reſumere non licere." Procul dubio memoria lapſus erat Vir Celeberrimus.

N. LXIV. ſius arcus circuli, ſive motus angularis, ſeu vertiginis, elementum. Itaque ſit $1C\,1\theta = tdm : a$. Eſt autem quadr. $1C\,2C$ æquale quadr. $2C\,1\theta$ + quadr. $1\theta\,1C$. Ergo [4] $dcdc = dtdt + ttdmdm : aa$ [5] = [per æqu. 3] $dtdt + xdtdt : a$. Ergo [6] $dt : t = dm : \sqrt{ax}$. Ex M ad axem agatur normalis ML, & AL vocetur z, fiet [7] $ax = zt$, nempe ob triangula ſimilia ALM, ABC. Et per 6 & 7 ſit [8] $dt : \sqrt{at} = dm : \sqrt{az}$. Jam ex proprietate tangentium circuli eſt [9] dm ad dz ut a ad $\sqrt{(aa - zz)}$ id eſt, ut AM ad ML, radius ad ſinum anguli KAM. Et ex 8 & 9 fiet [10] $dt : \sqrt{at} = adz : \sqrt{(a^3z - az^3)}$. Unde ſummando $2\sqrt{at} = aa\int(dz : \sqrt{(a^3z - az^3)}) + b$; ubi b eſt quantitas conſtans pro arbitrio aſſumpta. Id enim licet inter ſummandum, quoties non vetamur Problematis conditionibus. Quod cum non ſatis obſervari videam, monere hoc loco volui, quoniam intereſt ad ſolutionum generalitatem. Nam infinitæ ſatisfaciunt curvæ, iiſdem manentibus punctis H & A, ſed quæ variari poſſunt pro variata recta b, adeo ut curva quæſita [quantum judico] reperiri poſſit, quæ tranſeat, per punctum datum (h). Nunc ſupereſt abſolvenda quadratura $\int(dz : \sqrt{(a^3z - az^3)})$ id eſt, [ſi AN ſit media proportionalis inter AL & AK] invenienda eſt area figuræ, cujus ordinata ſit ad AH, ut quadratum ab AH ad rectangulum ſub AN & LM.

Hanc quadraturam ita efficiemus: In HK, ſumatur LW æqualis ipſi EK diagonali ab AH vel AE, & juncta MW, ſumatur $A\beta$ in AK, ſi opus producta, quæ ſit ad AN in duplicata ratione MW ad WL, ſeu EK. Et ipſis $A\beta$ ordinatim ad angulos rectos applicentur $\beta\gamma$, quæ ſint ad LM [reſpondentes] ut rectangulum NAL ad quadratum ab EK. Et per puncta γ deſcribatur linea $A\gamma$, cujus extenſione in rectum habebitur quadratura paulo ante dicta. Nempe triplum rectanguli ſub curva $A\gamma$ & recta AH, dempto quintuplo dimidii rectanguli ſub AN & LM [$= \frac{5}{2}\sqrt{(a^3z - az^3)}$] dabit Figuræ ſupra dictæ ab A incipiendo ſumptæ [cujus ordinatæ ſunt reciproce proportionales dictis rectangulis ſub AN & LM] aream; quam applicando ad a prodibit recta $aa.\int(dz : \sqrt{(a^3z - az^3)})$ (i).

Hæc

(h) Vid. Num. LXVI. Art. IV.

(i) Eſt enim $EK = LW = a\sqrt{2}$, $MW = \sqrt{(3aa - zz)}$, $AN = \sqrt{az}$; adeoque cum ſit $EK^2 : MW^2 = AN : A\beta$, erit $A\beta = \frac{3}{2}\sqrt{az} - \frac{zz}{2aa}\sqrt{az}$, & cum ſit $EK^2 : NA \times AL = LM : \beta\gamma$, erit $\beta\gamma = \frac{z}{2aa}\sqrt{(a^3z - az^3)}$. Igitur longitudo curvæ $A\gamma$, vulgari modo computata, invenietur $= \int((3a^2 - 5z^2)dz : \sqrt{(a^3z - az^3)})$, ex cujus triplo in a [AH] ducto, ſi ſubducatur $\frac{5}{2}\sqrt{(a^3z - az^3)}$, remanebit $\int(a^3dz : \sqrt{(a^3z - az^3)})$, id quod differentiatio manifeſtat. Sufficiat hæc Syntheſis. Analyſin enim quid neceſſe eſt quærere, poſt Methodum generalem *Bernoullianam*, quam citavimus N°. LX, Nota b, in fine pag. 610.

Hæc recta ſumatur cum recta conſtante b; [ſignis tamen, prout caſus poſtulant, variatis], provenientis dimidium vocetur p. Ergo per æqu. 10 fit $\sqrt{at} = p$ ſeu [11] $t = pp : a$. Et cum p habeatur ex z & a, habebitur ex illis & t, ſeu AC. Ergo & x, ſeu AB, per æqu. 7. Cum ergo ex aſſumpta AL, ſeu z, quacunque habeatur AB magnitudine, adeoque & poſitione, at AC magnitudine; habebitur AC etiam poſitione, ſeu dabitur punctum C. Nam centro A, radio AC magnitudine dato, deſcribatur circulus, cui ex B normaliter ad AB educta occurret in puncto C, quod eſt in curva Iſochrona paracentrica quæſita. Delineationes variabunt pro caſibus, quam in rem & b aſſumpta variari debet. Nam quod arbitratur *Vir Clariſſimus* ([1]), non niſi unam lineam quæſitam dari ad idem punctum A, & ad eandem altitudinem H; id rogo, ut denuo expendat: mihi enim viſum eſt infinitas haberi poſſe, ita ut aſſignari regulariter queat, quæ per datum punctum tranſeat; exceptis punctis horizontalis rectæ tranſeuntis per A. Quin & ſupra A talis linea intelligi poteſt. Tantum vero ipſius acumini & profundæ harum rerum notitiæ tribuo, ut quod, re rite expenſa meiſque rationibus conſideratis, ſecunda meditatione ſtatuet, plurimum apud me ponderis ſit habiturum. N.LXIV.

Interim quemadmodum rationem univerſalem hic aperui per quam ſolutiones Problematum differentialium redduntur generales; quæ neglecta, ni fallor, obſtitit quo minus Vir Clariſſimus hic omnes lineas quæſito ſatisfacientes complecteretur: ita dabo modum mechanicum quidem, ſed tamen ob univerſalitatem & praxeos commoditatem non contemnendum, cujus ope *quæcunque lineæ quæſitæ tranſcendentes differentialiter datæ per punctum datum* [*quando id fieri poteſt*] *duci poſſunt*, idque tam exacte, quam quis volet, licet non, ut geometricus ſupra declaratus exemplo lineæ ſinuum per puncta vera, ſed tantum per veris proxima incedat. Habetque hunc uſum, ut de linearum poſſibilitate, forma, & natura, multa etiam ante veram ſolutionem cognoſcere poſſimus. Quin & ad differentio-differentiales cujuſcunque gradus applicari poteſt. Nempe, in exemplo præſente, datum ſit punctum 1C, per quod ducenda linea Iſochrona paracentrica CC, in qua grave lapſum ex altitudine H æquabiliter recedat a centro A; quæritur punctum aliquod aliud proximum 2C, ita ut recta 1C 2C ſit latus polygoni, curvæ ſuccedanei? Præter rectam A1*M*, in quam [ſi opus productam] incidit 1C, ducatur alia, quantum ſatis vicina A2M, ad eas partes ad quas ducere volumus lineam CC, & ad A2M agatur ex 1C perpendicularis 1C 1θ. Et in A1θ [ſi opus producta] ſumatur ad eas partes, ad quas ducitur linea 1C 2C, recta ipſi AH æqualis 1θ 1 P; unde perpendiculariter educatur 1P 1Q ad eaſdem quas dixi partes.

([1]) N°.LIX. Cor.2. p.605. Vide ibi Notam (e) & Num.LXVI. Art.IV.

Digitized by Google

N. LXIV. partes. Biſecta AB in ω, centro ω, radio ωH, deſcriptus circuli arcus ſecet AE, ſi opus productam, in R; ſeu brevius quæratur AR media proportionalis inter AH & HB. Denique centro 1C, radio æquali ipſi AR, deſcriptus arcus circuli ſecet 1P 1Q in 1Q, & juncta 1C 1Q, ſecabit ipſam A 2 M, ſi opus productam, in puncto quæſito 2 C. Eodemque modo ex puncto 2C quæretur 3C, & ita porro. Et ſic habebitur polygonum 1C 2C 3C &c. lineæ quæſitæ ſuccedaneum, ſeu linea Mechanica Geometricæ vicaria (m); ſimulque manifeſte cognoſcimus, poſſibilem eſſe geometricam per datum punctum 1C tranſeuntem, cum ſit limes, in quem polygona continue advergentia evaneſcunt. Ita ſimul & ſeriem quantitatum ordinariarum habemus tranſcendenti quæſitæ advergentem.

Quæ ad tangentium converſam de cætero meditati ſumus, alio loco, Deo volente, proferemus: multa enim diverſiſſima itinera non ſine ſucceſſu exploravimus, tametſi proſequi ſatis non vacet. Pro radicibus æquationum omnino dari puto methodum generalem, neque imaginarias moramur. Itaque quod inde colligit Vir Doctiſſimus *, hactenus probo, ne miremur, ſi in Tranſcendentibus intra pauciſſimos annos non omne præſtitum eſt quod vellemus; quando in ipſa Analyſi ordinaria, ſeu algebraica, circa radices æquationum, ſeu valores incognitarum analyticos, nemo gradum quarto altiorem abſolvit, nec VIETA, vel CARTESIUS in eo negotio quicquam majorum inventis adjecerunt.

Poſtremo ne diſceptatiunculæ priſtinæ inter nos, circa numerum radicum oſculationis, monitorumque *Viri Clariſſimi* plane obliviſcar †. Equidem quod initio ſcripſeram, cum materiam hanc Geometris proponerem, adhuc mihi verum videtur; quando ſcilicet circulus lineam oſculatur, duos contactus, ſeu quatuor interſectiones in unum abire; adeoque adeſſe quatuor radices æquales. Interim verum quoque eſt, ſi quis modo circulum reperiat lineæ in tribus punctis coeuntibus occurrentem, habere oſculantem. Nam quartum punctum eo ipſo adeſt, etſi ejus non fiat mentio. Cujus rei ratio eſt, quod nunquam circulus lineam ad eaſdem partes cavam ſecat in tribus punctis, quin ſimul ſecet in quarto. Si vero circulus lineam ſecet in tribus tantum punctis; opoitet in arcum lineæ, in

(m) Eſt enim, [ob parallelas Cθ, PQ] CQ : θP = CC : 1θ2C vel 2θ3C. Atqui, ex conſtructione CQ = AR = mediæ proportionali inter AH & HB = $\sqrt{(aa+ax)}$, & θP = AH = a, ac quæ quaſi infinite parva ſumitur, CC = dc, nec non 1θ2C aut 2θ3C = dt. Igitur analogia ſupra poſita analytice exprimitur ſic, $\sqrt{(aa+ax)} : a = dc : dt$, unde $dc = dt\sqrt{(aa+ax)} : a$, quæ eſt æquatio 3, pag. 633.

* N°. LIX. pag. 607. Item N°. LXII. pag. 622.

† N°. LVI. Art. 2. pag. 559.

in punctis interceptum, cadere punctum flexus contrarii. Et tamen nihilominus in ipſomet puncto flexus poſſumus pro oſculante concipere quatuor interſectionum coincidentiam, ſeu duos ab eodem latere curvæ contactus circulares, unum ante, alterum poſt punctum flexus, ſeu unum in concava, alterum in convexa parte arcus ex duabus partibus hujuſmodi compoſiti; qui contactus continue convergentes tandem in ipſo flexu coibunt. Et revera flexus contrarius eſt punctum extremum commune, in quo duæ lineæ, una concava, altera convexa, [unam totam conſtituentes] ſe tangunt. Coincidunt ergo duo contactus ſeu quatuor interſectiones in omni oſculo. Sed ſi de interſectionibus rectæ cum linea quæratur, tria tantum puncta interſectionum coincidentia, vel contactum cum interſectione coeuntem, nempe in ipſo puncto flexus, non vero duos contactus, concipere licet (*). N. LXIV.

(*) Vide Num. LXVI. Art. 3. ſub finem.

N°. LXV.

EXCERPTA

Ex Epiſtola C. H. Z.

ad G. G. L. *

PRincipium, quo uſus eſt *Clariſſimus Matheſeos Profeſſor* BERNOULLIUS, verum puto, & bene adhibitum, quod radii qui curvedinem metiuntur, ſint in ratione contraria virium rem elaſticam flectentium. Puto tamen non tantum ſuperficiem externam extendi, ſed & internam contrahi (a). Magnum admodum poſtulatum eſt, figurarum *Act. Erud. Lipſ. 1694. Sept. p. 339*

* *Chriſtiani* HUGENII *de Zuylichem* ad *Goth. Gul.* LEIBNITIUM.

(a) Vide Num. ſeq. Art. 1. potiſſimum autem Num. CII.

No. LXV. rarum curvilinearum quadraturas tanquam datas aſſumere. Ego me nihil admodum egiſſe putarem, ſi Problema aliquod huc tantum reduxiſſem, excepta tamen Circuli & Hyperbolæ quadratura. Præſtat linearum curvarum rectificationes tanquam ſemper in poteſtate exiſtentes aſſumere, quod etiam Tibi probari video.

De reliquo *Clariſſimus* Bernoullius videtur mihi tantum [*Fig.* 1] determinaſſe figuram, ubi tangentes extremitatum ſunt parallelæ, cum arcus Elaſtici A termini per chordam EF junguntur. Sed ſi arcus ſit ut in B, vel C, vel D, aut extremitates non chorda, ſed recta rigida HI jungantur, figuræ determinandæ ſuperſunt ([b]). Subtile etiam fatebor inventum conſenſus inter figuram elaſticam & lintei vel veli a liquoris pondere preſſi, ſi modo demonſtratum videam ([c]). Alioqui cogor ſuſtinere aſſenſum, quia & ipſum Auctorem circa figuram veli ſententiam mutaſſe video, & demonſtrare poſſum, velum ex numero finito rectarum æqualium compoſitum [ut *in Fig.* 2] aliam a vento quam a pondere figuram accepturum, cum tamen *Bernoulliana* ſententia ſit eandem eſſe velariam cum catenaria: oporteret ergo diſcrimen evaneſcere in caſu infiniti.

Præſtat haud dubie Iſochronam tuam Paracentricam conſtrui, ut a Te fieri ſcribis, rectificatione lineæ ordinariæ, vel ſaltem talis cujus puncta poſſint conſtrui, quam per lineæ Elaſticæ extenſionem, quæ ipſamet nondum eſt conſtructa.

Quod ait *Clariſſimus* Bernoullius ([d]) unicam tantum eſſe paracentricam ut $A\chi\omega\eta$, [*Fig.* 3.] reſpectu ejuſdem puncti, vel centri A, poſt deſcenſum ex TA, ejus contrarium manifeſte video, Tibique aſſentior dari infinitas, ut $A\beta\zeta$, $A\delta\gamma$, &c. easque ſumo uſque ad rectam Aε incluſive ([e]). Quin imo ſuperſunt adhuc aliæ Curvæ determinandæ, ſi ſcilicet æqualiter accedendum ſit ad punctum C, linea autem incipiat vel ab A, directe ſupra C, vel ad latus a D. Quo caſu lineæ ut ABC, AEC infinitos facient gyros circa C [*Fig.* 4].

G. G. L. *ADDITIO.*

Puto *in Figura prima* ex *Bernoulliana* determinatione arcus A etiam duci poſſe determinationem arcuum B, C, D, G, aſſumendo lineæ partem, aut eam producendo; ſed hoc tamen diſtincte admoneri operæ pretium fuit. Rationi conſentaneum eſt principium determinandæ figuræ Elaſticæ,

([b]) Vide Num. ſeq. Art. II.
([c]) Vide Num. LVIII. Art. III. Cor. 18. pag. 597. Not. *t*.
([d]) No. LIX. Cor. 2. pag. 605.
([e]) Vide Num. ſeq. Art. 4.

Elaſticæ, quod vires flectentes ſint curvedinibus proportionales; poteſt- No. LXV.
que ad Hypotheſeos aptæ modum aſſumi, tametſi non prorſus ſit exploratum, quo uſque natura eo utatur, cum fingi poſſint conſtitutiones corporum, ubi res aliter procedat. Præclara ſunt monita de diverſis Iſochronarum paracentricarum ſpeciebus & conſtitutionibus; omnes tamen mea conſtructione comprehenduntur. Et licet ipſam lineam rectam A, viſus ſum excludere, quia in ea nullus revera ſit deſcenſus vel aſcenſus, quia tamen in ea poteſt concipi deſcenſus vel aſcenſus ut infinite parvus, ſeu evaneſcens, haberi poteſt pro limite, ſeu ultima harum linearum. Problemata curvarum tranſcendentium ad quadraturas reducere, magna quidem ad ſolutionem præparatio eſt; fateor tamen [ſepoſita mea generali conſtructione tractoria] præſtare rem reduci ad linearum jam conſtructarum reductiones; quod & ego, quoties opus, feci, faciamque.

N°. LXVI.

JACOBI BERNOULLI EXPLICATIONES,

ANNOTATIONES ET ADDITIONES

Ad ea quæ in Actis ſuperiorum annorum de Curva Elaſtica, Iſochrona Paracentrica, & Velaria, hinc inde memorata, & partim controverſa leguntur; ubi de Linea mediarum directionum, aliiſque novis.

I. Cum ea quæ ſuperioribus annis variis ſpeciminibus meditata *Act. Erud.*
exhibui, Præluſtribus Geometrarum Duumviris Dno. *Lipſ. 1695. Dec. p. 537*
HUGENIO & Dno. LEIBNITIO digna viſa fuerint,

N.LXVI. rint, quæ peculiari ſubmitterent examini; ubi nonnulla approbarunt, quædam occultius dicta conjecturis ſupplerunt, alibi ſcrupulos invenerunt, alibi etiam diſſenſum apertum teſtati ſunt; ſtatui ſecundas meditationes primis ſuperaddere, & quid de ſingulis mihi videatur, ordine & candide exponere, ut & Celeberrimorum Virorum deſideriis ſatisfieret, & puriores veritatis ſcintillæ ex abditis illis naturæ receſſibus in dies magis ac magis emicarent. Præmiſeram in *Actis* Menſis Junii 1694 * Solutioni curvæ Elaſticæ Theoremata quædam de radiis circulorum oſculantium, quæ tum nobis ſolis & paucis aliis, quibuſcum Frater noſtra communicaverat, perſpecta credebam. Reſpondit Celeberrimus LEIBNITIUS ſequente Auguſto **, ſe jam antea ſimilibus, vel expreſſe, vel tacite uſum fuiſſe: & vero nemo eſt, qui neſciat, illum etiam multo majora dediſſe, & dare potuiſſe. At quantum ad hæc Theoremata, fateor me dubitandi rationes habuiſſe. Sciebam enim, Virum acutiſſimum a Flexionum contemplatione non plane abſtinuiſſe, cujus & ipſe in privatis ad me litteris olim mentionem fecit, & ad quam ſolutionis meæ ſignificatione jam Menſe Junio 1691 † facta invitari potuit. Videbam etiam non modo ipſummet principii a me adhibiti Auctorem fuiſſe, ſed & inſuper calculum huic ſuperſtructum, [ſola parte excepta, quæ Theorema dictum concernit] tam ſimplicem eſſe, tamque facilem, prout ex analyſi quam ſubjungo palam fiet, ut ſumme in ipſum fuiſſem injurius, ſi credidiſſem cognoviſſe Theorema, nec ſolutionem dediſſe. In lamina curvata AQRSYV, [*Fig.* 1] cujus elementum conſtans ſit SQ, vectem concipio fulcro Q innixum, in quo laminæ craſſities QY brevioris, ipſaque laminæ curvatæ portio QA longioris brachii vicem gerat; unde quia brachium brevius QY, & pondus longiori appenſum Z conſtanter manent eadem, perſpicuum fit, vires tendentes fibram SY [hoc eſt in vulgari hypotheſi ipſam tenſionem Yy] proportionari rectæ QP diſtantiæ fulcri a linea directionis ponderis AP. Et

* Supra N°. LVIII. pag. 578.
** N°. LXIV. pag. 628.
† N°. XLII. pag. 451.

Et quoniam, ob ſimilitudinem Triang. YyQ & RQn, ubi etiam RQ longitudo elementi laminæ conſtans fingitur, dicta Yy reciproce proportionatur ipſi Qn, quam patet eſſe radium oſculi, ſequitur ipſam Qn, ſive z, quoque reciproce proportionari ipſi QP, ſeu x; adeoque conſtans quoddam ſpatium $\frac{1}{2} aa = xz$; hoc eſt, per Theorema noſtrum, $\frac{1}{2} aa = x\,dx\,ds : ddy$, ſeu $aaddy = 2x\,dx\,ds$, & facta ſummatione $aady = xx\,ds$, quadrandoque $a^4 dy^2 = x^4 ds^2$, ſubtrahendo $(a^4 - x^4)\,dy^2 = x^4 ds^2 - x^4 dy^2, = x^4 dx^2$, ac denique extrahendo radicem $dy \sqrt{(a^4 - x^4)} = xx\,dx$ ſeu $dy = xx\,dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$; quæ ultima eſt æquatio, e qua conſtructio mea, & cætera, quæ dedi, fere omnia fluunt; inque cujus inveſtigatione nihil, ut apparet, Geometras morari potuit, niſi forte tranſitus ab xz ad $x\,dx\,ds : ddy$, quem proin illos latuiſſe non abſque veri ſpecie concludebam. Sed utcunque ſit de novitate hujus Theorematis, de altero certe, quo dixi, radiis oſculorum reciprocas rectas axi applicatas ſpatium quadrabile efficere *, nemo litem movebit: eſtque hoc tanto præſtantius illo *Barrowiano* de ſubtangentibus eidem applicatis, quanto oſculorum, quam tangentium conſideratio rarior hucuſque extitit. Huic addo nunc, quod explicabo alias †, eaſdem reciprocas ipſi curvæ in rectam extenſæ applicatas perpetuo ſpatium circulabile efficere; quod non minus memorabile Theorema eſt, & ſæpe magnum uſum habere poteſt in ſecundis differentiis æquationum ad primas reducendis. At hæc ὡς ἐν παρόδῳ. Radios, qui curvedines metiuntur, eſſe in ratione contraria virium tendentium [verius tenſionum], quod ambo Viri Celeberrimi me pro principio aſſumpſiſſe opinantur, ex æquatione primo inventa $\frac{1}{2} aa = xz$ cognoſcitur, & eſt concluſio potius quam principium, prout diſerte inter Corollaria retuli, vide Corollarium 6 conſtructionis primæ, & Corollarium quartum conſtructionis tertiæ **. Principium autem quo uſus ſum, quodque ſumit punctum quodlibet ſuperficiei concavæ curvati elateris N.LXVI.

* Supra pag. 583. 584.
† Vide Num. CIII. Art. X.
** Supra pag. 583, & 593.

N.LXVI. teris pro hypomochlio vectis alicujus, ipſum illud eſt, quod jam olim adhibuit Acutiſſimus LEIBNITIUS in Schediaſmate *De Reſiſtentia ſolidorum* Menſe Julio 1684; adeo ut ſi dubium fuiſſet viſum Dno. HUGENIO, putanti non tantum ſuperficiem externam extendi, ſed & internam contrahi, id objectum oportuiſſet Dno. LEIBNITIO, non mihi, qui decennio poſt ab Auctore principii illud mutuatus fui. Fateor autem, quod cum primum olim aſpexiſſem hoc Schediaſma, idem mihi ſcrupulus ſubortus fuerit; propterea quia quicquid extenſionis, etiam compreſſionis capax eſſe debet. Et hæc ratio quoque eſt, cur aliam Problematis conſtructionem quæſierim, prius quam moneret Vir Illuſtris, quæ ita habet. [*Fig.* 2.] Sit Linea Tenſionum AB, & Linea compreſſionum AC, quam quidem veroſimile eſt eſſe tantum continuationem prioris AB, cum vires comprimentes nihil videantur eſſe aliud, quam vires negative tendentes, hoc eſt, tendentes in partem contrariam; uti compreſſio nihil aliud eſt, quam negativa tenſio; adeo ut hinc conſtet, Lineam Tenſionum ultra verticem A flecti debere in partem oppoſitam, atque ex parte C habere aſymptoton parallelam axi AE, cum utique nihil ultra totam ſui longitudinem comprimi poſſit; unde ſimul omnia Paraboloidea, ac Hyperboloidea, ipſamque Lineam rectam, hinc excludi manifeſtum fit. Utcunque vero ſe res habeat, ſive curvæ AB, AC ejuſdem, ſive diverſarum curvarum partes exiſtant; intelligantur ductæ in angulis DAH & QAE duæ oppoſitæ Hyperbolæ Cubicæ BG, βC, interſecantes curvas AB & AC in B & C, ſic ut AD in DB^2 & AE in EC^2 æquentur eidem conſtanti ſolido; hinc alteri ipſarum applicetur $FG = DB + EC$, ad habendum punctum G: tum fiant aliæ duæ Hyperbolæ, quarum abſciſſæ in applicatarum quadrata ductæ æquentur majori minorive ſolido, & inveniatur novum punctum G. Omnia denique ſic inventa puncta G connectantur Curva AG, quæ eſt illa, ad quam Elaſtica eo modo conſtruenda eſt, quem Menſe Junio 1694, pagina 265 *, præſcripſimus; prorſus ac ſi ipſa AG,

* Supra pag. 580. 581.

Digitized by Google

AG, non AB, tenſionum curva foret; faciendo nimirum quadratum AK $=$ ſpatio AIR, & rectangulum AN $=$ indefinitæ ejus portioni AFG, ac tum deſcribendo circuli quadrantem LPM ſecantem rectam NO in P, &c. (a) Puncta enim ſic inventa S vera N. LXVI.

(*) Concipiatur laminæ craſſities VX [$=c$] diviſa in S, in partes duas, extenſam unam [SV $=f$], compreſſam alteram [SX $=g$]; Sic ut S ſpectari debeat tanquam hypomochlium, circa quod in æquilibrio conſtitutæ ſunt tres potentiæ, nempe pondus in A appenſum [quod dicatur $2cc$], reſiſtentia fibrarum tenſarum, & reſiſtentia compreſſarum, quarum loco fingantur una extenſa rV in ſuperficie convexa, & una compreſſa qX in concava ſuperficie laminæ elaſticæ. Quoniam vero pars extenſa eſt ad compreſſam ut SV [f] ad SX [g], fingi debet fibræ rV craſſities ad craſſitiem fibræ qX in eadem ratione, ita ut f & g repræſentent etiam craſſitudines fibrarum rV, qX. Tenſioni Vv fibræ rV, & compreſſioni Xx fibræ qX proportionales ſint BD in linea tenſionum & EC in linea compreſſionum; hoc eſt, quia vis AD [z] fibram, cujus longitudo eſt b, extendere valet quantitate BD $= t$, eadem vis fibram rV, vel sS [ds] extendet quantitate Vv $= tds : b$, & vis AE [u], quæ potis eſt fibram b comprimere quantitate EC $= \tau$, comprimet fibram qX vel sS [ds] quantitate Xx $= \tau ds : b$. His poſitis, cum niſus, quibus rV reſiſtit tenſioni & qX tenſioni, ſimul agant contra niſum ponderis appenſi in A; erit momentum tam fibræ rV, quam fibræ qX [quæ momenta facile oſtenduntur æqualia] dimidium momenti ponderis in A. Eſt autem hujus momentum compoſitum ex pondere [$2cc$] & vecte Sp [x]. Momentum autem fibræ rV componitur ex ejus craſſitie [f], vecte SV [f], & vi tendente AD [z]. Ac pariter momentum fibræ qX componitur ex ejus craſſitie [g], vecte SX [g], & vi comprimente AE [u]. Igitur $ccx = ffz = ggu$. Eſt etiam Vv [$tds : b$] ad Xx [$\tau ds : b$], vel t ad τ, ut SV [f] ad SX [g]: atque ideo BD [t], EC [τ], & BD $+$ EC ſeu FG [$t + \tau = \theta$] ſunt inter ſe ut f, g, & c. Subſtituendo igitur t, τ, & θ pro f, g, c, erit $\theta\theta x = ttz = \tau\tau u$. Quare ratio virium, tendentis AD, & comprimentis AE, determinatur per hyperbolam cubicam BG, βC, cujus natura eſt ut ſit $ttz = \tau\tau u$, vel $AD \times DB^2 = AE \times EC^2$. Et AF [$x$], cum ſit $= ttz\ \theta\theta$, determinatur applicando ad hyperbolam BG rectam FG $= \theta =$ BD $+$ EC. Præterea ſimilia Triang. VSv, snS dant Vv [$tds : b$] : VS [f vel $ct : \theta$] $=$ sS [ds] : Sn [$dxds : ddy$]. Unde fit $\theta dxds = cbddy$, quæ eadem eſt æquatio quam N°. LVIII, Nota (c), p. 581;

N. LXVI. vera erunt fulcra vectium, junctaque lineam conſtituent AST, quæ inter partes convexas & concavas curvati elateris media eſt; ipſius vero internæ ac externæ ſuperficiei puncta habentur, ſi per S ducantur curvæ perpendiculares SV & SX, quæ ſe habeant in ratione rectarum BD & CE, ac ſimul ſumptæ æquent craſſitiem laminæ. Pondus in A appendendum duplum eſſe debet ejus quod requiritur in Q, ad vectem in QTY ſuffultum hypomochlio in T & affixum portioni laminæ YZ eo uſque deprimendum, donec Yπ ad IR fiat ſicut YZ ad ſpatium AIR ſeu AK. Exceſſus longitudinis convexæ ſuperficiei αV ſupra concavam αX ad craſſitiem laminæ rurſum hic eſt, ſicut arcus LP ad AL. Quinimo generalis hæc eſt natura *condeſcriptarum*, ut ipſarum vel aggregatum vel differentia ad arcum circuli reduci poſſit; quod etiam Fratri obſervatum video nupero Auguſto, ubi hæc fuſius exponit. Ex dictis autem conſtare poteſt, quod ſi Curvæ tenſionum AB & compreſſionum AC eſſent ſimiles & eædem curvæ, ac circa eundem axem DAE ſimiliter diſpoſitæ, ſic ut poſitis AD, AE æqualibus, ipſæ DB & EC etiam æquales eſſent, puta ſi BAC foret vel linea recta, vel ex genere Paraboloidum &c. conſtructio prorſus conveniret cum illa, quam jam Menſe Junio 1694 dedi, excepta ſola quantitate appendendi ponderis, & quod linea fulcrorum AS, quæ ibi in parte concava curvati Elateris concipitur, hic inter illam & convexam præciſe media eſt, & utrique condeſcribitur, exiſtente ubique SV = SX.

II. Quid ſtatuendum porro ſit de figuris Elaterum a Dno. HUGE-

habuimus, niſi quod illic *t*, hic *θ* ſcribatur. Unde ſumpta, non AB, ſed AG pro curva tenſionum, eadem fluit conſtructio quæ data eſt N°. LVIII, pag. 580, & ea omnia ſequuntur quæ præſenti conſtructioni ſubjungit Noſter.

Multa ſunt quæ me movent ut ſuſpicer non valde abſimilem ab iſta fuiſſe Auctoris analyſin. Nollem tamen id affirmare, ne ipſi affingere videar ſolutionem non uno defectu laborantem, qualis eſt ſubſtitutio illa fibræ rV quo omnibus fibris tenſis, & fibræ qX pro omnibus compreſſis. Id cum animadvertiſſet, Problema iterum conſiderandum ſuſcepit, N°. CII, quem vide.

Digitized by Google

HUGENIO, pag. 340, *Fig.* 2. propoſitis *, jam diſerte explicueram Scholio 5 † conſtructionis meæ generalis. Sed quia Viros acutiſſimos de iſtis etiamnum per conjecturas tantum loqui video, operæ pretium erit totam rem tradere apertius. Si Elater quiſpiam ABC [*Fig.* 3. *& ſeqq.*] firmatus in puncto medio, aut nixus aliquo repagulo B, trahatur in extremitatibus A & C a duabus potentiis æqualibus juxta directiones AD, CD, tangentibus extremitatum perpendiculares, curvaturam acquiret conflatam ex partibus ipſius lineæ, quam huc uſque contemplati ſumus, efficiendo arcum quem appello, vel *diminutum* ut *Fig.* 3; vel *auctum*, ut *Fig.* 4, 5, 6. At ſi trahatur Elater juxta directiones AC, CA, ſibi mutuo oppoſitas & ad tangentes extremitatum obliquas [quod fit, ubi hæ extremitates aut chorda junguntur, ut in Figuris 3, 4, 5, aut virga rigida, ut in Fig. 6; aut etiam firmis parietibus, ut in Fig. 7, utcunque ſuffulciuntur] mutabit Elater paululum figuram ſuam, ut dicto Scholio 5 expreſſe monui; quod vel hinc colligitur, quia iſto caſu nullo amplius in B retinaculo opus eſt ad coercendum Elaterem in ſtatu violentæ tenſionis. Interim tamen generalis eſt ſolutio pro omnibus, perveniturque ad eandem æquationem ſupra inventam $aa = 2xz$ ſeu $aaddy = 2xdxds$, niſi quod in ſummatione ſtatuendum ſit $\int aaddy = aady - abds$, pro 3, & 7 Fig. & $\int aaddy = abds \pm aady$ pro reliquis; deſignante a ad b rationem Sinus totius ad ſinum anguli CAD ſeu obliquitatis directionis virium comprimentium; quo pacto finalis æquatio [e qua conſtructiones cæteraque omnia facile deducuntur,] hæc reperitur: $\pm dy = (xx \pm ab)dx : \sqrt{(a^4 - (xx \pm ab)^2)}$. ([b]) Monendum etiam hoc eſt, quod linteum ejuſdem cum Elatere longitudinis inter punctum A & C ſuſpenſum & fluido impletum uſque in AC,

 ab

* N°. præc. pag. 638.

† N°. LVIII. pag. 582. 583.

([b]) Hæc enim æquatio oſtendit, poſito $x = 0$, eſſe dy ad dx, ut ab ad $\sqrt{(a^4 - aabb)}$ vel ut b ad $\sqrt{(aa - bb)}$. Eſt autem dy ad dx, poſito $x = 0$, hoc eſt in punctis A & C, ut ſinus ang. CAD ad coſinum ejus. Quare hic ſinus ad coſinum ut b ad $\sqrt{(aa - bb)}$, atque adeo ſinus ang. CAD ad ſinum totum ut b ad a.

N.LXVI. ab eoque tenſum, eandem & his in caſibus figuram induat. Quinimo ſi Elater ABC cohibeatur chorda FG [ut in Fig. 8,] quæ non ipſi elateri, ſed extremitatibus rigidorum brachiorum AF, CG, ſit annexa; ac deinde ejus loco concipiatur linteum ABC affixum firmis parietibus AF, CG, atque impletum liquore uſque in FG, certum eſt & tunc eandem utriuſque curvaturam fore, quippe quæ portio tantum eſſe debet reſecta ex priorum aliqua. Atque ita plene ſatisfactum puto utiliſſimo Problemati, ut ei poſthac nihil quicquam deſit, quam ut experientiis determinentur in quavis materia veræ tenſionum & compreſſionum leges. Nam conſtructionum inventio eſt generalioris conſiderationis, nec proprie ad ſolutionem Problematum particularium pertinet.

III. Cæterum num modus conſtruendi tranſcendentes lineas per meras quantitates algebraicas, aſſumpta una ſola quantitate tranſcendente, univerſalis ſit, atque etiam in illis curvis locum habeat, quæ nec a circuli quadratura, nec logarithmicæ deſcriptione dependent, nullibi diſcuſſi; tantum dixi, logarithmicam non ſemper adhiberi poſſe; quanquam nec prius ita clarum ſit, ut omni dubitatione careat: ſcrupulum enim movet hoc, quod nullæ non rectificabiles curvæ continuo biſecari poſſunt, ut arcus circulares & logarithmi. Novi equidem quod, data quavis curva algebraica, reperiri poſſint puncta alicujus tranſcendentis lineæ per meram Geometriam ordinariam; exempli gratia, per ſolas biſectiones inſcriptarum; ſed quæ ſit hujus tranſcendentis natura, ſive differentialis æquatio, adeoque data æquatione, qualis aſſumenda curva algebraica, cujus inſcriptas biſecando illa poſſit conſtrui, repertu arduum & difficile exiſtimo. Nota, quam dedi ſupra *, qua conſtet, num curva mechanica ope logarithmicæ conſtrui poſſit, vera eſt, ſed recte interpretanda; nam ſi quantitas $t\,dx$ pluribus conſtet membris, examinanda ſunt non tantum omnia conjunctim, ſed & ſingula ſeorſim, atque ſecundum omnes modos poſſibiles inter ſe combinata; quoniam hoc caſu proprie

* N°. LVIII. pag. 591. 592.

prie non una adeſt æquatio, ſed plures, velut in exemplo quod N. LXVI. objicitur * $a\,dy = (x + aa : x)\,dx$, quam æquationem [poſita $y = s + z$] poſſum reſolvere in has duas: $a\,ds = x\,dx$ & $a\,dz = aa\,dx : x$; quarum hæc cum notam præſcriptam habeat, illa abſolute integrari poſſit, cònſtat etiam ex ambabus compoſitam, ope logarithmicæ conſtruibilem eſſe (c). Ad ſeries, quas dedi pro ſummandis quantitatibus $xx\,dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ & $aa\,dx : \sqrt{(a^4 - x^4)}$ per interpolationes *Walliſianas* perveni; eaſdem tamen etiam obtineri poſſe per indefinitam potentiam binomii eleganter obſervavit Celeberrimus D. LEIBNITIUS (d). Iis quæ ſubjicit hic Vir de numero concurrentium interſectionum in oſculis, non habeo quæ reponam; cum non eo dicta putem, ut ſententiam meam, cujus veritatem paulatim agnoſcere videtur, impugnaret, ſed commoda potius explicatione cum ſua conciliaret. Ego profecto mentem mutare prius non poſſum, quam ad inſtantiam Parabolæ circulum oſculantem in alio præterea puncto interſecantis reſponſum legero, aut calculum pro quatuor interſectionum concurſu militantem in aliquo ſpeciali exemplo videro, ſimilem meo qui trinum tantum concurſum ſupponit (e).

IV. Jam porro ad conſtructionem accedendum Curvæ acceſſus & receſſus æquabilis, ſive Iſochronæ, ut Dno. LEIBNITIO appellatur, Paracentricæ, qua menſe Junio ſuperioris Anni Problema jam dudum ſopitum reſuſcitavi. Hic illud primo reprehenſum video, quod rectificationem curvæ alicujus adhibuerim, quæ &

Nnnn 3 ipſa

* Supra N°. LXIV. pag. 627.

(c) Scil. $s = xx : 2a$, & $z = $ log. x. Igitur $y\,[s + z] = xx : 2a +$ log. x.

(d) Vide Num. CI. Prop. 56. 57. 58.

(e) Satis liquet Noſtro, cum hæc ſcriberet, non ’um viſa fuiſſe quæ de hac quæſtione, jam menſe *Aug.* 1695 *Actorum*, candide faſſus erat LEIBNITIUS. „Nunc re accuratius conſiderata, ea quæ Celeb. *Jac.* BERNOULLIUS de numero radicum oſculi monuerat, probo, quibus quo minus aſſentirer antea, non alia cauſa fuit, quam quod diverſæ occupationes cogitationeſque effecerant, ut tardius accederem ad rem de integro ſatis conſiderandam.

N.LXVI. ipſa ad ſui conſtructionem ſpatii quadraturam requirit; cum Problema immediate per quadraturam vel etiam rectificationem curvæ ordinariæ confici potuiſſet. Quod recte quidem; at non diſſimulanda fuiſſet ratio hujus meæ opinionis, quam ibidem pag. 277, & poſtmodum pag. 336,* expreſſe addidi. Nempe exiſtimo curvas, quas natura ipſa ſimplici & expedito motu producere poteſt, quorumcunque ſint generum & graduum, in conſtructionibus præferendas eſſe aliis, etiam algebraicis, quas arte vel nullo modo vel difficulter delineamus; cum illud ſemper in practica effectione operis ſit cenſendum optimum, quod cum ſumma exactitudine ſummam quoque facilitatem conjunctam habet. Sed etiamſi quippiam hic peccatum eſſet, illud tamen ſequenti menſe Septembri † abunde reparatum a me puto, ubi non tantum conſtructionem hujus Problematis omnium facillimam per rectificationem curvæ algebraicæ, quam *Lemniſcatam* voco, exhibui, ſed & generaliter docui, quænam curvæ algebraicæ, in tentandis conſtructionibus mechanicarum, lineam circularem & parabolicam proxime excipiant; ad quod perquirendum memini Fratrem paulo ante per litteras a D. Leibnitio inſtigatum fuiſſe. Quod vero conſtructiones per quadraturas concernit, quas cæteroquin cum Dno. Hugenio non magni facere ſoleo, ut hinc inde ſum profeſſus, non rejiciendas puto; tum, cum id tantum intenditur, ut in æquatione conſtruenda literæ indeterminatæ cum ſuis differentialibus ſeparentur a ſe invicem, quod ſolum intendebant Illuſtris cum Fratre Hospitalius, cum primum præſens Problema mihi propoſuiſſent; nec enim reduci Problema ad quadraturas poteſt, niſi literæ jam ſeparatæ ſint, unoque præſtito, alterum quoque præſtitum habetur. Multo minus autem quadraturæ debuerunt negligi in materia Elaſticarum, cum in hypotheſi indeterminata Problema aliter confici non potuiſſet. Sed non demonſtratum video, ſemper alias conſtructiones haberi poſſe: Barrovii ſane tempore nullæ aliæ fuere notæ, niſi quæ fierent per quadraturas; nec illas prius faſtidire ceperunt Geo-

* Supra pag. 603, & 609. † N°. LX. pag. 608.

Digitized by Google

Geometræ, quam Celeberrimus D. Leibnitius elegantiſſimam N. LXVI.
Catenariæ conſtructionem per logarithmicam dediſſet.

Dixeram, unam tantum dari Iſochronam reſpectu ejuſdem centri ejuſdemque altitudinis, quod quanquam eo ſenſu quo dictum fuit excuſari forte poſſit, malo tamen melioribus monitis locum dare, fateorque magis congrue dici dari infinitas. Errorem autem ſola peperit feſtinatio; nec enim ignorabam, in ſummatione differentialium ſummas abſolutas augeri minuive poſſe conſtante quadam quantitate b; cum id alias obſervatum eſſe, ex generali ſolutione Elaſticarum ſupra allata & jam menſe Junio 1694, pag. 267, Scholio 5 †, prælibata conſtet: & meminiſſe poteſt Lector, inventam mihi fuiſſe ſolutionem, cum prolixum ſatis Schediaſma pene finiviſſem, atque jam ſcribendo laſſatus fuiſſem; ubi de ſumma rei certus ad ſingulas Problematis circumſtantias cautius attendere non ſuſtinui. Agnoſco itaque, cum Acutiſſimo D. Leibnitio, quod poſſit aſſignari Iſochrona, quæ per datum quodvis punctum tranſeat: ſed neſcio, cur excipiat puncta rectæ horizontalis per ipſum centrum tranſeuntis, cum ſimiliter nullum eorum ſit, per quod non aliqua ſatisfaciens duci poſſit. Sit enim ubivis in illa datum punctum C [*Fig.* 9] invenientur puncta Iſochronæ convenienter conſtructioni meæ Menſis Septembris hoc pacto. Sumpto indefinite puncto Q in curva lemniſcata AQB, ſubtendatur ei ex nodo recta AQ, tertiaque proportionalis ad rectas AB & AQ, quæ ſit $\zeta\iota$, applicetur ſemicirculo & jungatur $A\iota$, in qua ſi abſcindatur $A\alpha$ tertia proportionalis ad AB & lemniſcatæ portionem AQ, auctam minutamve conſtante quadam longitudine b, quæ media ſit proportionalis inter AB & AC, erit punctum α in quadam Iſochrona, quam apparet tranſituram per datum C punctum (f). Poteſt vero

† Pag. 582. 583.

(f) Nam, per conſtr. eſt $A\alpha = (ALQ \pm \sqrt{AC.AB})^2 : AB$, vel $\sqrt{A\alpha . AB} = ALQ \pm \sqrt{AC.AB}$ aut $\sqrt{A\alpha . AB} \mp \sqrt{AC.AB} = ALQ$. Sed $A\alpha$, N°. LIX, dicebatur t, AB, a, AC ſit c, $\zeta\iota = AQ^2 : AB = uu:a = z$, & eſt ALQ [N°. LX, Nota b, pag. 610] $= \int (aadu : \sqrt{(a^4 - u^4)}) = \int (\frac{1}{2}adz\sqrt{a} : \sqrt{(aaz - z^3)})$. Igi-

N. LXVI. vero fieri, ut quæ per diverſa horizontis puncta tranſeunt, non ſemper ſint totidem diverſæ lineæ, ſed portiones tantum unius ejuſdemque. Sciendum enim, terminos quos ipſi aſſignavi pag. 279, §. 3 *, non eſſe niſi ſecundum quid tales; unamque & eandem Iſochronam ab utraque horizontis parte in infinitum produci poſſe, omnes vero in centro A coire, ac inde ſub horizonte utrinque per infinitos plexus ſeu mæandros ſe diffundere, quales *Fig.* 10, etſi ob ſpatii anguſtiam non debita proportione delineati, conſpiciuntur; adeo ut grave per curvam latum perpetuas circa A librationes, ſed uſque & uſque ampliores, peragat & poſt ſingulas oſcillationes horizontalem repetat eamque radat. Cujus rei argumentum eſt, quod lemniſcatæ ſeu curvæ in ſe redeuntis portio AQ, quæ longitudinem rectæ A α in *Fig.* 9, determinare debet, intelligi poteſt non de ipſa tantum ſolitarie accepta, ſed & cum aſſumpta ſemel pluriesve integra perimetro lemniſcatæ; quo fit, ut in eadem recta Aα ſemper plura plurave puncta, qualia α, reperiri poſſint. Diſcimus etiam hinc, Iſochronam geometrice non conſtruibilem eſſe; cum Lemniſcata nequeat eſſe rectificabilis. Statuo enim etiamnum, [ne quid eorum intactum relinquamus, quæ antehac inter nos acta ſunt; Vide Menſem Januarium anni 1691, (e) pag. 21,] nullam curvam geometricam

Igitur eſt $\sqrt{at} \mp \sqrt{ac} = \frac{1}{2}\int(adz\sqrt{a} : \sqrt{(aaz - z^3)})$ aut, $\sqrt{t} \mp \sqrt{c} = \frac{1}{2}\int(adz : \sqrt{(aaz - z^3)})$, & differentiando $dt : \sqrt{t} = adz : \sqrt{(aaz - z^3)}$, quæ eſt æquatio ad Iſochronam Paracentricam N°. LIX., Nota c, pag. 602. Quod ſi fiat ζ [z] = 0, erit AQ [u] & ALQ = 0, Quare $\sqrt{A\alpha . AB} \mp \sqrt{AC . AB} = 0$, vel $A\alpha = AC$. Tranſit igitur Iſochrona per datum punctum C.

* Pag. 605. Vide ibi Notam (g).

(e) Vide Num. XLI. pag. 490. Objectio Celeb. LEIBNITII iſta fuit: „Hæreo circa id quod a Dno. BERNOULLIO dictum eſt, nullius curvæ „geometricæ in ſe redeuntis rectificationem generalem eſſe poſſibi„lem. Scio alium Virum Clariſſi„mum „ [is eſt NEWTONUS, *Princ. Math. Phil. Nat.* Lib. I. Sect. VI. Lemm. 28.] „ ſimili argumento „probare inſtituiſſe nullius areæ cur„væ geometricæ in ſe redeuntis qua„draturam indefinitam eſſe poſſibi„lem: viſum tamen eſt Dn. HUGE„NIO non minus quam mihi, rem „non eſſe confectam. Et ni fallor, „dantur inſtantiæ, quibus tamen huj-

cam in ſe redeuntem rectificationem admittere; quod quia meminì me potuiſſe demonſtrare, valde ſcire cupio quales ſint inſtantiæ, quas in contrarium adduci poſſe ſcripſit D. Leibnitius Menſe Septemb. 1691, pag. 437. Sed & hoc ex dictis conſequitur, quod Iſochronæ, quæ ſupra horizontalem aſſurgunt, non poſſunt circa centrum A in ſpiras convolvi, ut conjecit Acutiſſimus D. Hugenius; cum ſecus partes inferiores cum Iſochronis noſtræ constructionis communes habere, adeoque horizontalem per A extenſam ſimul & ſecare & tangere deberent, quod impoſſibile. Memini tamen me reperiſſe, quod ejuſmodi ſpiræ circa centrum A prodirent, ſi ipſum ſimul poneretur centrum gravium, & quod eo caſu curvæ constructio ope duarum Spiralium *Archimedeæ* & logarithmicæ facile peragi poſſet (h). N. LXVI.

V. Sed

„ hujuſmodi argumenta applicari poſ-
„ ſunt.

Vide autem quæ regeſſerit Leibnitius, N°. LXXI, & Auctoris noſtri reſponſionem N°. LXXII. Art. 2.

(h) Sit BMmC [*Fig. A*] Spiralis Iſochrona, ſic dicta quod grave illam deſcribens, velocitate initiali in B tali, qualem acquireret labendo ex altitudine AB [a], æquabiliter accedit ad centrum C gravium. Sitque BC $= b$, BP $= x$, Pp $=$ MN $= dx$, arcus BR $= u$, & Rr $= du$; atque erit Mm $=$ CM $\times$ Rr : CR $= (b - x)\, du : b$, & Mm $= \sqrt{(MN^2 + Mm^2)} = \sqrt{(dx^2 + (b-x) du^2 : b^2)}$ Hoc ſpatium percurſum ſi dividatur per velocitatem, quæ, juxta doctrinam Galilæi, ponitur proportionalis radici quadratæ altitudinis AP, [$a + x$] ex qua grave in M deſcendit, habebitur tempus quo percurritur Mm, quod, quia BMm ponitur Spiralis Iſochrona, ſtatui debet proportionalis acceſſui MN [dx] corporis ad centrum. Fiat igitur $\sqrt{(dx^2 + (b - x)\, du^2 : b^2)} : \sqrt{(a+x)} = dx : \sqrt{a}$, & erit $du = bdx\sqrt{x} : (b - x)\sqrt{a}$, vel [ponendo $x = zz : b$] $du = \sqrt{\frac{b}{a}} \times (2zzdz : (bb - zz)) = \sqrt{\frac{b}{a}} \times (-2dz + 2bbdz : (bb - zz))$; cujus integralis [omiſſa conſtantis additione, quæ nihil niſi ſitum curvæ mutaret] eſt $u = \sqrt{\frac{b}{a}} \times (-2z + \text{Log.} \frac{b+z}{b-z})$. Igitur arcus BR [$u$] eſt ad differentiam duorum arcuum; quorum alter eſt $= \text{Log.} \frac{b+z}{b-z}$, alter $= 2z$, ut $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{a}$. Id quod ſic poteſt conſtrui. Aſſumpta abſciſſa quacunque BP $= x$, deſcripta ſit, in circulo b f g, cujus radius cb $=$ CB $= b$

N. LXVI. V. Sed ut ad reliqua meletematum noſtrorum capita tranſeamus, atque aliquid etiam adjiciamus de *Curva Velaria*, quam eandem eſſe ſtatui cum catenaria, ſciendum, me nunquam mutaſſe ſententiam, ſed tantum diſtinxiſſe caſus. Dixeram, Menſe Maio

$= b$, Spiralis *Archimedea* bel, fiatque ut peripheria bgh [c], vel quæ ipſi æqualis eſt ſubtangens Spiralis in b, ad diametrum [$2b$], ita media proportionalis inter CB & BP [$\surd bx = z$] ad bd $= 2bz : c$, & centro c deſcriptus circulus de ſecet Spiralem in e, ac radius cef per e ductus abſcindet arcum bf $= 2z$. Eſt enim, ex demonſtratis ab ARCHIMEDE, bc [b] : bgh [c] = bd [$2bz : c$] : bf $= 2z$. Deſcripta pariter intelligatur Spiralis $\iota\beta\zeta\kappa$ logarithmica, ſemirectangula, hoc eſt quam radii ſub angulo 45° ſecent: ſitque radius $\kappa\beta =$ CB [b], & capiantur $\beta\gamma$ & $\beta\delta$ æquales ipſi $z = \surd bx$, mediæ proportionali inter CB & BP, ut ſit $\kappa\gamma = b + z$, & $\kappa\delta = b - z$. Tum centro κ deſcribantur circuli $\gamma\iota$, $\delta\zeta$ Spiralem ſecantes in ι & ζ, & radii $\kappa\upsilon\iota$, $\kappa\zeta\theta$, in peripheria $\theta\beta\psi$, centro κ, radio $\kappa\beta$ deſcripta intercipient arcum $\theta\beta\psi =$ Log. $(\kappa\iota : \kappa\zeta) =$ Log. $\frac{b+z}{b-z}$ [Vid. N°. XLIX. Nota I, pag. 498. Prop. III. Cor. 3.]. Sumatur itaque arcus bfg $= \theta\beta\psi =$ Log. $\frac{b+z}{b-z}$, & quoniam eſt bf $= 2z$, erit fg $=$ Log. $\frac{b+z}{b-z} - 2z$. Supereſt igitur tantum ut inveniatur arcus go, qui ſit ad fg, ut $\surd b$ ad $\surd a$. Id autem nullo negotio perficitur ſumendo lp quæ ſit ad li [differentiam radiorum ce, cl quibus arcus fg intercipitur] ut $\surd b$ ad $\surd a$. Arcus enim pq, centro c deſcriptus, ſi ſecet Spiralem *Archimedeam* in q, radius cqo, abſcindet arcum go, qui erit ad fg, ut ut lp ad li, ut $\surd b$ ad $\surd a$. Atque ideo, ſi capiatur, in peripheria BRr, arcus BR $=$ go, ducaturque radius CR, quem ſecet in M circulus PM, centro C, radio CP deſcriptus; erit punctum M ad Spiralem Iſochronam quæſitam.

Hanc autem infinitos gyros circa centrum C abſolvere, ex ejus æquatione $u = \surd \frac{a}{b}$ (Log. $\frac{b+z}{b-z}$ $- 2z$) liquet. Ubi enim BP [x] evadit æqualis BC [b], tunc z [$\surd bx$] fit etiam $= b$, atque ($b +$ z) : ($b - z$) evadit [$= 2b : 0$] infinita. Hujus itaque Logarithmus $\theta\beta\psi$, vel bfg infinitus. Eſt autem bf [$= 2z = 2b$] finitus. Igitur arcus fg infinitus; & BR [fg $\times$ $\surd \frac{b}{a}$] pariter infinitus. Infinities igitur peripheriam BRr deſcribit radius CR, priuſquam punctum M ad centrum C pervenerit, hoc eſt Spiralis Iſochrona infinitos gyros circa centrum C deſcribit.

Digitized by Google

Maio 1692, pag. 203, articulo 1 *, Velum arcuari in circulum, N. LXVI.
ſi quando ventum ſic excipiat, ut hic intra ſinum ejus ſtagnare, totamque ſuam preſſionem in velum exerere cogatur; velut ſane manifeſtum fit in bullis ſaponariis, quæ flatu oris in perfectas ſphæras rotundantur. At hæc pro velis marinis hypotheſis tantum fuit, quæ, ſi veritati minus conſona, propterea primarium calculi fundamentum non evertit. Et revera, aut nullus aer intra veli ſinum ſtagnat, ſed omnis ad latera veli evadit; aut ſi quis ſtagnat, is non niſi partem preſſionis, quam ab aere pone inſequente partemque motus ſui retinente accipit, in velum transfert, illudque proin aliter non afficit, quam faceret, ſi juxta caſum §. 10, ipſemet oblique in velum irrueret, ac reliquum motus ſui libere continuare poſſet. Unde re attentius penſiculata non tantum non ſententiam muto, ſed jam nullus dubito, velum inflatum omni in caſu Funiculariæ curvaturam aſſumere. Nec moror diſcrimen, quod fortaſſe intercederet, ſi velum ex numero finito rectarum compoſitum intelligeretur †; cum nihil ſit frequentius in natura, quam ut in caſu infinite parvorum quantitatum differentia evaneſcat; nec magis hoc mirandum, quam miramur quod, evaneſcente baſe trianguli, evaneſcit crurum differentia. Approbavit autem in fundamentalibus ſolutionem ipſe Frater, nec approbavit tantum, ſed & ſuam fecit, breviſque inventi hiſtoriola hæc eſt. Cum ineunte Anno 1691 Fratri *Genevam* miſiſſem proportionem hanc ſolvendam; $ddx : dx = dy^3 : \int dy^2$, qua Velariam comprehendi indicabam, ille ex Patre *Gaſtone* PARDIES retulit, Velum conſiderari poſſe inſtar funiculi pondere carentis, cui infinitæ lineæ æquidiſtantes & æque graves inſiſtant; adeoque in Priſma Parabolicum curvari, juxta id quod in *Actis* habetur Menſis Junii 1691, pag. 288 *. Sed monitus diverſam eſſe rationem fluidi impellentis, ac ſolidi ponderis juxta eandem directionem trahentis vel prementis, mox ſententiam mutavit, intuenſque velum ceu linteum liquore aliquo

 imple-

* N°. XLVIII. pag. 484.
† N°. præc. pag. 638.

* Supra N°. XLII. pag. 449.

N.LXVI. impletum, indagare cœpit quænam ejus curvatura foret, ſi preſſio fluidi linteo communicaretur ſecundum directionem horizontalem ſive verticalem; harum enim hypotheſium alterutram veram eſſe perſuaſum habebat: & cum ne hoc quidem probarem, exiſtimabat ſaltem lintei hujus, ſi non veli, curvaturam ſe dediſſe; donec ego, paulo poſt apertius me explicans, hanc fluidorum naturam eſſe perhiberem, ut preſſionem communicent, nec ſecundum horizontalem, nec verticalem, ſed ſecundum lineam corpori impulſo in quovis impulſus puncto perpendicularem; hac tamen cum differentia, quod ubi fluidum motum ſuum poſt impulſum poteſt proſequi, partem tantum virium in premendo corpore impendat; ſi vero ſtagnat alicubi, nec habet quo evadat, omnes ſuas vires in illud transfundat: hinc velum concipiendum inſtar funis [*Fig.* 11.] ab infinitis potentiis æqualibus, aut inæqualibus, tracti vel impulſi, quæ cum ſint æquales, manifeſtum eſſe formari circulum, quemadmodum etiam per calculum inveneram, eoque in hypotheſeos aſſumptæ veritate prorſus confirmabar. Interea dum ille, ſub finem Anni 1691, *Pariſios* ſe confert, tranſmuto proportionem hanc $ddx : dx = dy^3 : \int dy^3$, in æqualitatem $adsddx = dy^3$ (¹), indeque ope methodi cujuſdam †, quam pro ſecundis differentiis ad primas reducendis paulo ante excogitaveram, Funiculariam elicio; mox etiam æquationem tecta ſolutione Fratri *Lutetiam* mitto, viſurus num & ſua huc pertingeret. Is vero rem ſibi ſucceſſiſſe videns, atque jam factus cupidior ſciendi quomodo ad hanc æquationem pervenerim; denuo ad Veli contemplationem redit; nec ceſſat, donec animadverteret, artificium in hoc uno conſiſtere ut ſingulæ impulſuum directiones in duas alias, horizontalem puta & verticalem reſolvantur. Nec mora, protinus inventum prælo committit, ac Menſe *Aprili* 1692, *Ephemeridibus Gallicis* curat inſeri,

(¹) Etenim, cum ſit ddx ad integralem ſuam dx, ut dy^3 ad ſuam $\int dy^3$, erit ddx proportionalis ipſi dy^3, id quod, ſervata homogeneitate, dabit æquationem $dy^3 = adsddx$. Ponuntur enim a & ds conſtantes.

† N°. CIII. Art. X.

Digitized by Google

inſeri, & quia ſe ſolum Problema abſolviſſe putabat, me de plenaria reſolutione deſperaſſe ſcribit; neſcius quod illam jam præcedente Martio una cum Regulis uſum inventi concernentibus *Lipſiam* miſiſſem. Corrigere etiam poſtea voluit curvaturam ſuam lintei liquore adimpleti, novamque D. Marchioni HOSPITALIO ſolutionem exhibuit, ſed eam etiamnum erroneam & a mea diverſam. Hanc enim tandem eſſe cum Elaſtica, non minus atque Velariam cum Funicularia, conſtanter ſentio; & quod certum veritatis indicium eſſe poteſt, identitatem hanc, quam initio ex ſpeciali natura curvarum prolixiore analyſi collegi, nunc abſque omni fere calculo duabus lineis oſtendo *. Factum interim fuit, ut uterque principium preſſionis fluidorum ad alia quoque utiliter adhiberemus, ille ad motum muſculorum explicandum, ego ad eximendum mihi ſcrupulum, quem olim habui circa cauſam perpendicularis deſcenſus gravium, Menſe Februario 1686 †. Videbam enim ex eodem fonte rationem peti poſſe, cur materia terreni vorticis juxta directiones æquatori parallelas excuſſa, in circumferentia vorticis, vi ſui elateris, per lineas circumferentiæ perpendiculares repercuti, ac propterea gravia verſus centrum potius, quam per eaſdem directiones, repellere debeat. Quanquam autem in hoc negotio nonnulla fuerunt, quæ initio ut vera aſſumpſimus, demonſtrare vero non potuimus; velut illud primarium, quod legem preſſionis fluidorum ſtagnantium concernit, eorum tamen veritatem omnem nunc a priori cognoſco. Quorſum etiam pertinet aliud, quod me monere cogit veritatis amor. Suppoſueram, initio, axem æquilibrii tranſire per concurſum rectarum extremitates veli linteive tangentium, & eſſe curvæ perpendicularem; ſed cum poſtea certis indiciis cognoſcerem, ambas hujus hypotheſeos partes non poſſe ſimul ſtare; priore repudiata, alteri ceu, ut videbatur, veriſimiliori inhæſi. Quis enim exiſtimaſſet ex infinitis directionibus, quæ omnes curvæ alicui perpendiculares ſunt, ſolum axem æquilibrii, ſeu li- N. LXVI.

Oooo 3 neam

* Vide N°. CIII. Art. XI. † N°. XIX. pag. 239.

N.LXVI. neam directionis mediæ talem non eſſe ? At nunc cum evidentia ſucceſſit conjecturis, omnino contrarium video, cogorque retractare omnes illas Regulas, Menſe Maio 1692, pag. 204 *, & Menſe Junio 1694, pag. 275 †, quæ ex priore opinione fluxerunt, dum reliquarum, directionem hanc atque impulſus vim concernentium, veritas inconcuſſa manet. Quibus, ut ἀβλεψίαν meam utcunque reparem, addo nunc novum aliquod Curvæ genus, determinandæ generaliter huic directioni inſerviens, quam ab uſu *Lineam mediarum directionum* appello, atque ſequenti modo conſtruo, *Fig.* 12. In data quavis curva A B, quam concipio formatam eſſe a preſſionibus, utcunque inæqualibus, fluidi alicujus, ſeu præterlabentis, ſeu ſtagnantis, ſunto rectæ AI, BD, ei perpendiculares, tangentes A C, B C, ponaturque A F $= x$. F B $= y$, & A B $= s$; quo facto, ſi ex perpendiculari BD abſcindatur BD $= (x ds^2 + x dy ds) : dx^2$ [quod ſemper & in omni curva duobus circini ductibus abſolvo, ſpeciatim autem in Velaria, ſeu Funicularia, cujus centrum G, faciendo tantum B D = G F; in Elaſtica, ſumendo B D $=$ A I^2 : (A I + I F)] dico fore punctum D ad curvam deſideratam ED, quæ talis eſt, ut ducta quavis BD perpendiculari ad AH & abſcindente ex illa portionem AB, ſecante vero curvam ED in D, juncta CD media ſit directio portionis A B, ſive axis æquilibrii circa quem hinc inde portio A B impulſiones æqualium momentorum ſuſtinet (k). Cæterum obſervavit olim Acutiſſimus D. LEIBNITIUS [vide

* N°. XLVIII. pag. 486.

† N°. LVIII. pag. 598.

(k) Curva AbB [*Fig.* B] formata intelligitur innumerabilium potentiarum preſſionibus ad curvam perpendicularibus. Ducantur tangentes AC, BC, bc, & ſint potentiarum omnium in arcus A b, AbB agentium mediæ directiones c D, CD. *Lineam mediarum directionum* E D vocat Noſter eam quam perpetuo tangunt mediæ directiones cD, CD; vel quæ formatur per concurſum D mediarum directionum infinite vicinarum cD, CD.

Oſtendo primum rectam BD, normalem ad curvam AB in puncto B, occurrere mediæ directioni CD in puncto D lineæ mediarum directionum ED. Occurrat enim in puncto d. Et quia cD, CD biſecant [N°. XLVIII.

[vide *Ephemerides Gallicas* Menſis Septembris 1693] quod recta N.LXVI.
tendentiæ, ſeu directionis mediæ, mobilis a pluribus potentiis impulſi tranſeat per commune centrum gravitatis omnium punctorum tendentiæ particularium; quod verum etiam cum potentiæ ſunt infinitæ: at tum cavere debet Lector, ne centrum gravitatis loci punctorum, ſeu lineæ per infinita puncta tranſeuntis, cum centro ipſorum punctorum confundat; quippe quod, ob interval-

XLVIII. Nota a, pag. 484] angulos A c b, ACB, erit cBC = Acb — A C B = 2 A c D — 2 A C D = 2 cDC. Ergo, ſi centris B & D deſcribantur per c arcus cH, cG, angulorum cBC, c DC menſuræ, erit B c: ½ c H = D c : c G, vel alternando Bc : Dc = ½ cH : cG. Ducatur b N parallela ipſi c D, & demittatur ex N normalis NI in Bb, eruntque ſimilia Tr. c CH, N B I, nec non bNI, CDB, & cCG, ob æquales angulos cCG, BCD; atque ideo erit cH : c C = N I : N B & c C : c G = b N : N I, & ex æquo cH : cG = bN : NB, & ½ cH : cG [= B c : D c] = ½ bN : BN vel Bb. Eſt enim Tr. B b N iſoſceles, cum ſit ang. BNb = N b f = DCA = DCB = NbB. Itaque BK demiſſa normalis ex vertice B in baſin bN ipſam biſecat. Ergo Bc : Dc, quod erat = ½ bN : Bb, eſt = b K : bB, = bI : bN [ob ſim. Tr. bBK, bNI] = Bc : cd [ob ſim. Tr. bIN, cBd]. Igitur cum ſit Bc : Dc = Bc : cd, eſt cd = cD, hoc eſt, coincidunt puncta D & d, concurſus D mediarum directionum cD, CD quamproximarum, & earundem interſectio d, cum Bd perpendiculari ad curvam. Differt igitur linea mediarum directionum ab evoluta, adeoque media directio non eſt ad curvam normalis.

Deinde oſtendo Bd, vel BD, eſſe $= (xds^2 + xdyds) : dx^2$, aut ſimplicius $xds : (ds - dy)$ [æquales enim eſſe has fractiones liquet, ſi in prioris denominatore ſcribas $ds^2 - dy^2$ pro dx^2, & utrumque terminum dividas per $ds + dy$]. Etenim demittendo bM normalem in BN ex b, æqualia fiunt, ob æquales hypothenuſas B b, BN, & communem ang. bBN, Triangula B b M, BIN, adeoque IN = bM $= dx$, & B I = B M $= dy$, atque bI = Bb — B I $= ds - dy$. Ergo ſim. Triang. BbM & CBL, nec non bNI & CDB, dant b M vel IN : bB = BL vel AF : BC, & bI : IN = BC : BD; aut, ex æquo, bI [$ds - dy$] : bB [ds] = A F [x] : BD [$xds : (ds - dy)$].

Eſt autem in Velaria [N°. XLVIII, Nota (e), pag. 485] $ds : dy$ = FG : GA. Igitur BD $= xds : (ds - dy)$ = AF × FG : AF = FG. In Elaſtica vero [N°. LVIII. Art. 3] eſt $ds : dy = AI^2 : IF^2$. Igitur BD = AF × $AI^2 : (AI^2 - IF^2) = (AI - IF) \times AI^2 : (AI^2 - IF^2) = AI^2 : (AI + IF)$.

N.LXVI. tervallula punctorum plerumque inæqualia, ab altero eſt diverſum. Quanquam autem peregregium hoc ſit Theorema, nullius in re præſente uſus eſſe poterit; cum ſupponat omnes directiones particulares ex uno puncto divergere; quas hic ex integra linea, Evoluta ſcilicet, emanare concipimus *. Alia via eſt, qua idem certo & expedite licet conſequi. Jam enim plane aſſevero me omnia demonſtrare poſſe; facileque fidem impetrabo apud Lectorem, ſi perpenderit mihi & ſatis eſſe perſpicaciæ, ut ſponte agnoſcam cum impegero, & ſatis quoque ingenuitatis, ut fatear. Sed non omnia hic vacat agere, mallemque hæc cum affinibus aliis, quæ reſiſtentias fluidorum, velocitates corporum motorum in fluidis, &c. concernunt, integro Tractatui reſervare, ſi modo valetudo firmatior, & ſufficiens huic elaborando otium concederetur, nec meæ me conditionis neceſſitas ignobilioribus plerumque ſtudiis adſtringeret. Ut tamen certius appareat, me non vana promittere in hac materia; volo hic in veritatis patrocinium, & commodum rei nauticæ, etiam ſymbolam meam conferre ad diſcuſſionem quæſtionis illius utiliſſimæ, de velocitatibus Navium eodem vento in diverſas partes velificantium, quæ, ſuperioribus annis, inter D. RENAVIUM Auctorem Theoriæ *de la Manœuvre des Vaiſſeaux* & D. HUGENIUM agitata fuit; quorum ille velocitates has voluit eſſe ut ſinus angulorum veli naviſque, hic ut ſinuum radices. Quanquam enim D. HUGENIUS veritati multo propius accedat, uterque tamen, ſi præciſe loquendum ſit, navi obliquius latæ velocitatem juſto minorem tribuit; quod palpabile ſit conſideranti, naves in diverſas plagas tendentes non iiſdem ab eodem vento viribus impelli, [ut tacite ſupponit HUGENIUS;] cujus rei ratio eſt, quia navis in tantum ſe ſubducit pone inſequentis venti impulſui, in quantum propria celeritate, juxta directionem venti promovetur, adeo ut ventus non totali ſua celeritate, ſed parte tantum celeritatis in navem agat, eo minore, quo rectior eſt navis curſus; hoc eſt, ut poſita

* Vide Nos. LXXI, & LXXII. Art. 2.

poſita celeritate venti a, navis rectioris y, obliquioris z, & ratione ſinuum angulorum veli naviſque $a : b$; ventus ad priorem navem appellat velocitate $a - y$, ad alteram velocitate $a - bz : a$; unde cum vires, quibus naves impelluntur, componantur ex ſimplici ratione ſinuum a & b, ac duplicata velocitatum $a - y$ & $a - bz : a$, atque inſuper [in caſu maximæ velocitatis navium] reſiſtentiis aquæ, quæ duplicatis navium celeritatibus proportionales ſunt, æquentur, erit $yy : zz = a\,(a - y)^2 : b\,(a - bz : a)^2$; hoc eſt, quia poſito pondere aquæ ad pondus aeris ut p ad a, & ſuperficie proræ ad ſubtenſam veli ut a ad m, reperi olim maximam velocitatem navis $y = a\sqrt{m} : (\sqrt{p} + \sqrt{m})$ *, fiet inde $z = aa\sqrt{bm} : (a\sqrt{ap} + b\sqrt{bm})$; adeo ut emergat $z : y = \sqrt{b} + \sqrt{(bm : p)} : \sqrt{a} + \frac{b}{a}\sqrt{(bm : p)}$, quæ ratio major eſt ratione *Hugeniana* $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{a}$, & differentiam parit trigeſimæ circiter partis totius velocitatis, quod in longiori itinere errorem nimis enormem reddit. Optaſſem vero, ut aliquando mihi licuiſſet propius cum deſideratiſſimo D. HUGENIO, at nunc eheu vivis erepto! ſuper his conferre; qui, tum ob loci commoditatem, tum ob profundam rerum cognitionem atque in mechaniſmis excogitandis ſolertiam, multa inventis noſtris perficiendis, ac in uſum rei maritimæ traducendis communicare potuiſſet. N. LXVI.

VI. Reſtarent nunc nonnulla Fratris ſchediaſmata examinanda, præſertim illud Menſe Octobri 1694, quod conſtructionem Iſochronæ ſpectat, meque propius tangit. Verum de re ipſa non multa dicenda habeo, niſi quod nobis hic ova, quod aiunt, poſt prandium apponit, nihilque novi docet, quod non ſimplicius quodammodo jam præcedenti Septembri a me præſtitum ſit. Dixeram, illum multum fuiſſe in Problemate; quandiu autem ejus ſolutioni præciſe incubuerit, non definio: hoc tantum novi, quod D. Marchio HOSPITALIUS, eo tempore quo Fratrem

* Vide N°. LVI, Notam *u*, pag. 562. Aut N°. CIII, Art. XVIII.

N. LXVI. ſecum habebat, ſuper æquatione $(x\,dx + y\,dy)\sqrt{y} = (x\,dy - y\,dx)\sqrt{a}$, bis me per litteras pulſarit; ipſeque Frater poſt ſuum e Gallia reditum, cum æquationem denuo mihi proponeret, atque ſimul Problema, ex quo fluxiſſet, indicaret, ſponte faſſus ſit, ſe methodo ſua, qua BEAUNII Problema aliaque difficiliora ſolverat, hic nihil efficere potuiſſe; quod utique ſatis arguit, rem non ſemel ipſi antea tentatam fuiſſe. Calculum ſuæ conſtructioni præfigit; ne quis eam, ut inquit, ex mea Menſe Junio deſumptam exiſtimet; quaſi quid eſſet facilius, quam ſyntheſin meam convertere in analyſin, ac perſpicere ex illa, quænam lineæ pro indeterminatis ſint accipiendæ. Miror autem, cur caſu potius quam induſtria me huc perveniſſe ſcribat; cum initio ſui Schediaſmatis de ſua ſolutione ſic loquatur, ut innuere velle videatur, ſe filo certæ methodi ad illam perductum fuiſſe; niſi forte dicere velit, ſemet arte poſſe conſequi, quod a me non niſi caſu invenitur. Qua ipſe arte fuerit uſus, nolo curioſius inquirere; mihi certe nihil hic caſuale, nihil inexpectati accidit; ſed hoc ipſum, quod inveni, quærere intendi, certoque conſilio, non temere factum eſt, quod has potius lineas indeterminatas quam alias adhibuerim. Non nego, fortuito mihi natam fuiſſe occaſionem cogitandi primum de Problemate: at ſi hoc inventum caſuale faciat, nihil non caſui debebitur, atque, exempli gratia, obſervatio identitatis Curvæ æquilibrationis cum Cycloide a Fratre facta Menſe Februario 1695 *, non induſtriæ alicui, ſed caſui accepta ferenda eſt; eo quod, ex fortuito aſpectu figurarum D. Marchionis, ſuſpicio cycloidis ipſi oboriri potuit, qualis mihi nata fuit, priuſquam Fraternam ſolutionem legiſſem. Pergit deinde Frater, ac promittit nobis modum mihi, ut opinabatur, ignotum conſtruendi æquationes differentiales per rectificationes curvarum algebraicarum, quem in eo conſiſtere ait, ut quadratum quantitatis differentialis dividatur in duo alia quadrata, quorum latera, ſi fieri poſſit, integrabilia ſint, [ſcilicet hoc omnes norunt, etiamſi non dixiſſet;] at qui hoc ſemper & ubique fieri poſſit, non oſtendit; quod tamen vel maxime factum oportuiſſet, ne lectores meris ſolutionibus paſcerentur, atque etiam exiſtimare poſſent,

* Vide N. LXIII. Notam, pag. 616, 617.

poſſent; caſu potius quam induſtria rem hic nobis ſucceſſiſſe. Sicut quoque optandum eſſet, ut vires methodi ſuæ, ſi quam habet, ſeparandi indeterminatas cum ſuis differentialibus a ſe invicem ac conſtituendi per rectificationes, expertus fuiſſet in reſolvenda Iſochrona ſupracentrali, nec non æquatione $xxdx + yydx = aady$, quam ipſe propoſuit Menſe Novembri, pag. 436. Nam modus generalis illa conſtruendi, quem ibidem affert [quique ab illo quem D. Leibnitius jam Menſe Auguſto, pag. 373 * expoſuerat, niſi in ſuperfluis non differt] nullibi quam in ſpeculatione locum habet, cum conſtructiones non verſentur circa quantitatum elementa; & quam primum in praxin transfertur, ceſſat eſſe conſtructio geometrica, & fit mechaniſmus. Sed nec ſeries, alias ſatis ingenioſa, quam nobis dedit, pag. 438 (l), hic in uſum verti poteſt: quod tenendum, ne quis exiſtimet hæc adeo univerſalia eſſe, ut nihil amplius deſiderari poſſit. Quod ſi autem conſtructionibus ſpeculativis, ſaltem earum æquationum, quæ litteras indeterminatas jam ſeparatas habent, acquieſcere velimus, plures aliæ elegantes Theoriæ excogitari poſſunt. Talis eſt conſtructio, quæ fieret per Elaſtra: poſita enim generaliter natura curvæ conſtruendæ $ady = tdx$, ubi t datur per x; dico, ſi qua arte in materiam ea induci poſſit tenſionis lex, ut, dum vires tendentes ſunt ut x, tenſiones ſint ut $a^4dt : (aa + tt)\sqrt{(aa + tt)}\,dx$, fore, ut lamina inde confecta & inflexa curvaturam optatam ſponte ſit acquiſitura (m). Ita determinare licet, qualiter filum aliquod gravari conveniat, ut ab extremitatibus ſuſpenſum deſideratam curvam.

N. LXVI.

Pppp 2

* Supra N°. LXIV. pag. 635.

(l) Iſta ſeries hæc eſt $\int ndz = nz - \frac{zzdn}{1.2.dz} + \frac{z^3ddn}{1.2.3.dz^2} \quad \frac{z^4d^3n}{1.2.3.4.dz^3}$ &c. De qua ſerie utiliſſima non ſatis æque ſentire videtur Noſter.

(m) Oſtenſum eſt [N°. LVIII. Not. c, pag. 581], ſi ſint τ tenſiones, quas inducunt laminæ elaſticæ vires tendentes x, curvam elaſticam deſignari per æquationem $dy = Sdx : \sqrt{(a^4 - SS)}$, ubi $S = \int \tau\,dx$. Comparetur hæc æquatio cum propoſita $dy = tdx : a$, & erit $t : a = S : \sqrt{(a^4 - SS)}$, adeoque $S [= \int \tau dx] = aat : \sqrt{(aa + tt)}$, & differentiando $dS = \tau dx = a^4dt : (aa + tt)\sqrt{(aa + tt)}$, adeoque $\tau = a^4dt : (aa + tt)\sqrt{(aa + tt)}\,dx$.

N.LXVI. curvam repræſentet. Verbo, huc referri poſſunt omnes illi conſtituendi modi, qui certam aliquam conditionem prærequirunt in materia, qua poſita, natura ipſa ſpontaneo motu quæſitum exhibeat. *

Hæc vero omnia, ne ſequius accipiantur, unice in veritatis præſidium hic allata moneo, & ut illi, qui hiſtorica inventorum narratione delectantur, ſciant quid quantumque ſingulis tribuendum ſit; minime vero ut aliorum reperta vel ſugillem & elevem, aut mea contra nimium quantum extollam. Præſtat enim hic ſentire cum COLUMBO, qui amicis detectionem novi Orbis ſibi invidentibus reſpondiſſe fertur, non jactando & exaggerando inventi magnitudinem, ſed quæſtionem de re aliqua frivola ipſis proponendo; qua modeſte innuere voluerit, ipſos eidem inveniendo, ſi advertiſſent, facile pares eſſe potuiſſe, attamen hoc ipſis ante ſe in mentem non veniſſe. Imo vero tantum abeſt, ut exiſtimem nos multum gloriari poſſe de inventorum difficultate vel ſubtilitate aliqua, ut perſuaſus potius ſim, [puto, Frater & de ſuis fatebitur] nos nihil hic præſtitiſſe quod non cuivis mediocri ingenio noſtris principiis imbuto pariter in mentem venire potuiſſet. Quemadmodum enim in Natura nuſpiam, ita nec in Scientiis ſaltus datur, ſed omnis noſtra cognitio, more quantitatum, creſcit per elementa, atque ita pedetentim augetur, ut ab uno ejus gradu ad gradum proxime ſequentem non niſi ſaltus, ut ſic dicam, requiratur infinite parvus; ut nemo tam ſit hebes, qui ſi modo ordine incedere velit, ac præcedentia intellexerit, non proprio marte pergere & ad ſequentia tranſire poſſit. Quin etiam ſubtiliſſima ſæpe quæ videntur inventa, principia habent tam obvia tamque trivialia, ut non inepte comparari poſſe videantur cum artificiolis illis Præſtigiatorum [*Tours de paſſe-paſſe*,] quæ ignari tantopere mirantur; qui vero norunt, contemnunt ac rident. Ratio vero, cur non omnia inveniamus omnes, hæc eſt, quod tanta rerum multitudo ſit, ut iis omnibus animum advertendi nulli ſufficiens otium vel occaſio

* Vide Num. LXX.

occaſio detur; aut etiamſi duo eidem quærendæ rei mentem applicent, fieri plerunque ſolet, ut diverſas vias ineant, naturæ rei non æque accommodas, quas tamen quo ducant initio prævidere non poſſunt; ſimiles duobus, qui pari quidem ſagacitate Terras incognitas luſtrant, amboque novis ſpoliis onuſti domum redeunt; ſed neuter, quæ alterius tantum Terra tulit, aſportare poteſt. N. LXVI.

VII. *Problema*: Æquationem $a\,dy = yp\,dx + by^n q\,dx$ [ubi a & b quantitates datas & conſtantes; n poteſtatem quamvis litteræ y; p & q quantitates utcunque datas per x denotant,] conſtruere, ſaltem per quadraturas; hoc eſt, ſeparare in illa litteras indeterminatas x & y cum ſuis differentialibus a ſe invicem †.

† Vide Num. LXXII.

SSN
613629
NAPOLI

Digitized by Google

ystema Cometarum

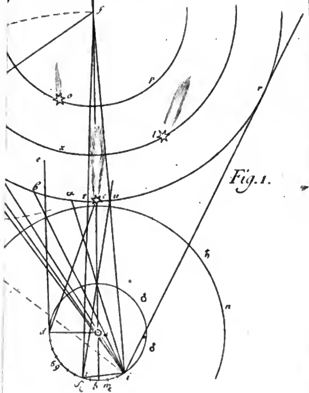


Fig. 1.



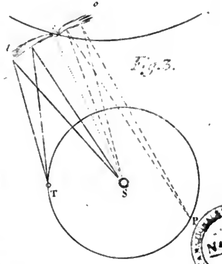
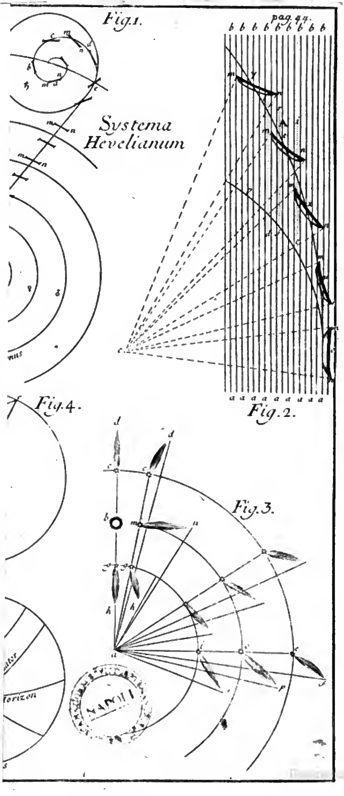


Fig. 3.

NAPOLI

Google

Digitized by Google


pag. 44.
Fig.1.
Systema
Hevelianum
Fig.2.
Fig.4.
Fig.3.
NAPOLI

Digitized by Google

e Oteris TAB. I.

Fig. 8

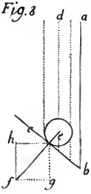


Fig. 2

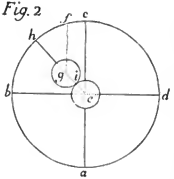


Fig. 7



Fig. 4

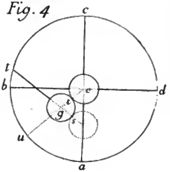
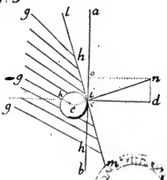


Fig. 6



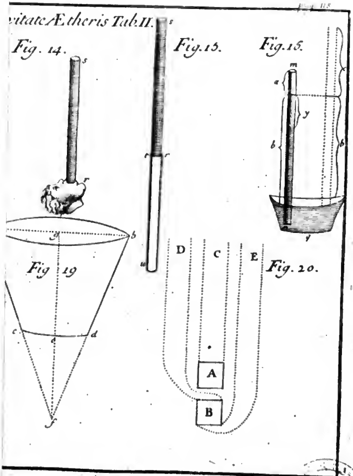
Fig. 5



NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google



NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

eris Tab. III.

Fig. 25

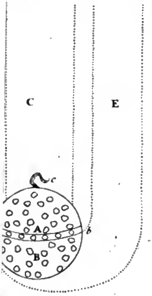
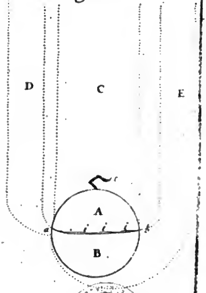


Fig. 26

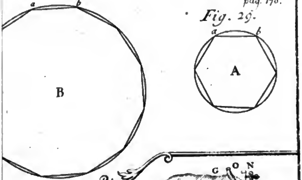


NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 29.

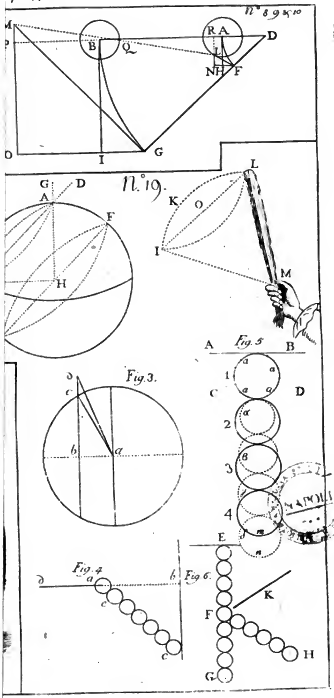




N.° III.

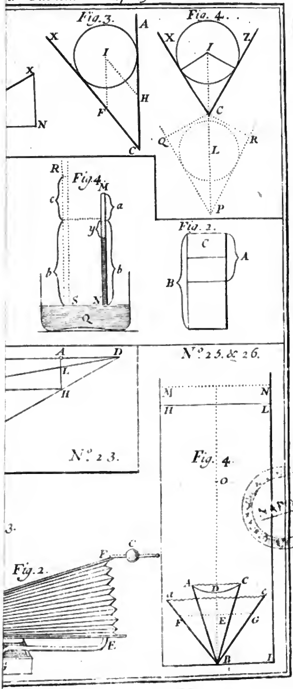
Digitized by Google

Digitized by Google


n° 8 9 & 10
M
P
B
Q
R A
D
L
N H
F
O
I
G
n° 19
G
D
A
F
H
L
K
O
I
M
Fig. 5
A
B
1
C
D
2
3
4
E
Fig. 3.
b
a
Fig. 4
a
b
c
Fig. 6.
K
F
H
G
NAPOLI

Digitized by Google

ra Tabula VIII. p. 290.



Digitized by Google

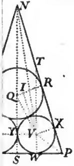
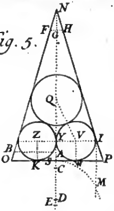


Fig. 5.



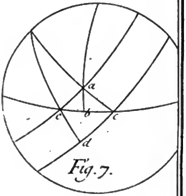
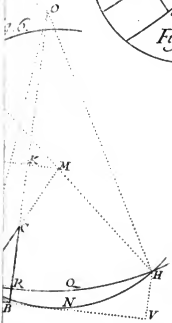


Fig. 7.



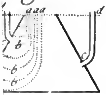
NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

28.

Fig. 2.



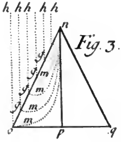
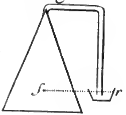


Fig. 3.

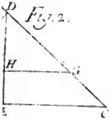


Fig. 5.



N°. 29.

Fig. 2.



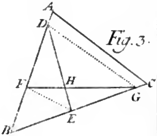
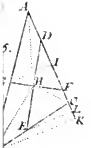


Fig. 3.



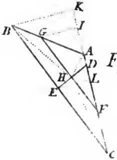
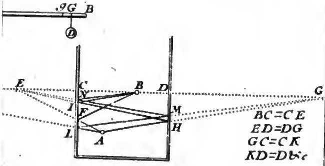


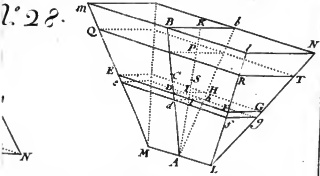
Fig. 6.

Digitized by Google

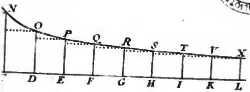
N.° 7.



N.° 28.



N.° 35.



NAPOLI

Digitized by Google

N°. 30.

Fig. 6.

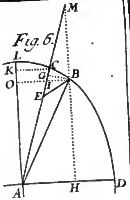


Fig. 1.



Fig. 7.

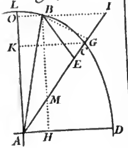


Fig. 5.

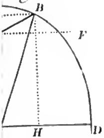
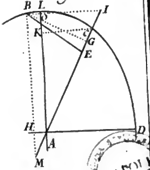


Fig. 8.



Digitized by Google

Digitized by Google

N°. 31.

Fig. 2.

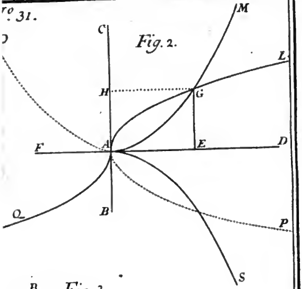
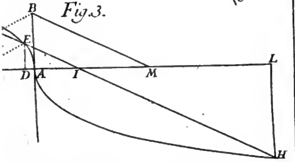
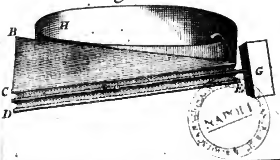


Fig. 3.

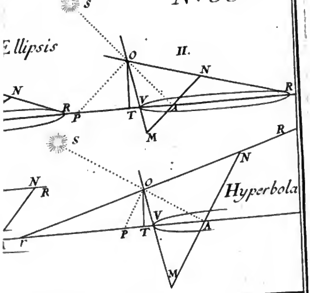


N°. 32. & 33.

Fig. 2.



N°. 35.



°36. Fig. 2.

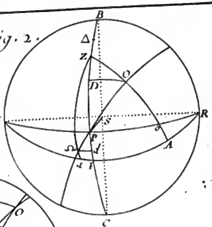
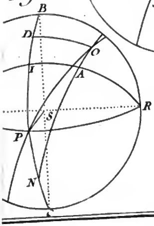
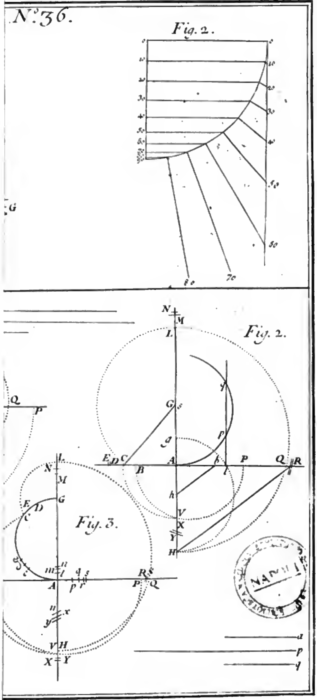


Fig. 3.



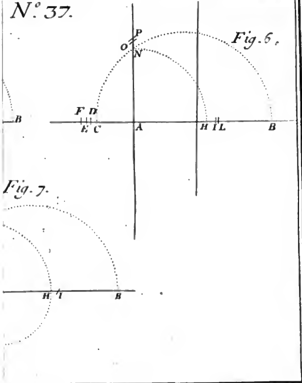
Digitized by Google



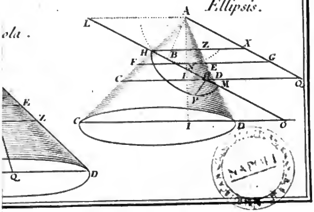
Digitized by Google

Digitized by Google

N°. 37.



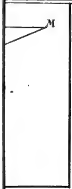
:38.



Digitized by Google

Digitized by Google

N°. 41.



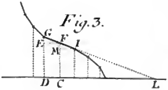


Fig. 3.

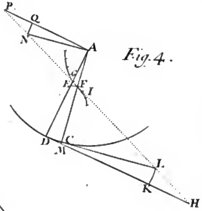


Fig. 4.

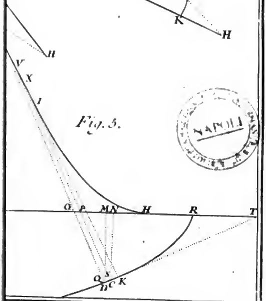


Fig. 5.

NAPOLI

Digitized by Google

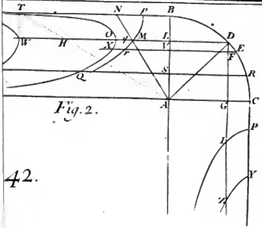


Fig. 2.

42.

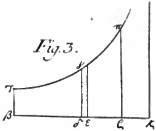


Fig. 3.

ig. 6.



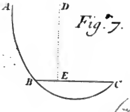


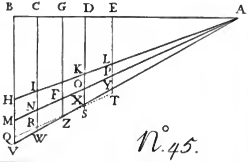
Fig. 7.

NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

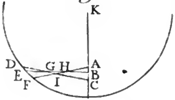




N°. 45.

46.

Fig. 2.



.3.

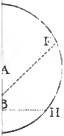
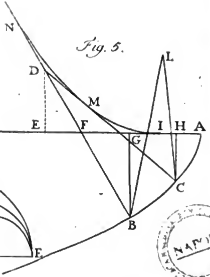
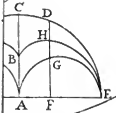


Fig. 5.



ig. 6.



NAPOLI

Digitized by Google

47.

Fig. 2.

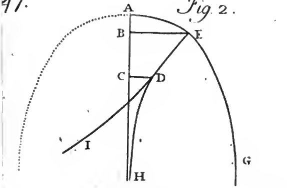


Fig. 2.

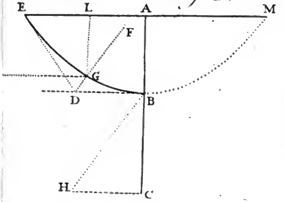
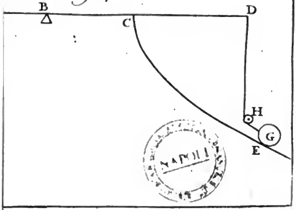


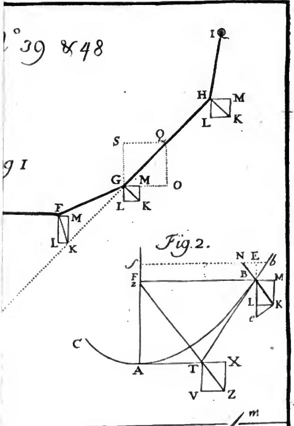
Fig. 4.

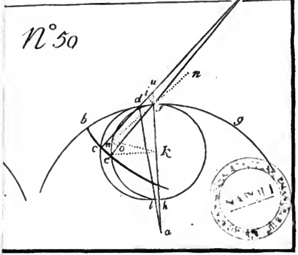


NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google


N°39 & 48
Fig I
I
H
M
L
K
S
Q
G
M
O
L
K
F
M
L
K
Fig. 2.
N E
b
f
F
z
B
M
L
K
e
C
A
T
X
V
Z


N°50
m
n
u
i
d
f
b
g
c
n
o
k
e
l
h
a

N°. 49.

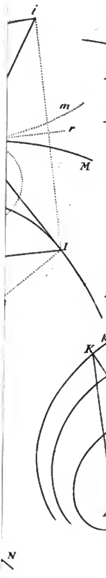


Fig. 2.

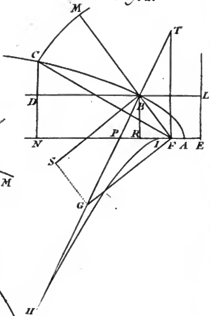
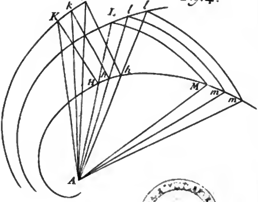


Fig. 4.



NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

N°. 50.

Fig. 1.

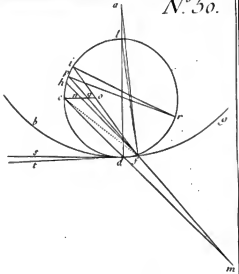


Fig. 4.

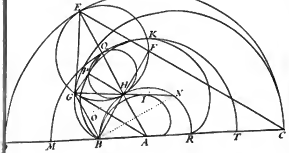
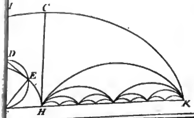


Fig. 3.



NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

N.° 52.

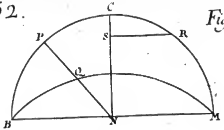


Fig. 2.

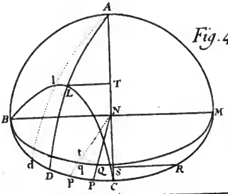


Fig. 4.

N.° 54.

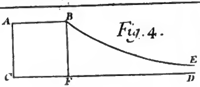


Fig. 4.

Fig. 3.

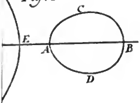
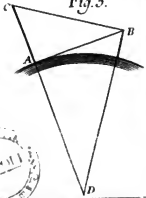


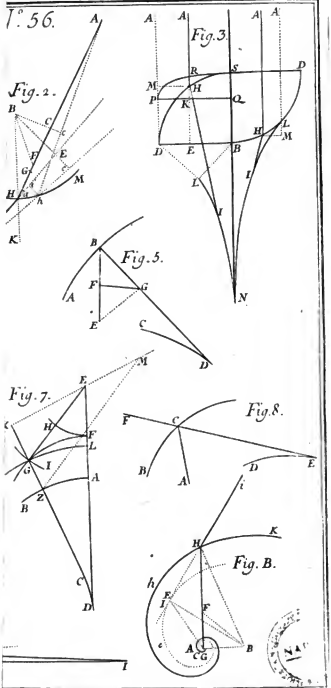
Fig. 5.



NAPOLI

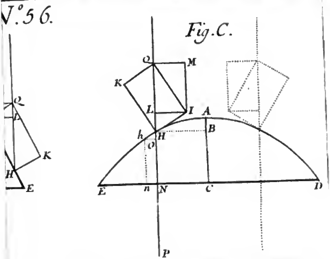
Digitized by Google

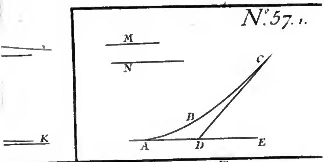
Digitized by Google

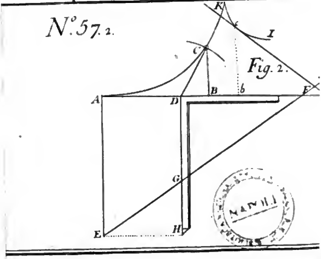


Digitized by Google

Digitized by Google



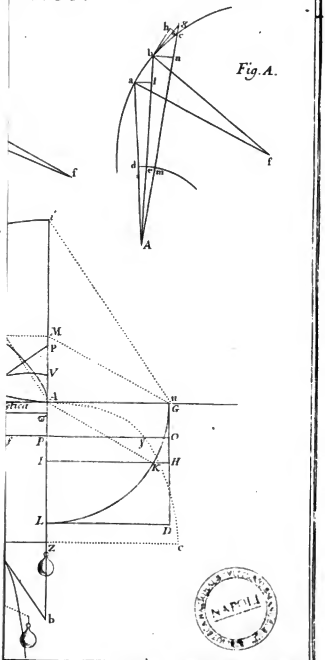




Digitized by Google

Digitized by Google

N.° 58.

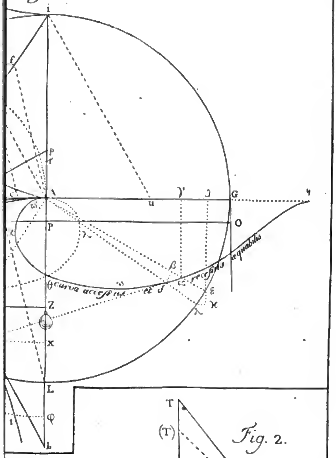


NAPOLI

Digitized by Google

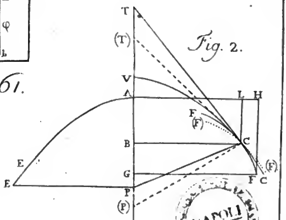
N.° 58. 59. & 60.

Fig. 3.



N.° 61.

Fig. 2.



NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

n°. 62.

Fig. 2.

Fig. A.

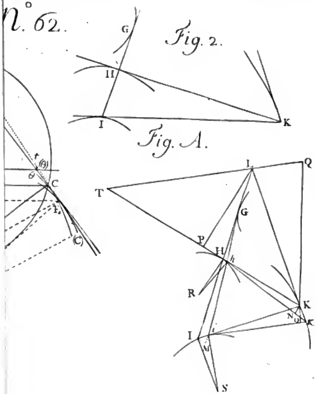
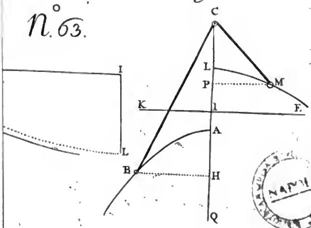


Fig. A.

n°. 63.



Digitized by Google

Digitized by Google

N°. 64.

Fig. 3.

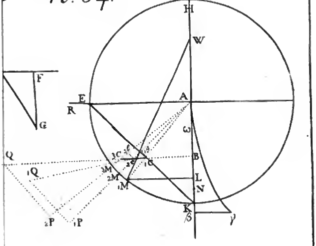


Fig. 1

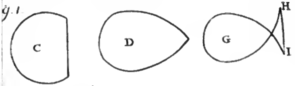


Fig. 3.

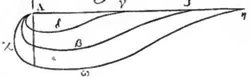
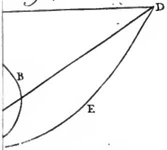


Fig. 4.



Digitized by Google

Digitized by Google

N.° 66.

Fig. 1.

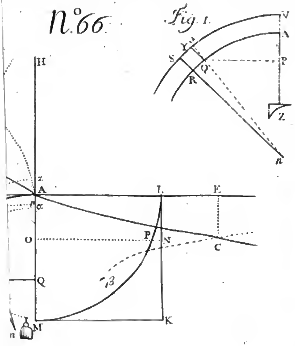


Fig. 5.



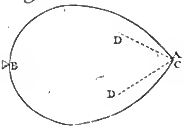


Fig. 7.

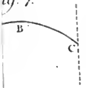
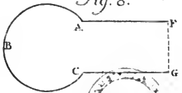


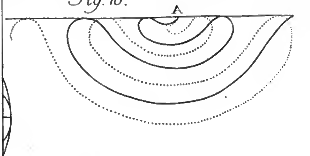
Fig. 8.

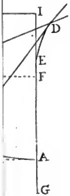


Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 10.





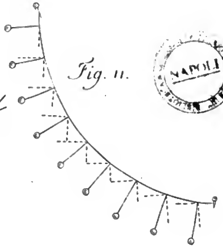


Fig. 11.

NAPOLI

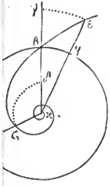
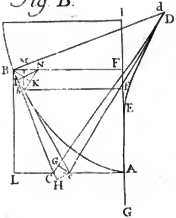


Fig. B.



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google